Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

Поліноми Фабера та їх властивості

Текстова частина до курсової роботи за спеціальністю „Прикладна математика” 113

Керівник курсової роботи
О. І. Кашпіровський
Виконав студент
І. А. Бабін

Київ
2020

Зміст

Календарний план

№ п/п	Назва етапу	Термін виконання	Примітка
1	Отримання завдання	01.10.2019	
2	Огляд літератури	5.11.2019	
3	Реалізація першого алгоритма	1.12.2019	
4	Теоретично отримати алгоритм	15.01.2020	
5	Довести алгоритм	01.02.2020	
6	Реалізація алгоритма	01.03.2020	
7	Тестування алгоритмів	01.04.2020	
8	Аналіз отриманих результатів з керівником	01.04.2020	
9	Написання КР	15.04.2020	
10	Створення презентації	20.04.2020	
11	Відправлення роботи на перевірку на плагіат	01.05.2020	
12	Захист КР	05.2020	

Вступ

Нехай $K \subset \mathbb{C}^1$ - допустимий континіум, тобто замкнена обмежена множина, яка має однозв'язне доповнення $\mathbb{C}K = \mathbb{C}^1 \setminus K$.
$w = \Phi(z)$ - конформне відображження $\mathbb{C}^1 \setminus K$ у зовнішність деякого круга $\{w : |w| > R\}$ такого, що

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1$$

В околі нескінченно віддаленної точки ∞, $\Phi(z)$ допускає розвинення в ряд Лорана.

$$\Phi(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4} + c_5 z^{-5} + ... \tag{1}$$

В 1903 році Г. Фабер розглянув послідовність поліномів $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, які названі поліномами Фабера контініума K. $\Phi_n(z)$ визначається як поліноміальна частина n - го степеня функції $\Phi(z)$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\Phi^n(\xi) d\xi}{\xi - z}, n \in N$$

Замкнений контур γ містить континіум K. Точки z також беруться із внутрішньої частини контуру γ.
Для довільної функції $f(z)$ неперервній на γ позначимо інтеграл Коші

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \text{ символом } [f(z)], \text{ тоді}$$

$$\Phi_n(z) = [\Phi^n(z)], n \in N$$

Задача пошуку поліномів Фабера є в загальному вігляді достатньо складною навіть для випадків, коли функцію $\Phi(z)$ можна знайти в явному вигляді.
Дана робота присвячена алгоритму пошуку поліномів Фабера та програмної реалізації цих алгоритмів за умови, що ми можемо знайти явну формулу для коефіцієнтів у розкладі цієї функції в ряд Лорана.

1. Опис алгоритмів

1.1. За означенням

Цей алгоритм знаходження поліномів Фабера базується на означенні. Тобто нехай нам задані коефіцієнти при від'ємних степенях c_i з (1), тоді задача зводиться до того, що нам потрібно піднести цей поліном до n - го степеня і взяти лише поліноміальну частину

$$\Phi_n(z) = [(z + c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + ...)^n]$$

Твердження 1.1. *Достатньо піднести поліном до z^{-n+1}, щоб отримати поліном Фабера*

Доведення.

$$(z + c_0 + c_1 z^{-1} + ... + c_i z^{-i})(z + c_0 + c_1 z^{-1} + ... + c_i z^{-i})...(z + c_0 + c_1 z^{-1} + ... + c_i z^{-i})$$

Якщо взяти з першого множника $c_i z^{-i}$, то найбільший степінь, який ми можемо отримати буде $-i+n-1$, тобто з наступних ми беремо z. Тому, якщо взяти z^{-n} степень, то отримаємо z^{-1}, що не буде вносити зміни до результату, оскільки частина з від'ємними степенями відкидається. $\square$

Далі беремо многочлен і $n-1$ раз множимо на цей самий многочлен, після цього відкидаємо від'ємні степені цього полінома.

