УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *GorbachukVasyl@netscape.net*.

М.С. ДУНАЄВСЬКИЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *MaxDunaievskyi@gmail.com*.

А.А. СИРКУ
Головний центр спеціального контролю Національного центру управління та випробувань космічних засобів Державного космічного агентства України, смт. Городок, Житомирська обл., Україна, e-mail: *saan@ukr.net*.

С.-Б. СУЛЕЙМАНОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *sbsuleimanov@gmail.com*.

ОБҐРУНТУВАННЯ ДИФУЗІЙНОЇ МОДЕЛІ ВПРОВАДЖЕННЯ ІННОВАЦІЙ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ПОШИРЕННЯ ВАКЦИНАЦІЙ[1]

Анотація. Вивчаються передумови та припущення класичної моделі Басса поширення інновацій з метою її застосування для моделювання актуальних стохастичних процесів, що описують пандемії. Модель Басса довела свою універсальність і застосовність до різних середовищ. Наведено детальні математичні обґрунтування властивостей моделі на основі теорій еволюційних рівнянь і стохастичних процесів з метою її подальшого розвитку, пошуку параметрів невизначеності та спостережуваних змінних. Отримано реалістичні результати оцінювання параметрів моделі Басса для вакцинацій в Україні та Білорусі на тижневих даних першого півріччя 2021 р. і запропоновано проведення подібних досліджень для інших держав, а також областей і районів України.

Ключові слова: новий продукт, критична маса, пандемія, маркетинг, охорона здоров’я, стохастичні процеси.

ВСТУП

Автор класичної моделі [1] Френк Басс (1926–2006) був першим лауреатом премії О’Делла Американської асоціації маркетингу (ААМ) 1979 р. за публікацію [2], лауреатом премії Конверса (започаткованої у 1946 р.) ААМ 1986 р., премії Літтла (першого доктора філософії з дослідження операцій та першого президента Інституту дослідження операцій та управлінських наук (Institute for Operations Research and the Management Sciences, INFORMS)) INFORMS (започаткованої у 1982 р.) 1988 р. за найкращу публікацію з менеджменту чи маркетингу [3] (ця публікація вийшла після двох доопрацювань), премії Мейнарда (започаткованої у 1974 р.) 1991 р. за кращу публікацію в журналі «Journal of Marketing» [4] (ця публікація є скороченим варіантом поданого до редакції журналу матеріалу), премії Черчілля (започаткованої у 1996 р.) ААМ 2002 р., премії Парліна (започаткованої у 1945 р.) ААМ та Вортонської школи бізнесу (заснованої у 1881 р.; найкращої школи бізнесу світу за рейтингом «Financial Times») 2003 р. У 2005 р. Університет Південної Австралії (заснований у 1856 р.; на 2021 р. має позицію 295 серед університетів світу за рейтингом QS) заснував Інститут Еренберга–Басса маркетингових досліджень, а в Нідерландах Гронінгенський університет (заснований у 1614 р.; на 2021 р. має позицію 128 серед університетів світу за рейтингом QS) на факультеті економіки заснував кафедру Френка М. Басса.

[1] Робота виконана за часткової підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт «Аналітичні методи та машинне навчання в теорії керування і прийнятті рішень за умов конфлікту та невизначеності» (грант № 2020.02/0121).

Згадана класична публікація [1] основана на препринті [5] із дещо зміненою назвою. У свою чергу, зазначений препринт [5] базується на доповіді на конференції [6]: еволюція від доповіді на конференції до препринту й завершеної журнальної публікації є перевіреним шляхом досягнення якісних науково-практичних результатів.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Для вимірювання характеристик пандемії фахівці використовують аналіз та оцінювання еволюційних моделей [7–12], зокрема дифузійну модель Басса [13, 14]. Зауваження фахівців щодо застосування моделі Басса для моделювання поширення пандемії зосереджувалися на важливості емпіричних даних [14, 15], заходів з охорони здоров'я [14, 16], невизначених факторів [14, 17–19], організаційних пріоритетів [14, 20, 21]. Таким чином, модель Басса заслуговує докладного вивчення, а її висновки — ретельного обгрунтування.

Мета цієї роботи — математичне обгрунтування висновків класичної публікації [1], а також застосування дифузійних процесів не лише для моделювання динаміки інфікованих осіб, але і до динаміки вакцинованих осіб за реальними даними. Зазначимо, що в моделі Басса інновацією називають споживання нового продукту, яким на сучасному фармацевтичному ринку є та чи інша вакцина [16].

