УДК 512.54

Боднарчук Ю. В.

АВТОМОРФІЗМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОНОМІАЛЬНИХ ГРУП

Встановлено будову автоморфізмів узагальнених мономіальних груп.

Мономіальна матриця визначається як квадратна матриця, у якої в кожному рядку і кожному стовпчику знаходиться єдиний ненульовий елемент, який можна вибирати з довільної мультиплікативної групи H. Сукупність всіх мономіальних матриць утворює мономіальну групу $Mon_n(H)$, яка ізоморфна вінцевому добутку повної симетричної групи на множині рядків (стовпчиків) X з групою H, або півпрямому добутку симетричної групи S(X) на групу діагональних матриць, де дія S(X) визначається перестановкою елементів діагоналі. Якщо H має структуру кільця, то $Mon_n(H)$ виступає в ролі нормалізатора групи діагональних матриць (тора) в повній лінійній групі $GL_n(H)$.

Мономіальна група є класичним об'єктом сучасної алгебри, зокрема, мономіальні зображення і мономіальні переміщення є ефективними засобами вивчення алгебраїчних структур. Вивченню мономіальних груп присвячена фундаментальна робота американського математика О. Оре [1]. Пізніше в роботі Р. Кроача, У. Скота [2] були розглянуті групи $\Sigma(H, X, \mu, \nu)$, які є узагальненнями мономіальних груп на випадок, коли множина X є нескінченною. Нехай μ, ν є довільні кардинали, тоді $\Sigma(H, X, \mu, \nu)$ визначається як підгрупа декартового вінцевого добутку S(X) з групою H, яка складається з елементів виду s f, $s\in S(X)$, $f\colon X \to H$, де f — довільна функція, така, що $|\operatorname{supp} f| < \mu$, а потужність множини переміщуваних елементом s точок множини X менша за ν, μ. Нехай $|X| = \chi$ і χ^+ — наступний кардинал, тоді $\nu, \mu \le \chi^+$. Якщо підгрупи всіх вказаних функцій підстановок позначити через F_μ, $S_\nu(X)$ відповідно, то маємо розклад в півпрямий добуток $\Sigma(H, X, \mu, \nu) = S_\nu(X)\, F_\mu$. Зокрема, $\Sigma(H, X, \chi^+, \nu)$ є декартів вінцевий добуток $S_\nu(X)$ wr H, а $\Sigma(H, X, \aleph_0, \nu)$ є відповідний прямий вінцевий добуток. В інших випадках групи $\Sigma(H, X, \mu, \nu)$ не є вінцевими добутками, але близькі до них за своєю будовою. Надалі група H і множина X будуть фіксованими, і ми пропускатимемо їх в позначеннях узагальнених мономіальних груп.

В даній роботі вивчаються автоморфізми узагальнених мономіальних груп. Відмітимо, що для випадку скінченної множини X автоморфізми були описані у вищезгаданій роботі Оре. Винятками тут є випадки |X|=2,6. В першому випадку є можливим автоморфізм, що не зберігає групу діагональних матриць. Як показано в роботі автора [3], другий випадок насправді не є винятком, оскільки зовнішній автоморфізм групи S_6 не розширюється до автоморфізму мономіальної групи. Випадок $\Sigma(\aleph_0, \nu)$ прямих вінцевих добутків розглянуто в роботі С. Холмса [4].

В загальному випадку групи $\Sigma(\mu, \nu)$, взагалі кажучи, не є вінцевими добутками, але близькі до них за своїми властивостями. Це дозволяє застосувати результати роботи [3] до опису автоморфізмів. Зокрема, без ускладнень переноситься твердження леми 1 з [5]: доповнення до F_μ, що є образом S_ν з точністю до спряженості в декартовому вінцевому добутку, визначається гомоморфізмом стабілізатора точки в центр групи H. Як і слід було сподіватись, група автоморфізмів у певному розумінні "менша" ніж у випадку класичних мономіальних груп. Наведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 1. F_μ — характеристична підгрупа в $\Sigma(\mu, \nu)$.