1.2. Через властивість

Цей спосіб базується на властивості, доведення якої можна подивитися тут [2]

$$[\frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}\Phi_n^{'}(z)] = n\Phi_n(z) \tag{2}$$

Спочатку потрібно знайти розклад $\Phi(z)$ в ряд, використовуючи відомі розклади або їх комбінації. Далі потрібно розділити $\Phi(z)$ на $\Phi^{'}(z)$.

Твердження 1.2.

$$\Omega(z) := \frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)} = z + b_0 + b_1 z^{-1} + ..., \text{ де } b_i \in \mathbb{C} \tag{3}$$

Доведення.

$$\Phi(z) = \Omega(z)\Phi^{'}(z) \tag{4}$$

Старший степінь полінома $\Phi(z)$ буде 1, старший степінь полінома $\Phi^{'}(z)$ буде 0.
Припустимо, що старший степінь многочлена $\Omega(z)$ буде $i > 1$, тоді старший степінь полінома справа — i, що є протиріччям, оскільки зліва старший степінь — 1. $\square$

Для знаходження коефіцієнтів цього ділення можна використати метод невизначених коефіцієнтів, а саме:

$$\Phi(z) = \Omega(z)\Phi^{'}(z)$$
$$\Omega(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}...$$

Твердження 1.3.

$$b_i = (i+1)c_i + \sum_{j=1}^{i-1} j b_{i-j-1} c_j \tag{5}$$

Доведення. З формули (4)

$$(z + c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4}) =$$
$$(z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}) *$$
$$*(1 - c_1 z^{-2} - 2c_2 z^{-3} - 3c_3 z^{-4} - 4c_4 z^{-5} - 5c_5 z^{-6})$$

Два многочлени рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при відповідних степенях рівні

$$c_0 = b_0$$

$$c_1 z^{-1} = 1b_1 z^{-1} - c_1 z^{-2} z \leftrightarrow b_1 = 2c_1$$

$$c_2 z^{-2} = b_2 z^{-1} - 2c_2 z^{-3} z - b_0 c_1 z^{-2} \leftrightarrow$$
$$b_2 = 3c_2 + b_0 c_1$$

$$c_4 z^{-4} = b_4 z^{-4} - 3c_3 z^{-4} z - 3b_0 c_3 z^{-4} - 2b_1 z^{-1} c_2 z^{-3} - b_2 z^{-2} c_1 z^{-2} \leftrightarrow$$
$$b_4 = 5c_4 + b_2 c_1 + 2b_1 c_2 + 3b_0 c_3$$

$$b_i = (i+1)c_i + b_{i-2} c_1 + 2b_{i-3} c_2 + 3b_{i-4} c_3 + ... + (i-1)b_0 c_{i-1}$$

$(i+1)c_i$ з'являється внаслідок множення $b_i z^{-i}$ на 1 і віднімання $ic_i z^{-i-1}$, помноженного на z. Наступні доданки є комбінацією множників з $\Omega(z)$ та $\Phi'(z)$, які дають в сумі $-i$ степінь □

Використовуючи доведенну формулу, знаходимо від b_1 до b_{n-1}.
Далі формула (2) перетворюється на:

$$\Omega(z)(\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k z^{k-1}) = n(z^n + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k) \tag{6}$$

Твердження 1.4.

$$\alpha_i = (\sum_{k=1}^{n-i} (i+k) * \alpha_{i+k} * b_{k-1})/(n-i) \tag{7}$$

Доведення. З (6):

$$5(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + z^5) =$$
$$(z + b_0 + b_1^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}) *$$
$$*(a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^4)$$

Так само прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$5a_4 z^4 = 4a_4 z^4 + 5b_0 z^4$$
$$5a_3 z^3 = 3a_3 z^3 + 4a_4 b_0 z^3 + 5b_1 z^3$$
$$5a_2 z^2 = 2a_2 z^2 + 3a_3 b_0 z^2 + 4a_4 b_1 z^2 + 5b_2 z^2$$