Для оцінювання термінів первинних закупівель нових продуктів запропонуємо теоретичну модель та перевіримо її, використовуючи емпіричні дані споживчих товарів тривалого користування, наприклад дані про продажі кольорових телевізорів у 1960-х роках [1]. Основне припущення моделі полягає у тому, що ці терміни залежать від кількості попередніх покупців. У поведінці моделі виокремимо інноваційну та імітаційну складові. Згідно з історичними даними запропонована модель задовільно прогнозує пік продажів і момент цього піку.

Ця модель може застосовуватися і в разі зростання первинних закупівель широкого спектра характерних нових загальних класів продуктів: розрізняються нові класи продуктів і нові бренди чи моделі старих класів продуктів (які користуються попитом).

Для нових брендів або продуктів відомі моделі експоненціального зростання продажів до певної асимптоти: продажі швидко зростають до моменту досягнення свого піку, а далі стабілізуються на певному рівні нижче піку. Стабілізувальний ефект пояснюється відносним зростанням резервної закупівельної складової продажів і зниженням складової первинних закупівель.

Довгострокове прогнозування продажів нових продуктів потребує не лише інтуїції, але й наявності інформації. Таке прогнозування має математичну схожість з моделями інфікування, які знайшли широке застосування в епідеміології [22, 23]. Припущення щодо поведінки здебільшого аналогічні до теоретичних концепцій, які представлено в літературі з прийняття та дифузії нових продуктів [24], а також до деяких моделей навчання [25]. Факт явних поведінкових припущень відрізняє запропоновану модель від моделей, що базуються на логнормальному розподілі, та інших моделей зростання продажів.

У загальних теоріях прийняття та дифузії (розповсюдження) нових ідей чи нових продуктів у соціальній системі [25] складно розрізняти припущення та наслідки, потрібні для оцінювання термінів прийняття нових ідей чи продуктів.

Якщо особа вирішує прийняти інновацію незалежно від рішень інших осіб у соціальній системі, то таку особу називають новатором: зазвичай можна вважати, що новатори — це ті, хто першими впроваджують інновацію. Серед таких осіб виокремлюють класи наслідувачів (adopters) інновації за хронологією рішень прийняти інновацію: 1) новатори; 2) перші наслідувачі; 3) початкова більшість; 4) критична більшість; 5) покупці у стані очікування.

На відміну від новаторів кожний наслідувач (інновації та відповідної поведінки) вирішує, чи приймати інновацію в конкретний період часу, який залежить від що раз сильніших тисків соціальної системи на наступних наслідувачів у разі збільшення кількості попередніх наслідувачів. У математичній постановці класи 2–5 можна об'єднати в групу імітаторів. На відміну від новаторів імітатори є залежними від періодів часу рішень інших членів соціальної системи щодо прийняття інновації. До новаторів можуть належати перші 2.5 % наслідувачів [25], які мають певні соціально-психологічні якості і можуть взаємодіяти з іншими новаторами. Новатори не є залежними від періодів часу рішень інших членів соціальної системи для прийняття інновації у тому сенсі, що у разі розгортання процесу наслідування тиск на групу новаторів радше спадає, а не зростає.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВПРОВАДЖЕННЯ ІННОВАЦІЇ

У моделі зростання і спаду попиту на послідовні покоління технологічних інновацій потрібно брати до уваги ефекти дифузії та заміщення (заміни). Відомою є дифузійна модель Басса попиту первинних закупівель [1, 5, 6]. Ця модель має поведінкове обгрунтування, яке узгоджується з дослідженнями в соціальних науках щодо прийняття (наслідування, впровадження) і дифузії інновацій [25] з урахуванням умовної ймовірності події прийняття у момент часу T, якщо до цього прийняття не відбувалося.

У разі застосування теорії до оцінювання термінів первинних закупівель нового споживчого продукту висувається основне припущення: ймовірність (probability) $P(T)$ того, що первинні закупівлі здійснюватимуться у момент часу T за умови, що до цього закупівлі не здійснювалися, є лінійною функцією кількості $Y(T)$ попередніх покупців:

$$P(T) = p + \frac{q}{m} Y(T), \tag{1}$$

де $Y(0) = 0$, $P(0) = p$ — константа, величина якої відображає важливість новаторів у соціальній системі (коефіцієнт інновації), q / m — коефіцієнт нахилу лінійної функції, параметр q — коефіцієнт імітації.

Оскільки параметри моделі залежать від вибору масштабу часу, то можна вибрати таку одиницю вимірювання часу, що p відображатиме частку новаторів серед усіх наслідувачів [25]. Добуток $\frac{p}{m} Y(T)$ відображає тиски, які діють на імітаторів у разі збільшення кількості попередніх покупців. Для менших значень T вплив новаторів є більшим, ніж вплив імітаторів.

