Пилипіва О.В.
бакалавр;
Тимошкевич Л.М.
кандидат фізико-математичних наук,
старший викладач,
Національний університет «Києво-Могилянська академія»

ВІДНОВЛЮЮЧЕ СПЕКТРАЛЬНЕ ЧИСЛО ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ-ЦИКЛІВ

Різноманітні задачі відновлення для графів посідають значне місце в спектральній теорії графів (див. [1; 2; 3]).

Наведемо деякі означення з теорії графів та спектральної теорії графів. **Означення 1.** *Зваженим графом* $\boldsymbol{G}$ називається така пара $(G$, w), де G – це простий граф, а w : E $\to (0, +\infty)$ – вагова функція, тобто відображення множини E $(G$) у множину додатних дійсних чисел.

Означення 2. *Спектр графа* $\sigma(\boldsymbol{G})$ – спектр матриці суміжності графа $\boldsymbol{G}$.

Означення 3. *Підспектром графа* $\boldsymbol{G}$ будемо називати спектр деякого індукованого підграфа $\boldsymbol{G}$.

Означення 4. *Відновлююче спектральне число* $Srn(G)$ – мінімальна кількість спектрів індукованих підграфів (тобто таких, що утворені видаленням деякої множини вершин графа G), за якими однозначно відновлюються ваги ребр вихідного графа.

Сформулюємо постановку задачі, яку надалі будемо досліджувати.

Постановка задачі. Нехай нам відомий довільний граф G. Ми хочемо однозначно відновити ваги кожного ребра зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$, тобто його вагову функцію w, за спектрами деяких його індукованих підграфів.

Лема. Відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа $\mathbf{G}$ за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.

Отже, для графів-циклів розглянемо задачу, що буде мати такі дві підзадачі: навести приклад такого набору підспектрів, за яким можна відновити усі ваги, та знайти $Srn(G)$.

Для зваженого графа, який є циклом, розв'яжемо поставлену задачу. Розглянемо три випадки: для циклу на трьох вершинах, на чотирьох вершинах та на n вершинах, де $n \geq 5$.

Відновимо ваги зваженого графа $\boldsymbol{C_3}$ (рис. 1), знаючи його структуру і підспектри, тобто спектри деяких його індукованих підграфів.

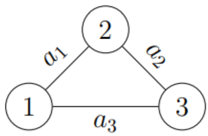

Рис. 1. C₃

Оскільки для кожного підграфа, що є по суті ребром, $P(\lambda) = \lambda^2 - a_i^2$, то за трьома підспектрами (рис. 2), можна відновити ваги на ребрах графа $\boldsymbol{C_3}$, тобто a_1, a_2, a_3.

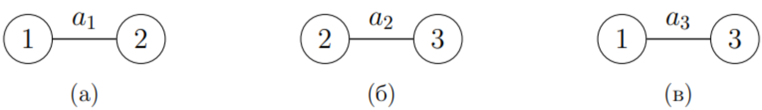

Рис. 2. Підграфи C_3

Чи можна відновити ваги графа C_3 тільки за двома підспектрами?

Для набору з двох підспектрів можна взяти спектр вихідного графа $\sigma(C_3)$ і спектр графа з видаленням однієї вершини: $\sigma(C_3 - i)$, де i — одна з трьох вершин. З видаленням вершини отримаємо ребро, за спектром якого можна відновити вагу одного ребра графа. Вагу інших двох ребр не можна однозначно відновити, тому $Srn(C_3) = 3$.

Знайдемо точне значення $Srn(C_4)$ для циклу на чотирьох вершинах (рис. 3). Очевидно, що його ваги можна відновити за чотирма підспектрами, що є його ребрами.

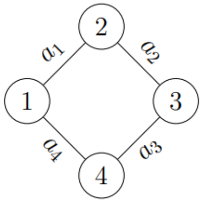

Рис. 3. C$_4$

Чи достатньо 3 підспектрів для відновлення усіх ваг $\boldsymbol{C_4}$?

Щоб відповісти на це питання, випишемо усі можливі варіанти з 3 підграфів:

1. C_4 і 2 графи A_2, що є суміжними ребрами у графі.
2. C_4 і 2 графи A_2, що є паралельними ребрами у графі.
3. C_4 і 2 графи A_3, що перетинаються.
4. C_4 і 2 графи A_3, що не перетинаються.
5. C_4 і A_3, A_2, що перетинаються.
6. C_4 і A_3, A_2, що не перетинаються.
7. 3 графи A_3.
8. 2 графи A_3, що перетинаються і A_2, що не входить у 2 графи A_3.
9. 2 графи A_3, що не перетинаються і A_2.
10. A_3 і 2 графи A_2.

Ми довели, що у кожному з десяти варіантів не можна відновити однозначно усі ваги, тому $Srn(C_4) = 4$.

Для зваженого графа $\boldsymbol{C_n} = (C_n, w)$, який є циклом (рис. 4), розглянемо поставлену задачу.

Пронумеруємо його вершини від 1 до n, тобто $V(C_n) = \{1,2, \dots, n\}$, вершина k суміжна з вершинами $k-1$ і $k+1$: $\forall k \in \{2, \dots, n-1\}$ і вершина n також суміжна з вершиною 1. Вагу ребра, що з'єднує i та $i+1$ вершини $\forall\, i \in \{1, \dots, n-1\}$, позначимо через a_i і вагу ребра $(n, 1)$ позначимо через a_n.

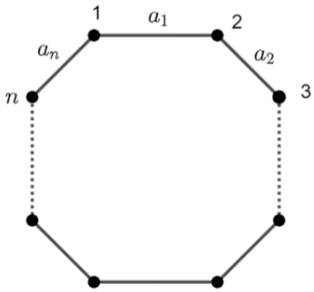

Рис. 4. C_n

Твердження. Для відновлення $\boldsymbol{C_n}$, $n \geq 5$ достатньо таких трьох підспектрів: $\sigma(\boldsymbol{C_n} - 2)$, $\sigma(\boldsymbol{C_n} - \{2{,}3\})$, $\sigma(\boldsymbol{C_n} - \{5, \dots, n\})$.

Список використаних джерел:

1. Cvetkovic D.M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 1975. 498–541. P. 45–48.

2. Hogben L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph. *Chamchuri Journal of Mathematics*. 2009. Vol. 1. No. 1. P. 51–72.

3. van Dam E.R., Haemers W.H. Which graphs are determined by their spectrum. *Linear Algebra and its Applications*. 2003. Vol. 373. P. 241–272.

4. Тимошкевич Л.М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2013. № 14. С. 165–175.

5. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера : дисертація канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ, 2015. 160 с.