Неважко помітити закономірність:

$$na_i = ia_i + (i+1)a_{i+1} b_0 + (i+2)a_{i+2} b_1 + ... + (n-1)a_{n-1} b_{n-i-1} + nb_{n-i-1}$$

□

Використовуючи (7), знаходимо коефіцієнти від α_{n-1} до α_0 полінома $\Phi_n(z)$

2. Приклади знаходжень

2.1. Знаходження для квадрату

2.1.1. Опис множини та функції

Множина K представляє собою внутрішність квадрата з вершинами в точках: $(1, 0), (-1, 0), (0, i), (0, -i)$

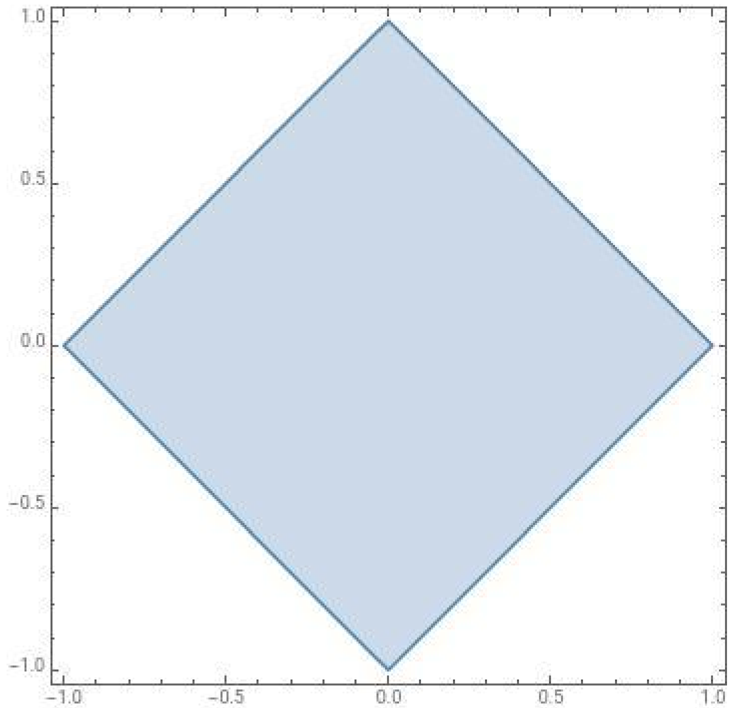

Рис. 2.1. квадрат у комплексній площині

У випадку такої множини функція $\Phi(z)$ має такий вигляд[3]:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} \sqrt{1 - \xi^{-4}} d\xi$$

2.1.2. Розклад функції в ряд

Дану функцію можно розкласти використовуючи розклад функції $(1 + x)^{\alpha}$:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}{4!} x^4 + ...$$

$$\Phi^{'}(z) = 1 - \frac{1}{4} z^{-4} - \frac{3}{32} z^{-8} - \frac{7}{128} z^{-12} - \frac{77}{2048} z^{-16} ...$$

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} \Phi^{'}(\xi) d\xi = z + \frac{1}{12} z^{-3} + \frac{3}{224} z^{-7} + \frac{7}{1408} z^{-11} + \frac{77}{30720} z^{-15} ...$$

2.1.3. Знаходження перших $\Phi_i(z)$

Знаходження Ω за (5)

$$z(1+\frac{1}{12}z^{-4}+\frac{3}{224}z^{-8}+\frac{7}{1408}z^{-12}+\frac{77}{30720}z^{-16}+...)=z(1+b_0z^{-1}+b_1z^{-2}+b_2z^{-3}+b_3z^{-4}$$
$$+b_4z^{-5}+b_5z^{-6}+b_6z^{-7}+b_7z^{-8}...)(1-\frac{1}{4}z^{-4}-\frac{3}{32}z^{-8}-\frac{7}{128}z^{-12}-\frac{77}{2048}z^{-16}...)$$