Згадане основне припущення теорії можна сформулювати у межах неперервної моделі та функції щільності моменту часу первинних закупівель, водночас лінійну частину рівності (1) назвемо вірогідністю.

Нехай протягом життєвого циклу продукту здійснюватиметься m його первинних закупівель. Оскільки цей продукт купують рідко, то кількість його одиничних продажів дорівнюватиме кількості його первинних закупівель протягом тієї частини часового інтервалу, де не було повторних продажів: із моменту початку повторних продажів продукту. Загальні продажі складатимуться як з первинних закупівель, так і повторних закупівель. Тоді частка (fraction) попередніх покупців серед первинних закупівель на момент часу T перших первинних закупівель становитиме

$$F(T) = \frac{Y(T)}{m}, \; F(0) = \frac{Y(0)}{m} = 0, \tag{2}$$

визначаючи частку решти покупців (потенціальний ринковий попит) як $1-F(T)$. Первинні закупівлі продукту здійснюють новатори, які впливають на перший доданок рівності (1), та імітатори, які впливають на другий доданок рівності (1) і в певному сенсі переймають досвід попередніх покупців. Кількість $Y(T)$ попередніх покупців не впливає на новаторів під час їхніх первинних закупівель.

З урахуванням рівностей (1) і (2) вірогідність закупівлі продукту в момент часу T за умови, що до цього часу закупівлі не здійснювалися, можна записати у вигляді

$$\frac{f(T)}{1-F(T)}=P(T)=p+qF(T), \tag{3}$$

де $f(0)=P(0)=p$, $F(T)=\int_0^T f(t)dt$, $f(t)$ — функція щільності в часі t.

Звідси загальна кількість покупок на інтервалі часу $(0,T)$ становитиме

$$m\int_0^T f(t)=mF(T)=Y(T)=\int_0^T S(t)dt, \tag{4}$$

де внаслідок рівності (3) функцію щільності продажів (sales) можна записати у вигляді

$$S(t)=mf(t)=mP(T)[1-F(T)]=P(T)[m-mF(T)],$$

а внаслідок рівностей (3), (4) матимемо

$$P(T)=p+qF(T)=p+\frac{q}{m}\int_0^T S(t)dt,\ mF(T)=Y(T)=\int_0^T S(t)dt;$$

$$S(T)=\left(p+\frac{q}{m}\int_0^T S(t)dt\right)\left(m-\int_0^T S(t)dt\right)=$$

$$=pm-p\int_0^T S(t)dt+q\int_0^T S(t)dt-\frac{q}{m}\left[\int_0^T S(t)dt\right]^2=pm+(q-p)Y(T)-\frac{q}{m}[Y(T)]^2; \tag{5}$$

$$\frac{dF}{dt}=f(T)=\frac{S(T)}{m}=p+(q-p)\frac{Y(T)}{m}-q\left[\frac{Y(T)}{m}\right]^2=$$

$$=p+(q-p)F(T)-q[F(T)]^2;\ t+C=\int\frac{dF}{p+(q-p)F-qF^2}.$$

Позначимо $a=-q$, $b=q-p$, $c=p$ і з урахуванням того, що

$$b^2-4ac=(q-p)^2+4pq=q^2-2qp+p^2+4pq=(p+q)^2>0,$$

скористаємося аналітичним виразом інтеграла від раціональної функції

$$\int\frac{dF}{c+bF+aF^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2aF+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2aF+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|=$$

$$=\frac{1}{p+q}\ln\left|\frac{q-p-2qF-q-p}{q-p-2qF+q+p}\right|=\frac{1}{p+q}\ln\left|\frac{-2p-2qF}{2q-2qF}\right|,$$

а також початковою умовою

$$0 + C = \frac{1}{p+q} \ln \left| \frac{-2p - 2q \cdot 0}{2q - 2q \cdot 0} \right| = \frac{1}{p+q} \ln \left| -\frac{p}{q} \right|.$$

