

## НЕШІВСЬКА РІВНОВАГА В ІГРАХ З РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛУ

П.О. ГЛУХОВСЬКИЙ

Гра видобутку ресурсів належить до класу динамічних ігор. Вона реалізується покроково в дискретні моменти часу  $t = 1, 2, 3, \dots$ . На кожному з цих етапів гравці незалежно один від одного, водночас приймають рішення. Розглядається модель гри видобутку ресурсів із недослідженого досі класу, а саме гра із довільною кількістю частиників, необмеженим простором станів та необмеженими функціями корисності гравців, а також законом переходу між станами, визначеним як стохастичний процес, що залежить від спільної інвестиції гравців.

Опис розглянутої симетричної гри видобутку ресурсів з  $m$  гравцями ( $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ ):

(i) Кількість учасників є сталою протягом усієї гри. Кожен гравець іменується номером від 1 до  $m$ .

(ii) Об'єм доступного в момент часу  $t \in T$  ресурсу, доступного для використання, називається станом гри в момент  $t$  і позначається  $s_t$ . Множина всіх можливих обсягів ресурсу називається простором станів і дорівнює  $S = [0; +\infty)$ .

(iii) Гравці незалежно один від одного приймають рішення на кожному з етапів  $t \in T$ . Простір рішень, доступних для кожного гравця, залежить від поточного стану гри  $s_t \in S$  і дорівнює  $A(s_t) = [0; s_t/m]$ .

(iv) Миттєвою корисністю кожного гравця, є неперервна зростаюча функція  $u : S \rightarrow [0; +\infty)$ ,  $u(x) = c \log_a(x)$

(v) Закон переходу між станами є стохастичним, і задається рівнянням стану  $s_{t+1} = M(s_t, \bar{a}_t, \xi_t)$ , де  $M$  - неперервна функція, залежна від стану гри  $s_t \in S$  та вектору рішень гравців  $\bar{a}_t$ ) в момент часу  $t \in T$ , а також від випадкового збурення  $\xi_t$ , причому в припущенні моделі кожен наступний стан гри є лінійним перетворенням залишку від наявного ресурсу з мультиплікативним випадковим збуренням, що має однаковий розподіл на кожному кроці гри, тобто:  $s_{t+1} = y_t \cdot \xi_t$ , де  $s_t \in [0; +\infty)$  - значення стану в момент  $t \in \mathbb{N}$ ,  $y_t \in [0; s_t]$  - спільна інвестиція гравців на етапі  $t$ , а  $\xi_t \in [0; +\infty)$  є незалежною реалізацією певної випадкової величини на етапі  $t$ . Розглядається випадок, коли спільна інвестиція визначається як кількість ресурсу, що залишається на поточному етапі гри після видобутку агентами обумовлених власними рішеннями часток  $y_t = (s_t - \sum_{i=1}^m a_{ti})$

(vi) Усі гравці мають однаковий дисконтуєчий множник  $\beta \in (0; 1)$ .

(vii) Загальний виграш гравця  $i \in [m]$  дорівнює  $\sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(a_{ti})$ , де  $a_{ti}$  —  $i$ -та координата вектора  $\bar{a}_t$ .

Додатково у запропонованій моделі передбачається, що  $\beta [\log_a(\xi)] < 1$  - природня умова для обмеження швидкості зростання ресурсу. Завдяки цій додатковій умові, очікуваний дисконтований виграш кожного гравця при грі із нескінченним горизонтом є обов'язково збіжним, що забезпечує коректність та доцільність розгляду задачі.

Для запропонованої моделі знаходяться умови, при яких гра має Ідеальну Симетричну Марковську Рівновагу. Зокрема, для її наявності потрібно, щоб  $\beta c > 1$ . Також показано, що вона є соціально-оптимальною, однак не оптимальною за Парето.

Ключові слова: стохастичні ігри з ненульовою сумою, видобуток ресурсів, накопичення капіталу, стаціонарна рівновага за Нешем, Марковська ідеальна рівновага, логарифмічна функція корисності, геометричне випадкове блукання, дискретний час, дисконтований виграш, кооперативна теорія ігор.

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Силенко І. В. *Марковська Ідеальна Рівновага у грі видобутку ресурсів зі степеневими перевагами агентів : дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю "Прикладна математика"* / Силенко Ілля Володимирович ; науковий керівник: Чорней Р. К. ; Національний університет "Києво-Могилянська академія". — Київ: НаУКМА, 2023. — 186 с.
- [2] Balbus, L., Nowak, A. S. *Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation.* // Automatica. — 2008. — Vol. 44, no. 6. — P. 1471–1479.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ", Київ, Україна  
*Email address:* p.hlukhovskiy@ukma.edu.ua