Отримаємо такі рівняння:

$$b_0=0, b_1=0, b_2=0$$
$$\frac{1}{12}=b_3-\frac{1}{4}\leftrightarrow b_3=\frac{1}{3}$$
$$b_4=0, b_5=0, b_6=0$$
$$\frac{3}{224}=b_7-\frac{3}{32}-\frac{b_3}{4}\leftrightarrow b_7=\frac{4}{21}$$
$$b_8=0, b_9=0, b_10=0$$
$$\frac{7}{1408}=b_{11}-\frac{7}{128}-\frac{3b_3}{32}-\frac{b_7}{4}\leftrightarrow b_{11}\approx 0.138528$$

Знаходження перших Φ_i за (6)

$$(z+\frac{z^{-3}}{3}+\frac{4z^{-7}}{21}+0.138528z^{-11}+...)(\alpha_1+2\alpha_2z+3\alpha_3z^2...+5\alpha_5x^4+...+9\alpha_9z^8+...+13\alpha_{13}z^{12})=$$
$$n(\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2...)$$

Φ_1:

$$(\alpha_0+z)=(z+\frac{z^{-3}}{3}+\frac{4z^{-7}}{21}+...)$$
$$\alpha_0=0$$
$$\Phi_1(z)=z$$

Φ_2:

$$2(\alpha_0+\alpha_1z+z^2)=(\alpha_1+2z)(z+\frac{z^{-3}}{3}+\frac{4z^{-7}}{21}+...)$$
$$\alpha_0=0$$
$$2\alpha_1=\alpha_1\leftrightarrow\alpha_1=0$$
$$\Phi_2(z)=z^2$$

Φ_3:

$$3(\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2+z^3)=(\alpha_1+2\alpha_2z+3z^2)(z+\frac{z^{-3}}{3}+\frac{4z^{-7}}{21}+...)$$
$$\alpha_0=0$$
$$3\alpha_1=\alpha_1\leftrightarrow\alpha_1=0$$
$$3\alpha_2=2\alpha_2\leftrightarrow\alpha_2=0$$
$$\Phi_3(z)=z^3$$

Φ_4:

$$4(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + z^4) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^2 + 4z^3)(z + \frac{z^{-3}}{3} + \frac{4z^{-7}}{21} + ...)$$

$$4\alpha_0 = \frac{4}{3}$$

$$4\alpha_1 = \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0$$

$$4\alpha_2 = 2\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0$$

$$4\alpha_3 = 3\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\Phi_4(z) = z^4 + \frac{1}{3}$$

Знаходження за означенням
$\Phi_1(z)$:

$$\Phi_1(z) = [\Phi^1(z)] = z$$

$\Phi_2(z)$:

$$\Phi_2(z) = [\Phi^2(z)] = [z^2] = z^2$$

$\Phi_3(z)$:

$$\Phi_3(z) = [\Phi^3(z)] = z^3$$

$\Phi_4(z)$:

$$\Phi_4(z) = [\Phi^4(z)] = [(z + 0.8333z^{-3})^4] = [(z^2 + 0.1666z^{-2} + 0.006944z^{-6})^2] = [z^4 + 0.333 + 0.0416666692z^{-4} + 0.0023148150z^{-8} + 0.0000482253z^{-12}] = z^4 + 0.333$$

2.1.4. Результати програми

$$\Phi_1(z) = z$$

$$\Phi_2(z) = z^2$$

$$\Phi_3(z) = z^3$$

$$\Phi_4(z) = z^4 + 0.333333$$

$$\Phi_{20}(z) = z^{20} + 1.66667z^{16} + 1.5873z^{12} + 1.18326z^8 + 0.793376z^4 + 0.516064$$

$$\Phi_{50}(z) = z^{50} + 4.16667z^{46} + 9.17659z^{42} + 14.3255z^{38} + 17.9351z^{34} + 19.3126z^{30} + 18.7227z^{26} + 16.8769z^{22} + 14.484z^{18} + 12.0451z^{14} + 9.83384z^{10} + 7.95729z^6 + 6.42491z^2$$