Доведення легко отримати, взявши до уваги (див. [5]), що знакозмінною підгрупою та підгрупами S_λ, $\lambda\le\nu$, вичерпуються всі нормальні дільники $S_\nu(X)$. Таким чином, будь-який автоморфізм u групи $\Sigma(\mu, \nu)$ індукує автоморфізм на відповідній симетричній групі. Тоді група $(S_\nu(X))^u = \{g\, \varphi_g \mid g\in S_\nu\}$ є доповненням до F_μ в півпрямому добутку $\Sigma(\mu, \nu)$. При цьому система функцій φ_g визначає перехресний гомоморфізм $S_\nu \to F_\mu$. Тобто маємо тотожність $\varphi_{gh} = (\varphi_g)^h\ \varphi_h$ для всіх g, $h \in H$. Нехай x_0 — довільна точка з X і S_0 — її фіксатор в S_ν, тоді маємо гомоморфізм θ: $S_0 \to H$, $(s)^\theta = \varphi_s(x_0)$, $s \in S_0$.

Лема 2. *Im θ належить центру групи H.*

Доведення такої леми для вінцевих добутків, яке наведене в [6], дослівно переноситься на узагальнені мономіальні групи.

Як випливає з теореми Шрайера-Улама [5], всі автоморфізми $S_\nu(X)$ індукуються елементами S(X). Отже, можна перейти до вивчення автоморфізмів, які діють тотожно на фактор-групі $\Sigma(\mu, \nu) / F_\mu$. Зауважимо, що автоморфізми виду u: $g \to g$, $f \to f^\beta$, визначаються автоморфізмом β, що належить централізаторові $S_\nu(X)$ в Aut F_μ. Зокрема, будь-який автоморфізм α групи H стандартним чином розширюється до автоморфізму вказаного вигляду, причому $f^\beta(x) = (f(x))^\alpha$ в довільній точці x.

Розглянемо обмеження дії такого автоморфізму на підгрупу функцій зі скінченними носіями. Вказана дія повністю визначається нескінченною матрицею $r = a_{ii}$, $i=1, 2, \ldots$ $s = a_{ij}$ для всіх i, j ($i \neq j$) r, $s \in$ End H. Підгрупи Im r та Im s комутують між собою, а Im s — абелева підгрупа. Ці умови дозволяють визначити ендоморфізм r + ks, де k — довільне ціле число. Враховуючи, що Im (r — s) комутує з Im s, маємо $f^\beta = f^{r-s} d_f$, $\beta \in$ Aut F_μ, d_f=const, на функціях зі скінченними носіями. Оскільки при $\mu < \chi^+$ константи не належать F_μ, то в цьому випадку s=0.

Лема 3. *При $\mu < \chi^+$ будь-який автоморфізм групи Σ(μ, ν), що діє тотожно на S_ν є стандартним розширенням деякого автоморфізму групи H.*

Доведення. Як випливає з попереднього зауваження, дія такого автоморфізму може відрізнятись від дії стандартного розширення відповідного автоморфізму групи H тільки на функціях з нескінченними носіями. Досить показати, що будь-який автоморфізм β, який діє тотожно на функціях зі скінченними носіями, діє таким чином і на всіх функціях. Нехай $f \in F_\mu$ і $f^\beta = f_1$, тоді можна вибрати точку t_0 таким чином, що $f(t_0) = f_1(t_0) = e$. Якщо $\tau = (t_0, t)$ — транспозиція, то $\varphi = f^\tau f^{-1}$ є функцією зі скінченним носієм, звідки, $f_1^{\ \tau} f_1^{\ -1}(x) = f^{\tau}\ f^{-1}(x)$. Поклавши тут x= t, отримаємо $f(t) = f_1(t)$, для довільної точки $t \in X$, що і доводить лему.

