УДК 530.1:140.8

Голод П. І.

ПРО "НЕЗБАГНЕННУ" ЕФЕКТИВНІСТЬ МАТЕМАТИКИ У КВАНТОВІЙ ФІЗИЦІ

Обговорюється роль математики при формуванні понять квантової теорії, її ефективність у пізнанні природи за межами безпосереднього чуттєвого досвіду.

Оглядаючи сьогодні грандіозний шлях, який пройшла фізика упродовж століття, що минуло, захоплюючись її успіхами, ми не можемо не говорити і про математику. Фізики мають право оцінювати математику, оскільки багато математичних ідей зародились і визріли у лоні фізики. Це з одного боку. З іншого — самі фізики зробили істотний внесок у розвиток математики (А. Зомерфельд, П. Дірак, В. Паулі, Ф. Дайсон та інші).

Характерною рисою новітньої фізики — фізики XX століття — є проникнення за межі безпосереднього людського досвіду. Відкриття електрона, а згодом — атомного ядра, ознаменувало нову еру в науці — еру освоєння масштабів порядку 10^{-10} м і менших. Саме ця обставина обумовила *нову роль математики у фізиці.*

Понятійна система класичної фізики (як і елементарної математики) сформувалась на базі безпосередніх відчуттів, спільних для всіх людей, безвідносно до їх освітнього рівня, роду занять чи професії. Фізичні вимірювання класичної фізики тільки уточнювали те, що може побачити або відчути кожен. Той факт, що тіло в похилому жолобі рухається прискорено, можна спостерігати безпосередньо. Переконатись, що прискорення стале (якщо знехтувати впливом тертя), можна з допомогою нескладних вимірювань, як це зробив Галілей понад 350 років тому. Математична формула $s=\frac{at^2}{2}$ для пройденого шляху нічого принципово нового не додає до фізичної картини явища, яке ми намалювали у своїй уяві, спираючись на інтуїтивні відчуття. Цей приклад ілюструє, можливо, занадто спрощено, роль класичної математики в загальній фізиці. Ця роль *підпорядкована, обслуговуюча.*

Сама класична математика, зокрема та її частина, яка безпосередньо взаємодіяла з природознавством, за своєю понятійною системою близька до фізики. Тут маємо на увазі схему формування абстрактних математичних понять, більшість з яких мають *чуттєві* прототипи. Тобто ми можемо простежити індуктивний ряд, який в границі формує те чи інше абстрактне поняття. З цього боку понятійна система фізики не відрізняється принципово. Взагалі будь-яке поняття, якщо воно вже є в нашій голові, мусить бути *абстрактним,* безвідносно до того, чи належить до загальнолюдських понять і зафіксовано у формі *слова,* чи виникло в результаті цілеспрямованого дослідження і є спеціалізованим. Без абстрагування взагалі неможливе пізнання. Поняття електромагнітного поля — витвір геніальної інтуїції М. Фарадея — за рівнем абстрактності не поступається таким математичним абстракціям, як поверхні Рімана, гільбертів простір чи кватерніонна алгебра.

Як вже зазначалося, для новітньої фізики характерне активне проникнення за межі безпосереднього досвіду, освоєння нових просторово-часових масштабів, не співмірних з масштабами людини. Спроби перенести на ці масштаби поняття класичної фізики, вироблені в процесі безпосередніх контактів людини з природою, потерпіли невдачу. Перед фізиками постало непросте завдання: як намалювати картину тієї нової території, яку вони взялися освоїти, але не можуть побачити її і відчути безпосередньо. Адже всі вимірювання і спостереженим явищ і процесів мікросвіту здійснюються лише опосередковано. І тут видатну роль *відіграла математика.*