Отже, враховуючи додатність значень p, q, F, отримуємо

$$\frac{1}{p+q} \ln \left(\frac{p}{q} \right) + t = \frac{1}{p+q} \ln \left| -\frac{p}{q} \right| + t = \frac{1}{p+q} \ln \left| \frac{-p - qF}{q(1-F)} \right| = \frac{1}{p+q} \ln \left[\frac{p + qF}{q(1-F)} \right],$$

$$t = \frac{1}{p+q} \left\{ \ln \left[\frac{p+qF}{q(1-F)} \right] - \ln \left(\frac{p}{q} \right) \right\} = \frac{1}{p+q} \ln \left[\frac{(p+qF)q}{q(1-F)p} \right] = \frac{1}{p+q} \ln \left[\frac{p+qF}{p(1-F)} \right],$$

$$\ln \{\exp[t(p+q)]\} = t(p+q) = \ln \left[\frac{p+qF}{p(1-F)} \right],$$

$$p\exp[t(p+q)] - pF\exp[t(p+q)] = p(1-F)\exp[t(p+q)] = p + qF,$$

$$p\exp[t(p+q)] - p = qF + pF\exp[t(p+q)] = F\{q + p\exp[t(p+q)]\},$$

$$F = \frac{p\{\exp[t(p+q)] - 1\}}{p\exp[t(p+q)] + q} < 1,$$

$$F(T) = \frac{p\{\exp[T(p+q)] - 1\}}{p\exp[T(p+q)] + q}, \tag{6}$$

$$f = \frac{dF}{dt} = \frac{p(p+q)\exp[t(p+q)]\{p\exp[t(p+q)] + q - p\exp[t(p+q)] + p\}}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^2} =$$

$$= \frac{p(p+q)^2 \exp[t(p+q)]}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^2}, \tag{7}$$

$$S(t) = mf = \frac{mp(p+q)^2 \exp[t(p+q)]}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^2},$$

$$\frac{dS}{dt} = mp(p+q)^2 \frac{(p+q)\exp[t(p+q)]\{p\exp[t(p+q)] + q\}^2}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^4} -$$

$$- mp(p+q)^2 \frac{2\{p\exp[t(p+q)] + q\} p(p+q)\exp[t(p+q)]}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^4} =$$

$$= mp(p+q)^3 \exp[t(p+q)] \frac{\{p\exp[t(p+q)] + q\}\{q - p\exp[t(p+q)]\}}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^4}.$$

Отже, для $q \geq p$ і достатньо малих значень t функція $S(t)$ зростає, досягаючи максимуму за умови

$$0 = q - p\exp[t(p+q)], \ \exp[t(p+q)] = \frac{q}{p}, \ t(p+q) = \ln \left(\frac{q}{p} \right),$$

$$T^* = t = \frac{\ln q - \ln p}{p+q} \geq 0 \text{ для } q \geq p. \tag{8}$$

При цьому значення коефіцієнта імітації повинно бути великим. Тоді

$$\exp[t(p+q)] = \exp\left[\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right] = p^{-1}q,$$

$$S(T^*) = \frac{mp(p+q)^2 p^{-1} q}{\{pp^{-1}q + q\}^2} = \frac{m(p+q)^2 q}{4q^2} = \frac{m(p+q)^2}{4q}. \quad (9)$$

Враховуючи рівність (5), отримуємо

$$\frac{m(p+q)^2}{4q} = S(T^*) = pm + (q-p)Y(T^*) - \frac{q}{m}[Y(T^*)]^2,$$

$$m^2(p+q)^2 = 4m^2 pq + 4mq(q-p)Y(T^*) - 4q^2[Y(T^*)]^2,$$

$$Y(T^*) = \frac{4mq(q-p) \pm \sqrt{D}}{8q^2} = \frac{m(q-p)}{2q} \geq 0, \quad (10)$$

де дискримінант дорівнює

$$D = 16m^2 q^2 (q-p)^2 - 16q^2[m^2(p+q)^2 - 4m^2 pq] =$$

$$= 16m^2 q^2[(q-p)^2 - (p+q)^2 + 4pq] =$$

$$= 16m^2 q^2 (q^2 - 2qp + p^2 - p^2 - 2pq - q^2 + 4pq) = 0.$$

Якщо $q < p$, то функція $S(t)$ досягає свого максимуму для $t = 0$:

$$S(0) = mf(0) = \frac{mp(p+q)^2 \exp[0 \cdot (p+q)]}{\{p\exp[0 \cdot (p+q)] + q\}^2} = \frac{mp(p+q)^2}{(p+q)^2} = mp, \quad (11)$$

$$S(0) - S(T^*) = mp - \frac{m(p+q)^2}{4q} = m\frac{4pq - p^2 - 2pq - q^2}{4q} = -\frac{m}{4q}(p-q)^2 \leq 0.$$

Оскільки для прибуткових продуктів, як правило, відношення p/q є близьким до 0, то обсяг S продажів досягатиме свого максимуму, коли сукупний обсяг продажів наближатиметься до $m/2$, перевищуючи критичну масу [26–29]:

$$Y(T^*) = \frac{m(q-p)}{2q} = m\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2q}\right).$$

