УДК 519.11

Олійник Б. В.

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Досліджується спектр скінченних ультраметричних просторів. Пропонується конструкція, яка дозволяє природним чином реалізувати довільний скінченний ультраметричний простір як простір з деревною метрикою. Доведення наводиться конструктивне.

1. Вступ

Скінченні метричні простори нині є одним з найважливіших об'єктів дискретної математики; дослідженню їхньої будови присвячено сотні статей і ціла низка монографій та розділів у монографіях (див., наприклад, [1], [2], [3]). Розглядаються скінченні метричні простори з багатьох поглядів, постійно розширюється область їх застосування [3]. У зв'язку з цим поряд з новими задачами вже викристалізувалася низка стандартних проблем, які постійно цікавлять дослідників. Однією з таких проблем є проблема ізометричної зображуваності скінченних метрик тими чи іншими відомими метриками, яка має застосування у теорії складності обчислень, теоретичному програмуванні, дискретній оптимізації, комп'ютерному моделюванні хімічних, біологічних і соціальних процесів тощо [1], [4].

Один з найцікавіших підкласів класу всіх метричних просторів утворюють ультраметричні простори або, як їх ще називають, простори з неархімедовою метрикою. Нагадаємо, що метрика $d: X \times X \to R^+$ метричного простору X називається ультраметрикою, якщо вона задовольняє посиленій нерівності трикутника:

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(y,z)\}$$

для довільних $x, y, z \in X$. Ультраметричні простори мають низку специфічних властивостей, які істотно відрізняють їх від довільних метричних просторів [5], а саме:

1) кожен трикутник у такому просторі є рівнобедреним, тобто для довільних $x, y, z \in X$ принаймні дві з трьох відстаней $d(x,y), d(x,z), d(y,z)$ однакові, причому третя з відстаней не більша за них;

2) довільні дві кулі або не перетинаються, або одна міститься в іншій;

3) будь-яка точка кулі є її центром.

Остання властивість означає, що в ультраметричній геометрії поняття центру кулі вироджується. Але поняття радіуса кулі залишається, причому радіус одночасно є діаметром кулі.

Такі специфічні властивості просторів застосовуються у теоретичній фізиці, моделюванні біологічних і соціальних процесів [6] тощо. Тому природним є задачі побудови алгоритмів ізометричного зображення довільних ультраметрик за допомогою деяких стандартних ультраметрик.

2. Деревні ультраметрики

Зафіксуємо $m \in N$. Нехай T_m – деяке скінченне кореневе дерево, всі висячі вершини якого розміщуються на m-му рівні. Множину всіх висячих вершин дерева T_m позначимо $UM(T_m)$. Визначимо метрику на множині $UM(T_m)$. Виберемо послідовність дійсних чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ таку, що

$$0 = \alpha_m < \alpha_{m-1} < \ldots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0. \qquad (2.1)$$

Кожній вершині з множини $UM(T_m)$ відповідає єдиний шлях, що з'єднує її з коренем. Тому коректним є таке визначення функції ρ: $UM(T_m) \times UM(T_m) \to R^+$; для довільних двох точок $u, v \in UM(T_m)$ покладемо $\rho(u,v) = \alpha_k$ тоді і тільки тоді, коли спільний початок шляхів, що відповідають цим точкам, має довжину k. Зокрема, якщо для шляхів, що відповідають u і v, спільною є лише коренева вершина, то $\rho(u,v) = \alpha_0$. Якщо ж ці шляхи мають спільний початок довжини m, що можливо тоді і тільки тоді, коли $u = v$, то $\rho(u,v) = \alpha_m = 0$.

Твердження 1. Множина $UM(T_m)$ з визначеною на ній таким чином функцією ρ буде ультраметричним простором.

Доведення випливає з того факту, що для довільних трьох висячих вершин графа T_m принаймні дві пари з них завжди мають однакові довжини спільних початків. А умова (2.1) забезпечує виконання посиленої нерівності трикутника.

Далі тут метричний простір $(UM(T_m), \rho)$ позначатимемо $UM(T_m)$. Набір $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ називатимемо визначальним набором простору $UM(T_m)$.

Нагадаємо (див., напр., [7]), що впорядкований за зростанням набір $(d_1,d_2,\ldots,d_n,\ldots)$ всіх ненульових значень метрики d метричного простору (X, d) називається спектром цього метричного простору. Очевидно, що для довільного n-точкового метричного простору число елементів його спектра не може бути більшим за $n(n-1)/2$. Для ультраметричних просторів цю оцінку можна покращити.

Теорема 2. Нехай (X, d) – n-точковий ультраметричний простір. Якщо n парне, то кількість елементів у його спектрі не перевищує $n^2/4$, а якщо непарне – то

$$\frac{(n-1)(n+1)}{4}.$$

Доведення. Якщо метрика d набуває значення d_i рівно для однієї пари точок, то таке значення метрики d_i будемо називати одиноким. В ультраметричному просторі (X, d) метрика d не може мати більше, ніж $\left[\frac{n}{2}\right]$ одиноких значень. Справді, в іншому разі у просторі (X, d) буде існувати принаймні один трикутник, у якого довжини всіх сторін різні, що неможливо, оскільки простір (X, d) ультраметричний. Нехай c – кількість одиноких значень метрики d. Оскільки число елементів спектра не перевищує

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

то кількість значень метрики, що не є одинокими, можна обмежити числом

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-c\right)\right],$$

а кількість елементів спектра, відповідно

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-c\right)\right]+c=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+c\right)\right].$$

Враховуючи, що

$$c\le\left[\frac{n}{2}\right],$$

отримаємо, що для парних n це число не перевищує

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}\right)\right]=\frac{n^2}{4},$$

а для непарних

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n-1}{2}\right)\right]=\frac{(n+1)(n-1)}{4},$$

що і потрібно було довести.