2.2. Знаходження для прямої

2.2.1. Опис множини та функції

Множина K представляє собою відрізок прямої з точки $(-1, 0)$ до $(1, 0)$. У випадку такої множини функція $\Phi(z)$ має такий фигляд[1]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{1}{2}z(1 + \sqrt{1 + z^{-2}})$$

2.2.2. Розклад функції в ряд

Дану функцію можна розкласти використовуючи розклад функції $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + ...$$
$$(1+z^{-2})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-4} + \frac{1}{16}z^{-8} - \frac{5}{128}z^{-8} + ...$$
$$\Phi(z) = z + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{16}z^{-3} + \frac{1}{32}z^{-5} - \frac{5}{256}z^{-7} + ...$$
$$\Phi'(z) = 1 - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{3}{16}z^{-4} - \frac{5}{32}z^{-6} + \frac{35}{256}z^{-8} - ...$$

2.2.3. Знаходження перших $\Phi_i(z)$

Знайдемо коефіцієнти для функції Ω:

$$z(1 + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{16}z^{-4} + \frac{1}{32}z^{-6} - \frac{5}{256}z^{-8} + ...) = z(1 + b_0z^{-1} + b_1z^{-2} + b_2z^{-3} + b_3z^{-4}$$
$$+b_4z^{-5} + b_5z^{-6} + b_6z^{-7} + b_7z^{-8}...)(1 - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{3}{16}z^{-4} - \frac{5}{32}z^{-6} + \frac{35}{256}z^{-8} + ...)$$

Отримаємо такі рівняння:

$$b_0 = 0$$
$$\frac{1}{4} = b_1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow b_1 = \frac{1}{2}$$
$$b_2 = 0$$
$$-\frac{1}{16} = b_3 + \frac{3}{16} - \frac{b_1}{4} \Leftrightarrow b_3 = -\frac{1}{8}$$
$$b_4 = 0$$
$$\frac{1}{32} = b_5 - \frac{5}{32} - b_3\frac{1}{4} + b_1\frac{3}{16} \Leftrightarrow b_5 = \frac{1}{16}$$
$$b_6 = 0$$

Знаходження перших Φ_i за (6)

$$(z + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-5} + ...)(\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^2 + 4\alpha_4 z^3 + 5\alpha_5 z^4 + 6\alpha_6 z^5 + 7\alpha_7 z^6) =$$
$$n(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^4 ...)$$

Φ_1:

$$(\alpha_0 + z) = (z + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-5} + ...)$$
$$\alpha_0 = 0$$
$$\Phi_1(z) = z$$

Φ_2:

$$2(\alpha_0 + \alpha_1 z + z^2) = (\alpha_1 + 2z)(z + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-5} + ...)$$
$$2\alpha_0 = 1 \leftrightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2}$$
$$2\alpha_1 = \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\Phi_2(z) = z^2 + \frac{1}{2}$$

Φ_3:

$$3(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + z^3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3z^2)(z + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-5} + ...)$$
$$3\alpha_2 = 2\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0$$
$$3\alpha_1 = \alpha_1 + \frac{3}{2} \leftrightarrow \alpha_1 = \frac{3}{4}$$
$$3\alpha_0 = 2\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_0 = 0$$
$$\Phi_3(z) = z^3 + \frac{3}{4}z$$

Φ_4:

$$4(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + z^4) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^2 + 4z^3)(z + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-5} + ...)$$
$$4\alpha_3 = 3\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0$$
$$4\alpha_2 = 2\alpha_2 + 2 \leftrightarrow \alpha_2 = 1$$
$$4\alpha_1 = \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_1 = 0$$
$$4\alpha_0 = \alpha_2 - \frac{1}{2} \leftrightarrow \alpha_0 = \frac{1}{8}$$
$$\Phi_4(z) = z^4 + z^2 + \frac{1}{8}$$

Знаходження за означенням $\Phi_1(z)$:

$$\Phi_1(z) = [\Phi^1(z)] = z$$

$\Phi_2(z)$:

$$\Phi_2(z) = [\Phi^2(z)] = [(z + 0.25z^{-1})(z + 0.25z^{-1})] = [z^2 + 0.5 + 0.0625z^{-2}] = z^2 + 0.5$$