Щоб зрозуміти нову роль математики, варто зупинитися на тих кількох роках з другої половини 1925 по 1928, упродовж яких, власне, була створена квантова механіка і закладено основи квантової теорії поля. Початком цієї короткої, але бурхливої епохи можна вважати червень 1925 року, коли редакція журналу "Zeitschrift fur Phisik" отримала статтю 25-річного Вернера Гайзенберга, молодого науковця з Геттингена, під назвою "Про квантовотеоретичне тлумачення кінематичних та механічних співвідношень". Ця стаття, що була опублікована в 33 томі журналу [1] (російський переклад — УФН, 1977.—Т. 122.— С 574—586), започаткувала квантову механіку як теоретичну науку. В ній Гайзенберг вводить поняття *"квантових спостережуваних величин",* які зіставляються з класичними спостережуваними. Він розглядає коливну систему з багатьма ступенями вільності (наприклад, багатоелектронний атом) та квантову спостережувану величину $\hat{X}$, яку, згідно з Гайзенбергом, можна подати у вигляді:

$$\hat{X}(t)=\sum_{n,m} X_{nm} e^{i\omega_{nm} t}, \qquad (1)$$

де ω_{nm} — частоти, які випромінює система і які можна спостерігати. Намагаючись задовольнити комбінаційний принцип Рітца: $\omega_{nk} + \omega_{km} = \omega_{nm}$, Гайзенберг "майже неминуче" [1] приходить до правила множення величин (1):

$$\hat{X}\cdot\hat{Y}=\sum_{k,n}\left(\sum_{m} X_{nm} Y_{mk}\right) e^{i\omega_{nk} t}.$$

Це множення, як було помічено згодом [2,3], не є комутативним: $\hat{X}\hat{Y}-\hat{Y}\hat{X}\neq 0$, і в тому вигляді, в якому його розглядав Гайзенберг, збігається з правилом множення матриць. На підставі своїх правил множення Гайзенберг отримує формули для оператора енергій квантового осцилятора і ротатора.

Праця Гайзенберга — ще не теорія, а тільки її неясні контури. Проте подальший перебіг подій показав, які глибокі ідеї в ній закладені. В історичних нарисах з історії фізики XX століття і в багатьох підручниках з квантової механіки поширеною є думка, що М. Борн і П. Йордан [4] пояснили смисл введених Гайзенбергом величин, ототожнюючи їх з матрицями. На наш погляд, можливо, найглибше зрозумів роботу Гайзенберга 23-річний П. Дірак. Вже в грудні 1925 року з'явилась його праця "Фундаментальні рівняння квантової механіки" [2], в якій він пробує надати математичного сенсу "квантовим спостережуваним". У своїй праці Дірак вживає слова на диво точні і абсолютно сучасні, називаючи Гайзенбергові величини елементами *квантової алгебри,* яка є асоціативною, має одиницю, але не є комутативною. Він ставить запитання: а що є класичним аналогом величини $\hat{X}\hat{Y}-\hat{Y}\hat{X}$,— і стверджує — дужка Пуассона відповідних класичних об'єктів:

$$\{x,y\}=\sum_i\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial p_i}-\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial p_i}\right).$$

Таким чином, Дірак сформулював правило канонічного квантування: якщо класична система описується канонічними змінними q_i *і* p_i, то кожній класичній спостережуваній величині $F(q,p)$ ставиться у відповідність квантова спостережувана $\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$ так, щоб виконувалося *правило відповідності:*

$$[\hat{F}_1,\hat{F}_2]=i\hbar\{F_1,F_2\}.$$

Зокрема, для квантових канонічних величин q_i і Pi Дірак виписує добре відомі сьогодні *канонічні комутаційні співвідношення:*

$$[\hat{q}_i,\hat{q}_j]=0,\quad [\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0,\quad [\hat{q}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij},$$

а також рівняння руху $i\hbar\frac{dX}{dt}=[\hat{X},\hat{H}]$, яке сьогодні носить ім'я Гайзенберга.

Звичайно, праці М. Борна, П. Йордана та В. Гайзенберга [4, 5], а також М. Борна і Н. Віннера [6] відіграли важливу роль у становленні матричної квантової механіки та операторного формалізму в квантовій теорії. Але на той час лице фізики визначали вже не ті люди, кому треба було пояснювати, що таке матриця, а фізики нового покоління, які швидко вчилися, вміло володіли найсучаснішим математичним апаратом і самі творили його. Нову ситуацію добре відчув Н. Бор. Виступаючи на шостому Скандинавському математичному конгресі в серпні 1925 р., всього через кілька тижнів після завершення роботи В. Гайзенберга, він оцінив її, як "видатне досягнення", і завершив свій виступ пророчими словами: "Будемо сподіватися, що почалася нова ера взаємного стимулювання фізики і математики".