Зауважимо, що наведені оцінки є точними. Наприклад, оцінки досягаються для довільних двоточкових і триточкових ультраметричних просторів.

3. Ізометрична зображуваність довільних ультраметрик деревними метриками

Теорема 3. Для довільного скінченного ультраметричного простору (X, d) існують кореневе дерево T_m і визначальний набір $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ такі, що простори (X, d) і $UM(T_m)$ ізометричні.

Доведення. Нехай $(d_1,d_2,\ldots,d_m)$ – спектр простору (X, d). Тоді з властивості (3) ультраметричних просторів випливає, що d_m – його діаметр. Тому для довільної точки $x\in X$ куля радіуса d_m з центром у цій точці містить у собі всі точки простору. Покладемо $\alpha_0=d_m, \alpha_1=d_{m-1}, \alpha_2=d_{m-2},\ldots, \alpha_{m-1}=d_1, \alpha_m=0$. Зазначимо, що для набору чисел $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ виконується умова (2.1).

Побудуємо кореневе дерево T_m. Ототожнимо кореневу вершину з усією множиною X. Візьмемо деяку точку $x\in X$ і розглянемо кулю з центром у точці x радіуса $\alpha_2=d_{m-1}$. У цю кулю не можуть потрапити всі точки простору (інакше діаметр простору дорівнював би d_{m-1}), а тому існує точка $y\in X$, яка не належить цій кулі. Розглянемо кулю з центром у точці y радіуса d_{m-1}. Враховуючи властивість (2) ультраметричних просторів, можна стверджувати, що ці дві кулі не перетинаються. Якщо вони не покривають увесь простір, то беремо точку, що не належить обом кулям, і будуємо третю кулю і т. д. Зрештою ми отримаємо скінченне покриття простору (X, d) кулями, що не перетинаються, радіуса d_{m-1}. Ототожнимо з кожною кулею радіуса d_{m-1} певну вершину першого рівня і з'єднаємо ці вершини з кореневою вершиною. Далі, оскільки довільні дві кулі в ультраметричному просторі або не перетинаються, або одна міститься в іншій, то кожну з куль радіуса d_{m-1} можна аналогічно покрити кулями радіуса d_{m-2}, причому кулі меншого радіуса також не будуть перетинатись. Зіставимо з кулями радіуса d_{m-2} вершини другого рівня, причому дві вершини першого і другого рівня з'єднаємо ребром у тому і тільки в тому випадку, якщо одна з куль міститься в іншій. Цю процедуру можна продовжити. Зрештою, отримаємо кореневе дерево з m рівнями, і кожна точка простору (X, d) ототожнюватиметься з деякою вершиною останнього, m-го рівня. Зрозуміло, що побудована таким чином відповідність між точками простору (X, d) і висячими вершинами (або вершинами останнього рівня) дерева T_m буде бієкцією.

Покажемо, що відстані між точками простору (X, d) і їх образами у просторі $UM(T_m)$ однакові. Справді, нехай для точок $u,v\in X$ відстань між ними дорівнює d_i. Це означає, що точки u і v належать деякій кулі радіуса d_i, і не існує жодної кулі в просторі (X, d) радіуса d_{i-1}, якій би належали ці дві точки. За побудовою кореневого дерева T_m шляхи, що відповідають образам точок u і v, матимуть спільні початки довжини $m - i$. За визначенням деревної метрики відстань між образами буде $\alpha_{m-i} = d_i$. Отже, для побудованого таким чином дерева T_m простір $UM(T_m)$ ізометричний простору (X, d).

Зауважимо, що у роботі [8] встановлено, що довільні компактні ультраметричні простори зображуються деревними метриками. У цій статті наведено незалежну конструкцію, яка більше враховує специфіку скінченних метричних просторів. Хоча описаний алгоритм і має експоненційну складність, оскільки містить елементи повного перебору, він може бути досить ефективним для просторів з невеликим числом точок. Крім того, наведене зображення дає змогу використовувати у теорії скінченних ультраметричних просторів комбінаторику кореневих дерев.

1. *Деза М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. – М.: МЦНМО, 2001.– 736 с.
2. *Matoshek. J.* Lecture on Discrete Geometry. – Berlin: Springer-Verlag, 2002.
3. *Goodman J., o'Rurke J.* (ed.) Handbook of Discrete and Computational Geometry.– London–New York–Washington: Chapman&Hall/CRC, 2004.– 1536 p.
4. *Garson M., Neathery P., Deaton R., Murphy R. C., Franceschetti D. R., Stevens S.E.* A New Metric for DNA computing // Memphis.– The University of Memphis, pre-print, TN38152.
5. *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции.– М.: Мир, 1982.– 192 с.
6. *Khrennikov A.* Non-Archimedian Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models.
7. *Olijnyk B. V.* Isomorphic embeddings of finite metric spaces into Hamming spaces // Matematychni Studii.– 1997.– V. 8.– № 2.– P. 176–179.
8. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы.– М.: Наука, 2000.– 367 с. (Тр. МИАН; Т. 231).

B. Olijnyk

SOME PROPERTIES OF FINITE ULTRAMETRIC SPACES

The spectrum of finite ultrametric spaces is studied. It is proved that every finite ultrametric space can be realized as a space with the tree metric. The proof is constructive.