$\Phi_3(z)$:

$$\Phi_3(z) = [\Phi^3(z)] = [(z + 0.25z^{-1})(z + 0.25z^{-1})(z + 0.25z^{-1})] =$$
$$[(z^2 + 0.5 + 0.0625z^{-2})(z + 0.25z^{-1})] = [z^3 + 0.75z + 0.1875z^{-1} + 0.015625z^{-3}] = z^3 + 0.75z$$

$\Phi_4(z)$:

$$\Phi_4(z) = [\Phi^4(z)] = [(z + 0.25z^{-1} - 0.0625z^{-3})^4] =$$
$$[(z^2 + 0.5 - 0.0625z^{-2})^2] = [z^4 + z^2 + 0.125 - 0.125z^{-2} - 0.01953125z^{-4}...] = z^4 + z^2 + 0.125$$

2.2.4. Результати програми

$$\Phi_1(z) = z$$
$$\Phi_2(z) = z^2 + \frac{1}{2}$$
$$\Phi_3(z) = z^3 + \frac{3}{4}z$$
$$\Phi_4(z) = z^4 + z^2 + \frac{1}{8}$$
$$\Phi_{20}(z) = z^{20} + 5z^{18} + 10.625z^{16} + \\ 12.5z^{14} + 8.8867187500z^{12} + 3.9101562500z^{10} + \\ 1.0473632812z^8 + 0.1611328125z^6 + 0.0125885010z^4 + 0.0003814697z^2 + \\ 0.0000019073$$

2.3. Знаходження для овала Косіні

2.3.1. Опис множини та функції

Множина K представляє собою внутрішність перевернутої вісьмірки, так званого овала Косіні[1]

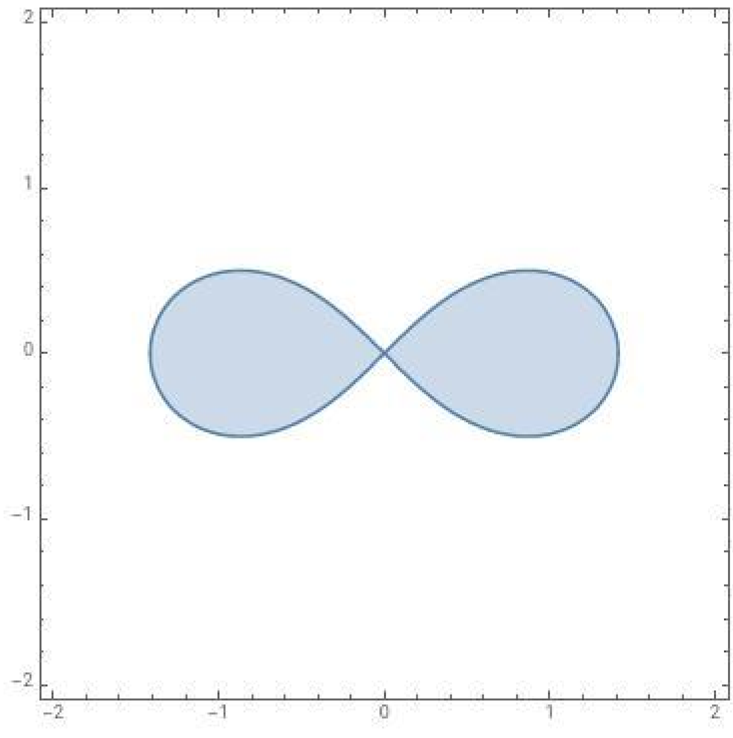

Рис. 2.2. овал Косіні

У випадку такої множини функція $\Phi(z)$ має такий вигляд:

$$\Phi(z) = \sqrt{z^2 - 1} = z\sqrt{1 - z^{-2}}$$

2.3.2. Розклад функції в ряд

Дану функцію можно розкласти використовуючи розклад функції $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + ...$$
$$\Phi(z) = z - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-5} - \frac{5}{128}z^{-7} + ...$$