Що було суттєво новим у підході Гайзенберга та Дірака і що так важко сприймалось фізиками старшого покоління? Це — новий математичний формалізм, нова форма рівнянь. Важко було повірити, що алгебраїчні правила множення, які придумані математиками як *можливість,* а не як *реальність,* можуть мати фізичний сенс і бути використані для формування нових уявлень про квантовий рух. Дужки Пуассона ми не зустрічаємо в природі, коли досліджуємо її феноменологічно. Вони виникають у класичній механіці як продукт математичної творчості. Але вирахувані з їх допомогою переставні співвідношення між квантовими спостережуваними ведуть до *принципу невизна-*

ченості і до *співвідношення невизначеностей,* що має експериментальні наслідки у вигляді явища дифракції електронів. Погодьтесь, це дещо більше, ніж формула $s = \frac{at^2}{2}$ для опису рівноприскореного руху.

Хронологія подій другої половини 1925 року і перших місяців 1926 року свідчить, що квантова механіка (безспінова) була створена за якихось 6—8 місяців. (Стаття Е. Шредінгера "Квантування як задача на власні значення", в якій запропоновано знамените рівняння, отримана редакцією Annalen der Phisik у січні 1926 року.) Якщо сюди долучити теорію спіна, яка була створена В. Паулі на початку 1927 року, то в сумі будемо мати відрізок часу не більший ніж 2 роки. Це виглядає, як чудо. Але це чудо могло статись тому, що математика XIX століття і перших десятиліть нового сторіччя витворила абстрактні конструкції, в які легко вписалась нова фізична реальність. Ось як про це пише М. Джеммер [7]:

"...При ретроспективному погляді видається надприродним, наскільки вчасно підготувала математика свої майбутні послуги квантовій механіці. Так, стандартний підручник Боше з теорії матриць з'явився в німецькому перекладі у 1910 році. А в 1924 році Р. Курант, використовуючи лекції Д. Гільберта, закінчив в Геттингені перший том знаменитих "Методів математичної фізики". В цьому томі містилися саме ті розділи алгебри і математичного аналізу, на які мала опертися квантова механіка". (Одним з помічників Куранта був Паскуель Йордан, якого М. Борн залучив до роботи з осмислення того, що створив Гайзенберг.)

Видані книжки, прочитані лекції, опубліковані наукові статті творили ту незриму інформаційну атмосферу, в якій працювали і якою дихали тогочасні фізики. Якщо ж говорити про попередників, то не можна не згадати Ф. Клейна, автора знаменитої "Ерлангенської програми", в якій передбачено видатну роль симетрії та теорії груп у геометрії та фізиці. Клейн довгий час працював в Геттингені, і, власне, завдяки його зусиллям Геттингенський університет перетворився на авторитетний науковий центр з розгалуженою мережею дослідних лабораторій та науково-технічних інститутів.

Серед визначних досягнень математики, які мали вплив на формування нової фізики, слід назвати роботи Джоржа Буля з символічного (операторного) числення в теорії диференціальних рівнянь (1844), теорію кватерніонів Гамільтона (1835), теорію матриць і антикомутативне множення Грасмана (1844), теорію алгебр Кліффорда (1876), теорію спінорів та спінорних представлень Е. Картана (1913). Завдяки духу вільної творчості, що культивувався в математиці з часів древніх греків, вона витворила конструкції, які виявились адекватними новим запитам, а їх застосування дало небачені результати.

Спробуємо зрозуміти, чому так сталось, чому витвори людської уяви, сконструйовані за правилами, придуманими самими людьми, збіглися з законами Природи? Розмірковуючи над цим питанням, П. Дірак приписує природі деяку *математичну якість.* Аналізуючи процес зближення фізики і математики, безпосереднім учасником якого він був, П. Дірак у статті "Про стосунки між математикою і фізикою" [3] стверджує, що шлях пізнання природи лежить через математику. Селекцію математичних теорій, яку до цього часу робила фізика, спираючись на феноменологію, вона вже не здатна зробити. Але такий відбір, на думку Дірака, можна робити, керуючись принципом математичної красоти. "...Вірогідно віддавати перевагу такій галузі математики, яка має у своїй основі цікаву групу перетворень, оскільки перетворення [симетрії.— *Авт.]* грають важливу роль в сучасних фізичних теоріях; релятивістська теорія і квантова механіка показують, що перетворення є більш фундаментальними, аніж рівняння".

