УДК 517.5

Морозов Д. І.

СПРЯЖЕННІСТЬ ТРАНЗИТИВНО-СТАБІЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ У $FAutT_2$

Статтю присвячено дослідженню спряженності транзитивно стабільних автоморфізмів кореневого однорідного дерева валентності 2 у групі скінченно-станових автоморфізмів цього дерева. Побудовано перетин класу спряженності в цій групі, що містить автоморфізм adding machine, з множиною транзитивно стабільних автоморфізмів.

Ключові слова: кореневе дерево, автоморфізм дерева, група скінченно-станових автоморфізмів, спряженність автоморфізмів.

Відсутність на даний момент необхідної та достатньої умови спряженності автоморфізмів у групі скінченно-автоматних підстановок примушує при дослідженні рівняння спряженності використовувати певні достатні умови (наприклад, шарово-транзитивні автоморфізми a та b не спряжені, якщо фактор-послідовність для a періодична, а для b — не періодична, або якщо a та b мають різний ріст). Стабільно-транзитивні автоморфізми дуже близькі за своїми властивостями один до одного, тому цілий клас достатніх умов є не еффективний при дослідженні питання спряженності таких автоморфізмів. Пропонуємо підхід, який дає змогу побудувати перетин класу спряженності в групі скінченно-автоматних підстановок, що містить автоморфізм *adding machine* з множиною транзитивно стабільних автоморфізмів.

Означення 1. *Означимо фактор n-го рівня шарово-транзитивного автоморфізма*

$$a = (b, c) \circ \sigma$$

індуктивно. Фактором 1-го рівня для автоморфізму a називається автоморфізм $b \circ c$. Фактором n-го рівня автоморфізма a називається фактор 1-го рівня для фактора $(n-1)$-рівня автоморфізму a.

Означення 2. *Фактор-послідовністю для автоморфізму $a \in AutZ_2$ назвемо послідовність $\{a_n\}$ автоморфізмів, в якій a_n дорівнює фактору n-го рівня для автоморфізму a.*

Означення 3. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ транзитивно-стабільним, якщо фактор-послідовність для цього автоморфізму є стаціонарною.*

Рекурсивно означимо множини W_x та R_x для шарово-транзитивного автоморфізму $x \in AutT_2$.

Означення 4. *Тотожний автоморфізм id належить W_x. Нехай автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ або автоморфізм $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$ належить W_x. Тоді автоморфізм $x \circ t_2$ належить W_x.*

Означення 5. *Тотожний автоморфізм id належить R_x. Нехай автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ або автоморфізм $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$ належить R_x. Тоді автоморфізми t_1 та $x \circ t_2$ належать R_x.*

Легко бачити, що W_x належить R_x.

Приклад 1. *Обчислимо множини W_ε та R_ε для автоморфізма adding machine, що задається співвідношенням $\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$.*

Обчислимо W_ε. Згідно з рекурсивною процедурою разом з id множині W_ε належить автоморфізм ε. Далі з ε отримаємо ε^2, з ε^2 — ε^2. Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині W_ε немає. Отже, W_ε складається з автоморфізмів id, ε та ε^2.

Обчислимо R_ε. Згідно з рекурсивною процедурою разом з id множині R_ε належать автоморфізми id та ε. Далі з ε отримаємо id та ε^2, з ε^2 отримаємо ε та ε^2. Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині R_ε немає. Отже, R_ε складається з автоморфізмів id, ε та ε^2.

Означення 6. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ регулярним, якщо множина R_x — скінченна.*

Означення 7. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ слабко регулярним, якщо множина W_x — скінченна.*

Оскільки W_x належить R_x, то регулярний автоморфізм є слабко регулярним. Згідно з прикладом 1 автоморфізм *adding machine* ε регулярний.

Лема 1. *Автоморфізм $b \in AutT_2$ є транзитивно-стабільним тоді і тільки тоді, коли знайдеться $t \in AutT_2$, такий, що $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай $b = (t, l) \circ \sigma$. Оскільки b — транзитивно-стабільний, то $b = t \circ l$, отже $l = t^{-1} \circ b$.

$\Leftarrow$ $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$. Оскільки $t \circ t^{-1} \circ b = b$, то b — транзитивно-стабільний.

Теорема 1. *Нехай b — транзитивно-стабільний автоморфізм, що задається співвідношенням $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$. Тоді 0-розв'язком рівняння $\varepsilon^{\chi} = b$ є автоморфізм, що задається співвідношенням $a = (a, a \circ t)$*

Доведення. Зауважимо, що для автоморфізму $a = (a, a \circ t)$

$$...000 * a = ...000.$$

Справді,

$$x0 * (a, b) = (x * a)0.$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} a^{-1} \circ \varepsilon \circ a = (a, a \circ t)^{-1} \circ \varepsilon \circ (a, a \circ t) = \\ = (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ \sigma \circ (a, a \circ t) = \\ = (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ (a \circ t, a) \circ \sigma = \\ = (t, t^{-1} \circ (a^{-1} \circ \varepsilon \circ a)) \circ \sigma. \end{aligned}$$

Оскільки для шарово-транзитивних, а отже, і для стабільно-транзитивних автоморфізмів α та β, 0-розв'язок рівняння $\alpha^{\chi} = \beta$ існує і єдиний, то, згідно з зауваженням та отриманною рівністю, автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є 0- розв'язком рівняння $\varepsilon^{\chi} = b$.