Теорема 1. *При* $\mu<\chi^+$, *Aut* $\Sigma(\mu, \nu) \approx$ $\approx S(X)$ *Aut H* I_λ, *де S(X) — повна симетрична група, I_λ — група автоморфізмів, що індукуються функціями з F_λ,*

$$\lambda = \begin{cases} \chi^+ \text{ якщо } \nu \le \mu \\ \mu \ \text{ якщо } \mu > \nu. \end{cases}$$

Доведення. Як випливає з леми 1, будь-який автоморфізм $u \in$ Aut Σ(μ, ν) можна розкласти в композицію s v, де s індукується певним елементом з S(X), а v діє тотожно на фактор-групі $\Sigma(\mu, \nu) / F_\mu$ і зберігає підгрупу F_μ. Розглянемо підгрупу $(S_\nu)^v$ як доповнення до бази в декартовому вінцевому добутку S_ν wr H. Фіксатор точки S_0 ізоморфний самій групі S_ν. Якщо $\nu > \aleph_0$, то S_ν не має нетривіальних абелевих фактор-груп. Як випливає з леми 2, θ =0. При $\nu = \aleph_0$ ядром такого гомоморфізму може бути тільки знакозмінна група. Розглянемо наведену вище тотожність для перехресних гомоморфізмів у точці x_0 і виберемо g і h транспозиціями: g = (y, z), y, $z \neq x_0$, $h = \tau(x) = (x_0, x)$. Тоді маємо рівність $\varphi_{g\tau(x)}(x_0) = \varphi_g(\tau(x)\ x_0)\ \varphi_{\tau(x)}(x_0)$, звідки $\varphi_g(x) = \varphi_{g\tau(x)}(x_0)(\varphi_{\tau(x)}(x_0))^{-1}$. Оскільки для всіх значень x відмінних від y, z елементи g і τ(x) комутують, то отримуємо $\varphi_g(x) = \varphi_{\tau(x)}(x_0)\varphi_g(x_0)(\varphi_{\tau(x)}(x_0))^{-1} =$ $= \varphi_{\tau(x)}(x_0)\ (g)^\theta(\varphi_{\tau(x)}(x_0))^{-1}$. Враховуючи нерівність $(g)^\theta \neq e$, робимо висновок, що функція $\varphi_g(x)$ відмінна від одиниці e групи H скрізь, крім, можливо, точок y, z. Отже, при $\mu < \chi^+$, $\varphi_g(x) \notin F_\mu$, звідки отримуємо θ = 0 і в цьому випадку. Це означає, що спряженням за допомогою функції з F це доповнення можна перевести в S_ν. Отже, v є добутком автоморфізму v_1, що діє тотожно на S_ν на автоморфізм, що індукується спряженням за допомогою деякої функції $f \in F$, причому, для того щоб $g^f = g\,(f^g)^{-1} f$ належав до Σ(μ, ν), потужність її носія, очевидно, повинна бути меншою за λ, яке задовольняє умові, наведеній в формулюванні теореми. Як показано в лемі 3, автоморфізми типу v_1 є стандартними розширеннями автоморфізмів H. Теорему доведено.

Дослідимо випадок $\mu = \chi^+$. Тоді елементи згаданої вище нескінченної матриці (a_{ij}) ендоморфізмів мають додатково такі властивості.

Лема 3. *1. $r - s \in$ Aut H,*

2. Im s належить центру групи H.

Доведення. У випадку звичайних мономіальних груп ці властивості добре відомі. Доведення леми переноситься на узагальнені мономіальні групи з незначними зауваженнями.

Нехай $\sigma = r - s \in$ Aut H і $\underline{\sigma}$ — стандартне розширення його до автоморфізму Σ(μ, ν), тоді матриця, що визначає дію автоморфізму $\beta_1 = \beta\,\underline{\sigma}^{-1}$ на функціях зі скінченними носіями має вигляд E + S_1, де перший доданок — одинична матриця, а другий — матриця, всі елементи якої дорівнюють $s_1 = s\,\underline{\sigma}^{-1}$.

Лема 4. *У випадку* $\mu = \chi^+$, *дія автоморфізму β_1 на функціях f з F_μ має такий вигляд:*

$f \to f\,d_f$, де d_f — постійна функція.

Доведення проводиться способом, аналогічним використаному в лемі 2.

Позначимо через ξ відображення $F \to H$, що індукується елементами d_f.