Стратегія наукового пошуку, яку декларує П. Дірак (але якої він сам не завжди дотримувався!), яскраво виражена в наступній цитаті:

"Вибравши галузь математики (згідно з принципом красоти.— *Авт.),* слід розвивати її у відповідному напрямку, придивляючись одночасно до того, як вона може піддатись природній фізичній інтерпретації".

Але чи не є така точка зору новою крайністю і перебільшенням ролі математики? Чи насправді існує загроза для фізики перетворитись на придаток до математики і слугувати лише перекладачем на іншу (так звану "фізичну") мову глибоких істин, які вже винайдені математиками? Очевидно, що ні. Історія розвитку фізики у наступні десятиліття після створення квантової механіки і особливо її сучасний стан дають підстави для вироблення більш зваженої точки зору. Частково вона виражена у словах Ч. Н. Янга, які наводить Р. Яцків у статті [8]: "Фізика не є математикою, як і математика не є фізикою. Чомусь Природа обирає лише підмножину дуже красивих, складних і заплутаних понять (засобів), створених математиками, і ця конкретна підмножина є саме тим, що шукає фізик-теоретик...".

Проте в історії фізики є декілька яскравих епізодів, які переконують, що погляд на природу крізь призму математики може бути продуктивним і привести до фундаментальних результатів. Один з таких епізодів—це відкриття Гелл-Маном і Неєманом унітарної симетрії у сильних взаємодіях та кваркової структури матерії.

На початку 60-х років, після того як було відкрито нову характеристику елементарних частинок, названу *дивністю* (в певному розумінні еквівалентною величиною є *гіперзаряд),* виникла ідея об'єднувати елементарні частинки (яких на той час було відкрито дуже багато) в мультиплети. Ідея симетрії, наслідком якої мав би бути закон збереження дивності у сильних взаємодіях, полягала в тому, щоб учасників мультиплету вважати абсолютно однаковими з погляду сильних взаємодій; а відмінності між ними, зокрема різні значення мас, мають бути наслідком існування інших взаємодій, які порушують початкову симетрію.

Досвід роботи з симетріями у тогочасних фізиків був досить великий. Він спирався на солідний математичний апарат теорії груп Лі та їх представлень. Напівпрості групи були класифіковані Е. Картавом, і в списку Картана не важко було відшукати групу рангу 2 (це відповідає двом квантовим числам — ізоспіну та гіперзаряду), яка б могла бути кандидатом на роль групи симетрій сильних взаємодій. Найбільш підходящою виявилась група SU(3). Структурна діаграма цієї групи, яка одночасно репрезентує її восьмивимірне представлення, подана на рис. 1.