2.3.3. Знаходження перших $\Phi_i(z)$

Знаходження Ω за (5)

$$z(1 - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-4} - \frac{1}{16}z^{-6} - \frac{5}{128}z^{-8} - ...) = z(1 + b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3} + b_3 z^{-4}$$
$$+ b_4 z^{-5} + b_5 z^{-6} + b_6 z^{-7} + b_7 z^{-8} ...)(1 + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{3}{8}z^{-4} + \frac{5}{16}z^{-6} + \frac{35}{128}z^{-8} + ...)$$

Отримаємо такі рівняння:

$$b_0 = c_0 = 0$$
$$b_1 = 2c_1 = -1$$
$$b_2 = 3c_2 = 0$$
$$b_3 = 4c_3 + b_1 c_1 + 2b_0 c_2 = 0$$
$$b_4 = 5c_4 + b_2 c_1 + 2b_1 c_2 + 3b_0 c_3 = 0$$
$$b_5 = 6c_5 + b_3 c_1 + 2b_2 c_2 + 3b_1 c_3 + 4b_0 c_4 = 0$$
$$b_6 = 7c_6 + b_4 c_1 + 2b_3 c_2 + 3b_2 c_1 ... = 0$$
$$b_7 = 0$$
$$b_8 = 0$$

Знаходження перших Φ_i за (6)

$$(z - z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + ...0z^{-8}...)(\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^2 ... + 5\alpha_5 x^4 + ... + 9\alpha_9 z^8 + ... + 13\alpha_{13} z^{12}) =$$
$$n(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 ...)$$

Φ_1:

$$(\alpha_0 + z) = (z - z^{-1} + ...)$$
$$\alpha_0 = 0$$
$$\Phi_1(z) = z$$

Φ_2:

$$2(\alpha_0 + \alpha_1 z + z^2) = (\alpha_1 + 2z)(z - z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + ...0z^{-8} + ...)$$
$$2\alpha_0 = 2 \leftrightarrow \alpha_0 = 1$$
$$2\alpha_1 = \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\Phi_2(z) = z^2$$

Φ_3:

$$3(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + z^3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3z^2)(z - z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + ...0z^{-8} + ...)$$
$$\alpha_0 = 2\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_0 = 0$$
$$3\alpha_1 = \alpha_1 - 3 \leftrightarrow \alpha_1 = -1.5$$
$$3\alpha_2 = 2\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0$$
$$\Phi_3(z) = z^3 - 1.5z$$

Φ_4:

$$4(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + z^4) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^2 + 4z^3)(z - z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + ...0z^{-8} + ...)$$
$$4\alpha_0 = 2\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_0 = 1$$
$$4\alpha_1 = \alpha_1 + 3\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_1 = 0$$
$$4\alpha_2 = 2\alpha_2 - 4 \leftrightarrow \alpha_2 = -2$$
$$4\alpha_3 = 3\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0$$
$$\Phi_4(z) = z^4 - 2z^2 + 1$$

Знаходження за означенням

$\Phi_1(z)$:

$$\Phi_1(z) = [\Phi^1(z)] = z$$

$\Phi_2(z)$:

$$\Phi_2(z) = [\Phi^2(z)] = [(z^2 - 1 + 0.25z^{-2})^2] = z^2 - 1$$

$\Phi_3(z)$:

$$\Phi_3(z) = [\Phi^3(z)] = [(z - 0.5z^{-1})^3] =$$
$$[(z^3 - 1.5z + 0.75z^{-1} - 0.125z^{-3})(z - 0.5z^{-1})] = z^3 - 1.5z$$

$\Phi_4(z)$:

$$\Phi_4(z) = [\Phi^4(z)] = [(z - 0.5z^{-1} - 0.125z^{-3})^4] = [(z^3 - 1.5z + 0.375z^{-1}+$$
$$0.25z^{-3} - 0.046875z^{-5} - 0.0234375z^{-7} - 0.00195312z^{-9})^2] = z^4 - 2z^2 + 1$$