ОЧІКУВАНА ТРИВАЛІСТЬ ВХОДЖЕННЯ НОВОГО ПРОДУКТУ ДО РИНКУ

Якщо довільно вибрати покупця серед m покупців, який здійснюватиме первинну закупівлю продукту в деякий момент часу, то очікувана тривалість часу T до такої закупівлі з урахуванням рівності (7) становитиме

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty \frac{tp(p+q)^2 \exp[t(p+q)]}{\{p\exp[t(p+q)] + q\}^2} dt =$$

$$= \int_1^\infty \frac{\ln z}{p+q} \cdot \frac{p(p+q)^2 z}{(pz+q)^2} \cdot \frac{dz}{(p+q)z} = p\int_1^\infty \frac{\ln z}{(pz+q)^2} dz = \frac{1}{p}\int_1^\infty \frac{\ln z}{(z+p^{-1}q)^2} dz,$$

де $z = \exp[t(p+q)]$, $dz = (p+q)zdt$, $\ln z = t(p+q)$. Застосовуючи вираз

$$\int \frac{\ln x}{(x+a)^2}dx = -\frac{\ln x}{x+a} + \frac{1}{a}\ln\frac{x}{x+a}$$

для $a = p^{-1}q$, отримуємо

$$E(T) = \frac{1}{p}\left\{\frac{\ln 1}{1+p^{-1}q} - \frac{p}{q}\ln\frac{1}{1+p^{-1}q}\right\} = \frac{1}{q}\ln(1+p^{-1}q) = \frac{1}{q}\ln\left(\frac{p+q}{p}\right). \quad (12)$$

Продукт приймають новатори та імітатори: на початку процесу прийняття продукту більша роль відводиться новаторам, але пізніше їхній вплив зменшуватиметься і збільшуватиметься вплив імітаторів. Якщо інновацією є споживчий товар тривалого користування (скажімо, телевізор, газонокосарка, кімнатний кондиціонер, стільниковий мобільний телефон), то продажі $S(t)$ протягом періоду, в якому попит складається з первинних покупок, будуть пропорційними функції $f(t)$ щільності прийняття інновації. Якщо продажі складаються з повторних чи багаторазових закупівель інноваційного продукту, то рівні прийняття продукту і продажів продукту вимірюються окремо.

Теоретично розподілом може бути експоненціальний чи логістичний розподіл, а також розподіл Вейбулла. Оскільки експоненціальний розподіл не потребує пам'яті (memoryless), то він не відображає суті поширення інновації. Застосовуючи логістичний розподіл і розподіл Вейбулла, одержуємо результати, подібні до моделі Басса, на даних не кількох, а багатьох спостережень: отриманий розподіл (6) дає кращі прогнози на будь-якій кількості спостережень. Логістичну постановку Басса дещо модифікували й узагальнювали, враховуючи дифузійні моделі. З огляду на характер даних, доступних для задач (наближеного) прогнозування продажів більшості нових продуктів, і (недостатньої) кількості відповідної інформації існують суттєві труднощі з надійною екстраполяцією початкового збуту нового продукту: для побуди вдосконалених моделей прогнозування збуту потрібно зважати на обмеженість даних. Логістична постановка Басса [1, 5, 6] відображає суть процесу інновації, включаючи ефекти дифузії та заміщення.

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ

Перейдемо від базової неперервної моделі (5) до дискретного аналога

$$S_T = a + bY_{T-1} + c(Y_{T-1})^2, \quad (13)$$

де S_T — продажі в момент часу T; $Y_{T-1} = \sum_{t=0}^{T-1} S_t$ — кумулятивні продажі до моменту часу $(T-1)$ включно; a — параметр для оцінювання pm; b — параметр для оцінювання $(q-p)$; c — параметр для оцінювання $(-m^{-1}q)$. Звідси

$$b = q - p = -mc - m^{-1}a,\ cm^2 + bm + a = 0,$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \quad (14)$$

$$q = -mc = \frac{m(b \mp p\sqrt{b^2 - 4ac})}{2},\ p = m^{-1}a = \frac{2ac}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (15)$$

З рівняння (13) випливає

$$0 = \frac{dS_T}{dY_{T-1}} = b - 2cY_{T-1},$$

звідси унаслідок рівності (10) отримаємо

$$Y_{T-1}^{*} = -\frac{b}{2c} = \frac{m(q-p)}{2q} = Y(T^{*}),$$

$$S_T(Y_{T-1}^{*}) = a + bY_{T-1}^{*} + c(Y_{T-1}^{*})^2 = a - \frac{b^2}{2c} + \frac{b^2 c}{4c^2} = a - \frac{b^2}{2c} + \frac{b^2}{4c} = a - \frac{b^2}{4c} =$$

$$= a - c\left(\frac{b}{2c}\right)^2 = pm + \frac{q}{m}\frac{m^2(q-p)^2}{4q^2} = \frac{4pmq + m(q-p)^2}{4q} =$$

$$= \frac{m(4pq + q^2 - 2qp + p^2)}{4q} = \frac{m(p+q)^2}{4q} = S(T^{*})$$

з урахуванням рівності (9). Отже, з рівняння $S_T(Y_{T-1}^{*}) = S(T^{*})$ можна зробити висновок, що максимальне значення продажів S як функції часу збігається з максимальним значенням продажів S як функції кумулятивних продажів.