Природнім є питання, при яких t автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є скінченно-становим. Умова скінченно-становості автоморфізму t необхідна. Справді, оскільки автоморфізм a скінченно-становий, то його права проекція $\pi_R(a) = a \circ t$ є скінченно-становим автоморфізмом, і тому автоморфізм

$$t = a^{-1} \circ (a \circ t) = a^{-1} \circ \pi_R(a)$$

також скінченно-становий. Але ця умова не є достатньою. Це підтверджують наступні теорема та приклад:

Теорема 2. *Автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є скінченно-становим тоді і тільки тоді, коли t — регулярний.*

Доведення. Нехай $\pi_L(a)$ — ліва, а $\pi_R(a)$ — права проекція автоморфізму $a = (a, a \circ t)$. Тоді виконуються рівності:

$$\pi_L(a \circ f) = a \circ \pi_L(f);$$

$$\pi_R(a \circ f) = a \circ (t \circ \pi_R(f)).$$

Тобто станами автоморфізму a є автоморфізми вигляду $\{a \circ x | x \in R_t\}$. Тому a скінченно-становий тоді і тільки тоді, коли множина R_t є скінченною.

Приклад 2. *Автоморфізм $a = (a, a \circ 3x)$ не скінченно-становий.*

Покажемо, що множина W_{3x} — нескінченна. Справді, вона містить нескінченну кількість автоморфізмів вигляду $3^n x + c_n$. Отже, автоморфізм $x * t = 3x$ є скінченно-становим (зі станами $3x, 3x + 1, 3x + 2$), але не є слабко-регулярним, тому не є і регулярним. За теоремою 2 автоморфізм $a = (a, a \circ 3x)$ — нескінченно-становий.

Наслідком теорем 1 і 2 є наступна теорема:

Теорема 3. *Нехай b — транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм t — ліва проекція автоморфізма b. Автоморфізми ε та b спряженні в $FAutT_2$ тоді і тільки тоді, коли t — регулярний.*

Далі сформулюємо критерій скінченно-становості для транзитивно-стабільних автоморфізмів.

Теорема 4. *Нехай b — транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм t — ліва проекція автоморфізма b. Автоморфізм b є скінченно-становим тоді і тільки тоді, коли t — слабко регулярний.*

Доведення. Очевидно, b та b^{-1} мають однакову кількість станів. Покладемо

$$b' = b^{-1} = (b^{-1} \circ t, t^{-1}) \circ \sigma.$$

Кожен стан b' з вершиною, що належить кінцю $\ldots 000$ має вигляд

$$b' \circ x \mid x \in W_t.$$

Якщо множина W_t — скінчена, то інші стани мають вигляд

$$t^{-1} \circ t_1 \circ \ldots \circ t_N$$

(де t_i є підстанами автоморфізму t і кількість доданків обмежена деяким натуральним N, що залежить від $|W_t|$), або є підстанами таких станів.

Отже, b є скінченно-становим тоді і лише тоді, коли множина W_t скінчена.

Як було зауважено, регулярний автоморфізм є слабко регулярним. Цікаво отримати приклад слабко регулярного автоморфізму, який не є регулярним. Згідно з теоремами 3 та 4 такий автоморфізм дає змогу побудувати приклад скінченно-станового стабільно-транзитивного автоморфізму, що не є спряженим з *adding machine* у $FAutT_2$. Побудувати слабко регулярний автоморфізм, який не є регулярним дає можливість наступна теорема.

Теорема 5. *Скінченно-становий автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ є слабко регулярним тоді і тільки тоді, коли автоморфізм t_2 є слабко регулярним.*

Доведення. Достатньо звернути увагу на те, що

$$W_t = \{id, t, t \circ t_2, \ldots\} = id \cup \{t \circ x | x \in W_{t_2}\}.$$

Тобто множини W_t та W_{t_2} скінченні або нескінченні одночасно.

Приклад 3. *Згідно з прикладом 2 автоморфізм $t' : x \to 3x$ не є регулярним, автоморфізм id є слабко регулярним. Тому автоморфізм $t = (3x, id)$ є слабко-регулярним автоморфізмом, що не є регулярним.*

Маємо приклад двох транзитивно-стабільних скінченно-станових автоморфізмів, не спряжених у $FAutT_2$:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma;$$

$$b = ((3x, id), (\frac{1}{3}x, id) \circ b) \circ \sigma.$$

Сформулюємо основний результат. Перетин множини транзитивно-стабільних автоморфізмів із класом спряженності в групі скінченно-станових автоморфізмів, що містить *adding machine*, складається з транзитивно-стабільних автоморфізмів із регулярною лівою проекцією.

Список літератури

1. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции / Н. Коблиц — М. : Мир, 1982. — 190 с.
2. Морозов Д. І. Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченностанових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева / Д. І. Морозов // Вісник Київського ун-ту. Серія : фізико-математичні науки. — 2008. — Вип. 1 — С. 40–43.
3. Морозов Д. І. Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності p / Д. І. Морозов // Вісник Київського ун-ту. Серія : фізико-математичні науки. — 2007. — Вип. 4 — С. 52–54.

D. Morozov

CONJUGACY OF TRANSITIVE-STABLE AUTOMORPHISMS IN $FAutT_2$

The work is devoted to the research of conjugacy of transitive-stable automorphisms of a rooted homogenious tree of valency 2 in a group of finite-state automorphisms of this tree. The intersection of the conjugacy class in this group has been built, containing adding machine automorphism, with the set of transitive-stable automorphisms.

Keywords: rooted tree, tree automorphism, group of finite-state automorphisms, automorphisms conjugacy.

Матеріал надійшов 02.04.2012