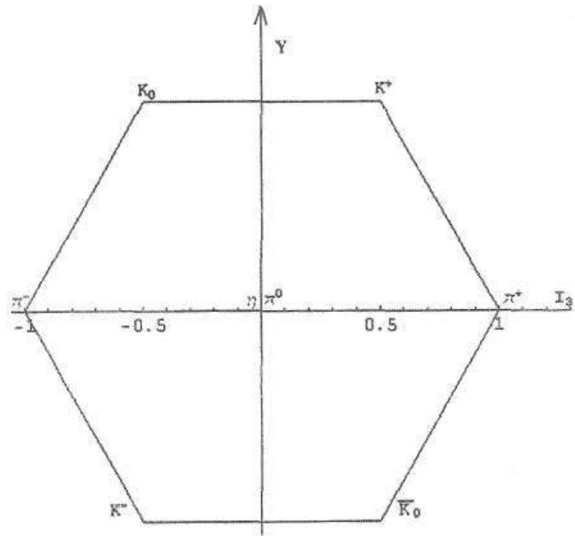

Рис. 1

Вісім можливих станів мультиплету заповнюються псевдоскалярними мезонами з досить значною різницею мас (Δm -400 МеВ). Об' єднання їх в один мультиплет може виглядати як насильство над природою. Але це "насильство" зроблене під впливом математики і заради красоти. Якщо спробувати утворити декуплет баріонних резонансів, складаючи його з ізотопічного квартету нуклонних резонансів з гіперзарядом +1, ізотопічного триплету дивних резонансів з нульовим гіперзарядом та ізотопічного дублету Ξ — резонансів з гіперзарядом -і, то у відповідній мультиплетній діаграмі залишиться одна вакансія, що відповідає нульовому ізотопічному спіну та гіперзаряду -2. Гелл-Ман висловив сміливу гіпотезу про існування нової частинки Ω~ (омега-мінус-гіперон), необхідної для докомплектації декуплету баріонних резонансів. Коли у 1964 році ця частинка була відкрита експериментально, то це був тріумф теорії.

Взявши до уваги ці *математичні* факти, Гелл-Ман допустив можливість існування трьох нових фундаментальних частинок, які у відповідності до властивостей фундаментального представлення групи SU(3) та формули Гелл-Мана — Нішiджіми

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y,$$

повинні мати електричний заряд $\pm\frac{1}{3}$ та $\frac{2}{3}$. Так народилась гіпотеза про *кварки* та *кваркову структуру матерії.* Згідно з цією гіпотезою всі адрони (частинки, що беруть участь у сильних взаємодіях) побудовані з кварків та антикварків, а самі кварки виступають як первинні елементарні частинки.

Можна навести ще багато прикладів успішного "флірту" високої математики з фізикою [8]. Але всі ці приклади лише фіксують факт "незбагненної"

Але унітарна симетрія не вичерпала на цьому свій ідейний потенціал. Математика підказувала нові можливості. В теорії груп Лі відоме твердження (Г. Вейль, 1925 р.), що будь-яке незвідне скінченновимірне представлення напівпростої групи Лі можна побудувати (шляхом тензорного множення) з "елементарних цеглин" — *фундаментальних представлень.* Для груп SU(3) такими є два взаємно контраградієнтні тривимірні представлення (діаграми для них подані на рис. 2). Представлення, що відповідає октету мезонів (рис. 1), міститься в тензорному добутку двох фундаментальних представлень.

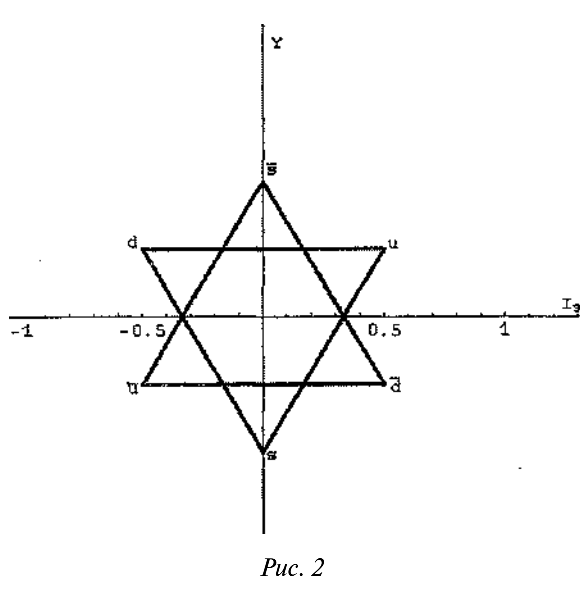

Рис. 2

ефективності математики, не пояснюючи причин і меж цієї ефективності [9],

Щоб наблизитись до розуміння проблеми, яку ми обговорюємо, спробуємо відповісти на запитання, яке слід було поставити з самого початку: а що, власне, вивчає математика? Чи вивчає вона природу? Очевидно, що ні. Цим займається фізика та інші природничі науки. Скоріш за все математика переймається проблемами переробки та засвоєння різноманітної інформації, яка потрапляє до *нашого* мозку —*мозку людини як біологічного виду.* З цієї точки зору в математиці яскраво присутній *видовий суб'єктивізм;* вона формує свої поняття та співвідношення у такий спосіб, щоб вони добре узгоджувались з глибинними механізмами роботи мозку людини. Якщо говорити про якусь особливу математичну якість природи (про яку йшлося в статті П. Дірака [3]), то її слід в першу чергу приписати біологічним механізмам засвоєння інформації людиною.