Для перевірки моделі Басса було здійснено регресійний аналіз оцінок параметрів з використанням річних даних часових рядів для 11 різних споживчих товарів тривалого користування у різні періоди часу (електричні холодильники у 1920–1940 рр. (період прогнозування 1926–1940 рр.); морозильні камери (період прогнозування 1947–1961 рр.); чорно-білі телевізори (період прогнозування 1949–1961 рр.); кімнатні кондиціонери у 1946–1961 рр. (період прогнозування 1950–1961 рр.); сушарки для білизни (період прогнозування 1950–1961 рр.); газонокосарки (період прогнозування 1949–1961 рр.); автоматичні кавоварки у 1948–1961 рр. (період прогнозування 1951–1961 рр.); парові праски у 1949–1960 рр. (період прогнозування 1950–1961 рр.); пом'якшувачі води (період прогнозування 1950–1961 рр.); електричні покривала для ліжок у 1949–1961 рр. (період прогнозування 1950–1961 рр.); програвачі у 1952–1961 рр. (період прогнозування 1953–1958 рр.)). Періоди часу визначалися суб'єктивною оцінкою довговічності продукту, а також обмеженими опублікованими даними щодо норм списання та циклів повторних закупівель. Обиралися такі періоди часу, де повторні закупівлі не були важливими. Основне джерело даних — Statistical Abstract of the United States, публікація Бюро перепису населення США (United States Census Bureau), установи Міністерства торгівлі США (United States Department of Commerce). Це видання друкувалось щороку з 1878 по 2011 рр., характеризуючи соціальні, політичні, економічні умови США.

Крім оцінок a, b, c у регресійній залежності (11) для кожного товару були обчислені відповідно їхні дисперсії σ_a, σ_b, σ_c, відношення $(\sigma_a)^{-1}a$, $(\sigma_b)^{-1}b$, $(\sigma_c)^{-1}c$, а також коефіцієнт R^2 детермінації. Тоді, користуючись співвідношеннями (13), можна обчислити оцінки m, p, q. Для кожного товару регресійна оцінка c має від'ємне значення, як цього потребує зміст моделі. Для кожного товару оцінки m мають вигляд правдоподібних. Одним з найважливіших результатів регресійного аналізу є неявна оцінка загальної кількості первинних закупівель, які будуть здійснені протягом життєвого циклу продукту: для кожного товару рівняння регресії задовільно описує загальний тренд динаміки зростання продажів, а відхилення від тренду можна пояснювати короткостроковими змінами доходу (які, в свою чергу, корелюються з економічним зростанням чи спадом). Для кожного товару рівняння регресії задовільно прогнозує піковий обсяг продажів і момент часу його досягнення.

Відповідність рівняння регресії стосовно фактичних продажів є відносно слабким тестом спроможності моделі, оскільки полягає у порівнянні минулих спостережень з оцінками цього рівняння. Сильнішим тестом є спроможність базової моделі за змінною часу та за визначеними регресійними оцінками значень параметрів: для кожного товару за оцінками m, p, q можна передбачити момент часу піку продажів на основі рівності (8) і порівняти його з фактичним часом (період часу визначається так, щоб продажі вперше перевищили значення mp, яке дорівнює $S(0)$ унаслідок співвідношення (11)); можна також передбачити обсяг піку продажів на основі рівності (9) і порівняти його з фактичним. Для електричних холодильників передбачений момент часу піку продажів був найдовшим (близько 20 років), а фактичний момент часу піку продажів не визначався через період Другої світової війни. Найкоротшим передбачений момент часу піку продажів був для програвачів (5 років), парових прасок (7 років), чорно-білих телевізорів і сушарок для одягу (8 років).