Лема 5. *Відображення ξ є гомоморфізмом, образ якого лежить у центрі групи H, а його ядро містить взаємний комутант $[F, S_\nu]$.*

Доведення. Нехай β_1: $f \to f\,d_f$ і δ_t — дельта функція, тоді функція $f_1 = f\,\delta_t(f(t))^{-1}$ набуває одиничного значення в точці $t \in X$ і ми отримуємо β_1: $f_1 \to f_1\,\delta_t(h_1)d_f\,\delta_t(h_1^{-1})d(h_1^{-s})$. З іншого боку, за лемою 4, образ функції f_1 відрізняється від прообразу на сталу функцію, це можливо лише, коли константа d_f комутує з h_1, отже, образом функції f_1 є функція $f_1\,d_f\,d(h_1^{-s})$.

Елементи f_1 та $\delta_t(h)$ комутують для будь-якого $h \in H$, отже комутують і їх образи $f_1\,d_f\,d(h_1^{-s})$ і $\delta_t(h)\,d(h^s)$. Оскільки h^s належить центру, то це можливо лише, якщо d_f комутує з $\delta_t(h)$, для будь-якого елемента $h \in H$. Отже, Im ξ належить центру групи і є гомоморфізмом.

Друге твердження виводиться з того, що образом елемента f^g, при дії автоморфізма u_1 є елемент $f^g\,d_f$. Звідси випливає, що $f^g f^{-1} \in$ Ker ξ. Цим твердження доведено.

Лема 6. *$[F, S_\nu]=F_\nu$ при $\nu>\aleph_0$* і *$[F, S_\nu]=\{f \mid \Pi_{\chi\in X} f(x)\in[H, H]\}$.*

Доведення випливає з нерівності $|\mathrm{supp}(f^g f^{-1})|<\nu$.

Теорема 2. *Aut $\Sigma(\chi^+, \nu)= S\,A(H)\,C_\nu\,\Gamma\,I$, де $S \approx \approx S(X)$ група автоморфізмів, індукованих повною симетричною групою, $A(H)\approx$Aut H, C_ν — група центральних автоморфізмів, що визначаються гомоморфізмами $F/F_\nu \to Z(H)$ при $\nu > \aleph_0$ і $H/[H, H] \to Z(H)$ при $\nu = \aleph_0$. В останньому випадку, Γ- підгрупа стабільності ряду $(e)< F<\Sigma(\chi^+, \nu)$ і ізоморфна максимальній елементарній абелевій 2-підгрупі $Z(H)$; при $\nu > \aleph_0$, ця підгрупа тривіальна. I — група внутрішніх автоморфізмів, що індукуються елементами бази.*

Доведення проводиться аналогічно теоремі 1. Оскільки немає обмежень на носії функції, то з'являються підгрупи центральних автоморфізмів, описання яких отримується з лем 4, 5. При $\nu = \aleph_0$ з'являється група стабільності Γ, яка ізоморфна Hom$(C_2, Z(H))$ (див. [3]),

Наслідок. *Якщо $|X|> \aleph_0$, то Aut (S(X) wr H)= = A(H) Int(S(X) wr H).*

Згідно з лемою 6, в цьому випадку гомоморфізм ξ є тривіальним, і відповідна група центральних автоморфізмів є одиничною.

1. *Ore O.* Theory of monomial groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 51, p. 15—64.

2. *Croach R. Scott W.* Normal subgroups of monomial groups — Proc. Amer. Math. Soc, 1950, 1957, 8, N 5, p. 931—936.

3. *Боднарчук Ю. В.* Строение группы автоморфизмов нестандартного сплетения групп.— Укр. мат. журн. 1984, № 2, с. 143—148.

4. *Holmes C. V.* Automorphisms of monomial groups.— Pacif. J. Math., 1961, 11, № 2, p. 531—545.

5. *Плоткин Б. И.* Автоморфизмы алгебраических систем.— М.: Наука.— 1966.— С. 604.

6. *Боднарчук Ю. В.* Об изоморфизме сплетений групп. Укр. мат. журн. 1994, № 6, с. 64—68.

Bodnarchuk Yu. V.

AUTOMORPHISMS OF GENERALIZED MONOMIAL GROUPS

The structure of the automorphisms of generalized monomial groups is ascertained.