Щоб проілюструвати сказане, розглянемо приклад з арифметикою. Чи є в природі прості числа? Тобто, чи виділені кількості, з якими ми співставляємо прості числа, якимись особливими ознаками з-поміж інших кількостей? На це важко відповісти ствердно. Але те, що їх виділяє наш мозок, є фактом незаперечним. Тому ми маємо основну теорему арифметики про розклад числа на прості множники і зручний для нас (людей) спосіб оперування з великими кількостями.

На наш погляд, саме узгодження математичних конструкцій з механізмами роботи мозку створює відчуття гармонії, формує те, що ми називаємо *математичною красотою.*

Ми, люди, здатні зрозуміти природу лише в тій мірі, в якій здатен змоделювати її наш мозок в образах, спільних (тобто зрозумілих) іншим людям. З огляду на це видається вірогідним, що заняття абстрактною математикою — це намагання розширити здатність мозку створювати моделі. (Очевидно, під впливом математичних вправ в нашому мозку формуються нові синаптичні контакти, і вони можуть бути використані для створення нових образів.)

Галілей стверджував, що Велика Книга Природи написана мовою Математики. Але видається, що ця книга написана невідомими нам письменами. Фізика намагається перекласти їх на мову математики, бо це єдина мова, яку може зрозуміти Людина...

Але Книга Природи не має кінця. На кожній новій сторінці зустрічаються знаки, яких не було раніше. У таких випадках — слово за математикою. Наскільки вірний наш переклад, не скаже ніхто. Лише багаторічний досвід багатьох дослідників дає нам впевненість, що ми на шляху до істини.

Ця стаття є розширеним варіантом доповіді автора на сесії відділення фізики та астрономії НАН України 14 листопада 2000 р. Автор висловлює подяку учасникам дискусії Є. Д. Білокосу, І. О. Вакарчуку, І. В. Блонськаму, А. Г. Загородньому, В. М. Локтеву, А. Г. Наумівцю, С. М. Рябченку, П. І. Фоміну та іншим.

1. *W. Hejsenberg.* Über Quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Bezihungen//Zeitschrift für Phisik.— 1925.— Bd. 33.— S. 879—883 (рос. переклад — УФИ, 1977 — Т. 122 — С. 574—586).
2. *P. A. M. Dirac.* The fundamental equation of quantum mechanics // Proc. Roy. Soc, Edinburgh. Ser. A, v. 109 (1925), p. 642—653 (рос. переклад в книзі П. А. М. Дирак. К созданию квантовой теории поля.— М. Наука, 1990).
3. *P. A. M. Dirac.* The relation between mathematics and phisics // Proc. Roy. Soc, Edinburgh. Ser. A, v. 59 (1939), p. 122—129.
4. *M. Born, P. Jordan.* Zur Quantenmechanik // Zeitschrift für Phisik— 1925 — Bd. 34.— S. 858—888 (рос. переклад — УФН, 1977.— Т. 122.— С. 586.)
5. *M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan.* Zur Quantenmechanik II // Zeitschrift für Phisik.— 1926.— Bd. 35.— S. 557—615.
6. *M. Born, N. Winner.* A new formulation of the laws of quantization of periodic and aperiodic phenomena // Journal of Mathematics and Phisics (M.I.T.) 1925—1926, v. 5, p. 84—98.
7. *M. Jammer,* The Conceptual Development of Quantum Mechanics.— New York: McGraw-Hill, 1967; (рос. перклад: *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики.— М.: Наука, 1985).
8. *R. Jackiw,* My Encounters — as a Physicist — with Mathematics // Phisics Today, February, 1996.
9. *Е. Вигнер.* Этюды о симметрии.— М.: Мир, 1971.

Holod P. I.

ON "INSCRUTABLE" EFFECTIVENESS OF MATHEMATICS IN QUANTUM PHYSICS

It is discussed the role of mathematics in forming concepts of quantum theory, its effectiveness in comprehending the nature beyond the immediately sensual experiment.