За наявності оцінок параметрів m, p, q можна передбачати продажі

$$S(t)=\frac{mp(p+q)^2\exp[t(p+q)]}{\{p\exp[t(p+q)]+q\}^2}$$

протягом довготривалого інтервалу часу й оцінювати точність прогнозів для кожного товару відповідно до величини коефіцієнта детермінації. Найменшою ця величина виявилася для чорно-білих телевізорів унаслідок значних (але швидкоплинних) відхилень від тренду для 1950 р. і 1958 р., але вона не вплинула на коректність тренду загалом: для зазначених вище товарів модель Басса було перевірено і верифіковано. Ця модель відіграла і продовжує відігравати важливу роль у розробленні та впровадженні нових високотехнологічних продуктів.

Під час пандемії новими продуктами є вакцини. Для оцінювання параметрів моделі (13) скористаємося даними [30] про дози вакцини від COVID-19, введені на 100 осіб (загальна кількість введених доз, поділена на загальну чисельність населення країни). Для вакцин, які потребують декількох доз, підраховується кожна окрема доза; оскільки одна і та ж особа може отримати більше однієї дози, кількість доз на 100 осіб може перевищувати 100 [30]. У табл. 1 курсивом зображено значення, які не спостережуються, але генеруються, зокрема, методами емпіричних середніх [8]. Аналізувалися дані для України та Білорусі, враховуючи успішний досвід міжнародного проєкту «Розробка методів, алгоритмів і інтелектуальної аналітичної системи для обробки і аналізу різнорідних клінічних та біомедичних даних з метою вдосконалення діагностики складних захворювань» (М/99-2019, М/37-2020 за підтримки Міністерства освіти та науки України), що був виконаний в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України спільно з Об'єднаним інститутом проблем інформатики НАН Білорусі (Ф19УКРГ-005 за підтримки Білоруського республіканського фонду фундаментальних досліджень) [31–34].

Дози вакцини від COVID-19, введені на 100 осіб, за тижнями першого півріччя 2021 р. наведено у табл. 1. Обчислені за допомогою програмного забезпечення MS Excel оцінки параметрів залежності (13) за даними табл. 1 є задовільними для подальших практичних спостережень у другому півріччі 2021 р. Оцінки параметрів a, b, c регресії (12), значення параметрів m, p, q з рівностей (14), (15), значення $S(T^*)$, $Y(T^*)$, T^*, $E(T)$ з рівнянь (9), (10), (8), (12) відповідно наведено в табл. 2.

Таблиця 1

Країна	Дози вакцини за перше півріччя 2021 р.									
	23.02	2.03	9.03	16.03	23.03	30.03	6.04	13.04	20.04	27.04
Україна		0.02	0.05	*0.18*	0.36	0.53	0.73	0.92	1.09	1.28
Білорусь	0.22	0.22	0.22	*0.28*	*0.39*	*0.58*	*0.85*	*1.43*	*2.24*	*2.75*
		4.05	11.05	18.05	25.05	1.06	8.06	15.06	22.06	29.06
Україна		1.74	2.02	2.19	2.26	2.40	3.04	3.58	4.01	4.42
Білорусь		*3.04*	*3.59*	*4.33*	*4.88*	*5.61*	*6.74*	*7.65*	*8.53*	*9.40*

Таблиця 2

Країна	Значення параметрів										
	R^2	a	b	$10^6 c$	m	q	$10^6 p$	$S(T^*)$	$Y(T^*)$	T^*	$E(T)$
Україна	0.73	7.85	0.11	– 33.16	3291	0.11	2384	94	1610	34	35
Стандартна похибка		6.50	0.08	180.42							
Білорусь	0.90	7.47	0.20	– 115.07	1739	0.20	4298	91	851	19	19
Стандартна похибка		6.95	0.04	49.60							

ВИСНОВКИ

За належної організації науково-практичних досліджень класичну модель Басса можна застосовувати для моделювання стохастичних процесів, що описують поширення пандемії в інших державах, а також в областях і районах України. Таке застосування потребуватиме ретельної перевірки вхідної інформації, верифікації та генерації вхідних даних, можливих модифікацій класичної моделі, розвитку й обґрунтування відповідних методів оцінювання, відповідної комп'ютерної реалізації алгоритмічного і програмного забезпечення, статистичного аналізу результатів оцінювання. До того ж сучасні розподілені інформаційні технології науково-організаційної діяльності НАН України можна застосовувати для розроблення системних засобів і заходів з охорони здоров'я [35].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bass F.M. A new product growth for model consumer durables. *Management Science*. 1969. Vol. 15, N 5. P. 215–227.
2. Bass F.M. The theory of stochastic preference and brand switching. *Journal of Marketing Research*. 1974. Vol. 11, N 1. P. 1–20.
3. Bass F.M., Norton J.A. A diffusion theory model of adoption and substitution for successive generations of high-technology products. *Management Science*. 1987. Vol. 33, N 9. P. 1069–1086.
4. Mahajan V., Muller E., Bass F. New product diffusion models in marketing: a review and directions for research. *Journal of Marketing*. 1990. Vol. 54, N 1. P. 1–26.