2.3.4. Результати програми

$$\Phi_1(z) = z$$
$$\Phi_2(z) = z^2 - 1$$
$$\Phi_3(z) = z^3 - 1.5z$$
$$\Phi_4(z) = z^4 - 2z^2 + 1$$
$$\Phi_{20}(z) = z^{20} - 10z^{18} + 45z^{16} - 120z^{14} + 210z^{12} - 252z^{10} + 210z^8 -$$
$$120z^6 + 45z^4 - 10z^2 + 1$$

3. Порівняння алгоритмів

Обидва алгоритма реалізовані використовуючи мову програмування с++
Оскільки обидва алгоритми спираються на те, що нам відомий розклад $\Phi(z)$ в ряд Лорана, то і програма спирається на те, що задана така функція, що повертає коєфіціент при $-i$ - ому степені.

3.1. Алгоритм за означенням

Даний спосіб є досить простим для розуміння та програмної реалізації.
Оскільки для отримання n - го полінома Фабера досить взяти поліном до $-n+1$ - ого степеня (3), то спочатку формуємо масив з коефіцієнтів при від'ємних степенях ряду до $-n+1$ - ого степеня. Після цього створюємо об'єкт класу Polynom. Далі, використовуючи алгоритм множення для класу Polynom, підносимо початковий поліном до n - ого степеня та відкидаємо частину з від'ємними степенями.
Складність алгоритму:
Даний алгоритм є так званим "brute force". Кожна операція множення виконується за квадратичний час - $O(n^2)$, і всього операцій множення n. Тому загальна складність такої реалізації - $O(n^3)$, що є дуже поганим часом.
Приклади часу виконня алгоритму:
овал Косіні:
n = 100, час - 615 ms
n = 200, час - 9608 ms
n = 300, час - 47156 ms

3.2. Алгоритм за властивістю

Даний алгоритм не є складнішим, ніж попередній, але дає значний приріст в часі виконання.
Згідно з теоремою (6) спочатку маємо порахувати n коефіцієнтів для Ω. Для кожного i - ого коефіцієнта виконується i операцій додавань, тому загальна складність обрахування коефіцієнтів - $O(n^2)$.
Другий крок цього алгоритма згідно з (7) - обрахування n коефіцієнтів для полінома $\Phi_n(z)$, складність є такою ж, як і у попередньому кроці. Тому загальна складність такої реалізації - $O(n^2)$.
Приклади часу виконня алгоритму:
овал Косіні:
n = 100, час - 0.1 ms
n = 500, час - 26 ms
n = 1000, час - 165 ms
n = 5000, час - 16716 ms

Висновки

Було розібрано прямий алгоритм знаходження поліномів Фабера та, базуючись на властивностях цих поліномів, було створено та програмно реалізовано інший алгоритм знаходження поліномів Фабера. Також було перевірено правильність цього алгоритму та було показано та доведено кращу ефективність мого алгоритму.
Тож, результатом моєї роботи є алгоритм, який досить точно та швидко може обрахувати поліноми Фабера для заданої функції. Недоліком мого алгоритма є те, що він вимагає реалізувати функцію, яка б повертала коефіцієнти ряду Лорана для заданної функції. Тому задля покращення алгоритму можливо реалізувати обрахування коефіцєнтів ряду Лорана, задавши фунцію в явному вигляді (коли це можливо).
У подальшому мій алгоритм можна використати для більшого алгоритму для інтерполювання функції у комплексній площині.

Література

[1] Faber G. Über polynomische Entwicklungen / G. Faber // Math. Annalen. — 1903. — V. 57. — P. 389–408; — 1907 — V. 64. — P. 116–135.

[2] Кашпіровський О. І., Хруцька О. О. ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МНОГОЧЛЕНІВ ФАБЕРА 2011

[3] Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1984. — 336 с.