Класифікація зліченних графів Кокстера відносно індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

Марія Когут, Лариса Тимошкевич

kgt.mariia@gmail.com, l.tymoshkevych@ukma.edu.ua
Національний університет «Киево-Могилянська академія»

Існує декілька підходів для розширення добре розвиненої спектральної теорії графів зі скінченного випадку на зліченний, у роботі прийнято підхід B. Mohar (див. [1]). Індекси графів мають широке коло застосувань, зокрема, у теорії представлень, де розглядаються умови існування наборів підпросторів гільбертового простору, зв'язаних певними умовами (див. [2]). Обмеження на індекс графа впливають на саму структуру графа, в багатьох випадках можна навіть навести повний перелік можливих графів з такими обмеженнями (див. [3, 4]).

Досліджена класифікація різних типів зліченних графів Кокстера зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Під терміном граф розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, в якій V – деяка непорожня множина (множина вершин), E – множина, яка складається з невпорядкованих пар різних елементів V (множина ребер).

Граф Кокстера $\mathbf{G}$ – це пара (G, f), де G – граф, f – відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, більших за 2, та символу ∞. Будемо казати, що G – граф, підпорядкований графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Для простоти сприймання граф Кокстера представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи над кожним ребром e число $f(e)$, яке називатимемо „позначкою" на ребрі. Прийнято опускати приписування на ребрах числа 3. Такі ребра називатимемо непозначеними, а ребра з позначкою, що більша або дорівнює 4, – позначеними.

Зліченний граф Кокстера – граф Кокстера зі зліченною множиною вершин. Для зручності будемо позначати множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{G}$ через $Fin(\mathbf{G})$.

Нагадаємо, що спектр квадратної матриці порядку n – це множина її власних значень. Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ скінченного графа $\mathbf{G}$ симетрична, то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ та розташуємо їх у незростаючому порядку $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Індексом графа називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$. Спектр матриці суміжності будемо називати спектром графа $\mathbf{G}$ і позначати $\sigma(\mathbf{G})$. Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин та є інваріантом графа. Позначимо характеристичний многочлен матриці суміжності через $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

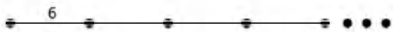
Індексом зліченного графа називаємо додатне число або символ ∞, визначені рівністю

$$ind\,\mathbf{G} = \sup_{\mathbf{\Gamma}\in Fin(\mathbf{G})} ind\,\mathbf{\Gamma}$$

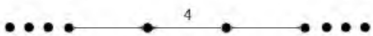
Теорема 1. *Нехай* $\mathbf{G}$ *– зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом* A_∞*, то*

1. *Якщо* $ind\,\mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$*, то* $\mathbf{G}$ *– граф виду:*

2. *Якщо* $ind\,\mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$*, то* $\mathbf{G}$ *– граф:*

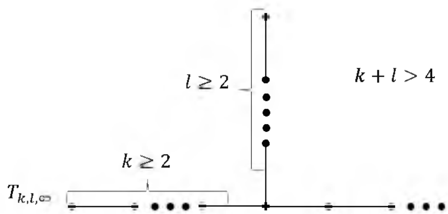


Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{G}$ *– зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом* $A_\mathbb{Z}$ *та його індекс належить проміжку* $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$*, тоді* $ind\,\mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ *та* $\mathbf{G}$ *– це граф:*



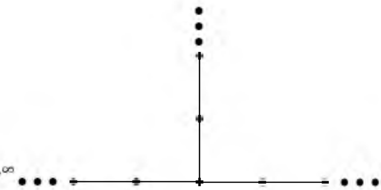
Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{G}$ *– зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими незваженими* T*-графами, то*

1. *Якщо* $ind\,\mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$*, то* G *– граф виду:*

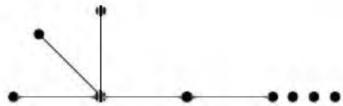


2. *Якщо* $ind\,\mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$*, то* G *– граф виду:*

$T_{\infty,\infty,\infty}$

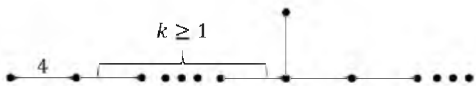


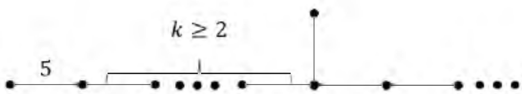
$T_{1,1,1,\infty}$



Теорема 4. *Нехай* $\mathbf{G}$ *– зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими графами* $T_{1,k,\infty}$ *з позначкою з краю, тоді*

1. *Якщо* $ind\,\mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, *то* $\mathbf{G}$ *– граф виду:*





2. *Якщо* $ind\,\mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, *то* $\mathbf{G}$ *– граф:*

Також наведемо твердження з властивостями зліченного графа Кокстера, у яких індекс належить проміжку проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Твердження 1. *Нехай* $\mathbf{G}$ *– зліченний зв'язний граф Кокстера та* $ind\,\mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, *тоді* $\mathbf{G}$ *має наступні властивості:*

1. *Може мати позначки лише строго менші за 7;*

2. *Може мати позначки 5 або 6 лише на ребрах, інцидентних висячій вершині;*
3. *Може мати щонайбільше одну позначку (більшу за 3);*
4. *Може мати лише вершини степеня строго меншого за 5;*
5. *Серед ребер, інцидентних вершині степеня 4, може бути лише одне, що інциденте не висячій вершині;*
6. *На ребрі, яке інцидентне вершині степеня 3, може бути лише позначка 4;*
7. *Якщо граф має вершину степеня 3, то може мати позначки лише строго менші за 6;*
8. *Не містить жодного циклу.*

Одержані результати є продовженням досліджень у роботах [4, 5].

1. Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite. Bull. London Math. Soc. – 1989. – vol. 21. – P. 209-234.
2. Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами Кокстера, Український математичний журнал. – 2014. – Том. 66, №9. – С.1185-1192.
3. Tymoshkevych L. M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2014. – випуск №1. – С. 27-33.
4. Коротков А.С., Тимошкевич Л.М. Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – №12. – С. 19-24.
5. Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ, 2015. – 160 с.