5. Bass F.M. A new product growth model for consumer durables. Institute Paper N 175. Insitute for Research in the Behavioral, Economic and Management Sciences. Lafayette, IN: Herman C. Krannert Graduate School of Industrial Administration; Purdue University, 1967. 33 p.
6. Bass F.M. A dynamic model of market share and sales behavior. *Proc. Winter Conference American Marketing Association.* Chicago, IL: AMA, 1963. P. 263–276.
7. Горбачук М.Л., Пивторак Н.И. О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением. *Дифференциальные уравнения.* 1985. Т. 21, № 8. С. 1317–1324.
8. Knopov P.S., Deriyeva O.N. Estimation and control problems for stochastic partial differential equations. New York: Springer, 2013. 183 p.
9. Наконечний О.Г., Капустян О.А., Чикрій А.О. Наближені гарантовані середньоквадратичні оцінки функціоналів від розв'язків параболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т. 55, № 5. С. 95–105.
10. Кнопов П.С., Норкін В.І., Атоєв К.Л., Горбачук В.М., Кирилюк В.С., Біла Г.Д., Самосьонок О.С., Богданов О.В. Деякі підходи використання стохастичних моделей епідеміології до проблеми COVID-19. Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2020. 17 с.
11. Вагис А.А., Гупал А.М., Гупал Н.А. Определение групп рисков при заболеваниях, вызванных COVID-19. *Кібернетика та комп'ютерні технології.* 2020. № 3. С. 25–31.
12. Yakovlev S., Bazilevych K., Chumachenko D., Chumachenko T., Hulianytskyi L., Meniailov I., Tkachenko A. The concept of developing a decision support system for the epidemic morbidity control. *CEUR Workshop Proceedings.* 2020. Vol. 2753. P. 265–274.
13. Gurumurthy K., Mukherjee A. The Bass model: A parsimonious and accurate approach to forecasting mortality caused by COVID-19. *International Journal of Pharmaceutical and Healthcare Marketing.* 2020. Vol. 14, N 3. P. 349–360.
14. Allenby G., Gengler L., Sood A., Tellis G.J., Winer R.S. Commentaries: The Bass model: A parsimonious and accurate approach to forecasting mortality caused by COVID-19. *International Journal of Pharmaceutical and Healthcare Marketing.* 2020. Vol. 14, N 3. P. 361–365.
15. Горбачук В., Гавриленко С. Аналіз динаміки поширення COVID-19 в Україні та сусідніх державах 1–10 травня 2020 р. *Global and Regional Problems of Informatization in Society and Nature Using 2020.* Kyiv: National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 2020. С. 56–60.
16. Горбачук В.М., Шулінок Г.О. Моделювання поведінки фармацевтичної фірми. *Теорія оптимальних рішень.* 2017. С. 147–153.
17. Gorbachuk V.M. An asymmetric Cournot–Nash equilibrium under uncertainty as a generalized Cournot–Stackelberg–Nash equilibrium. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 4. P. 471–477.
18. Ermoliev Yu., Ermolieva T., Kahil T., Obersteiner M., Gorbachuk V., Knopov P. Stochastic optimization models for risk-based reservoir management. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 1. P. 55–64.
19. Gorbachuk V., Ermoliev Y., Zagorodniy A., Bogdanov V., Ermolieva T., Rovenskaya E., Komendantova N., Borodina O., Knopov P., Norkin V., Gaivoronski A. Iterative stochastic quasigradient procedures for robust estimation, machine learning and decision making problems. *31st European Conference on Operational Research* (July 11–14, 2021, Athens, Greece). The Association of European Operational Research Societies, 2021. P. 184–185.
20. Gorbachuk V.M. Generalized Cournot–Stackelebrg–Nash equilibrium. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2006. Vol. 42, N 1. P. 25–33.
21. Gorbachuk V., Dunaievskyi M., Suleimanov S.-B. Modeling of agency problems in complex decentralized systems under information asymmetry. *IEEE Conference on Advanced Trends in Information Theory* (December 18–20, Kyiv, Ukraine). Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2019. P. 449–454.

22. Bartlett M.S. Stochastic population models in ecology and epidemiology. London: Methuen, 1960. 90 p.

23. Бартлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1958. 384 с.

24. Мэнсфилд Э. Экономика научно-технического прогресса. Москва: Прогресс, 1970. 237 с.

25. Роджерс Е.М. Дифузія інновацій. Київ: Києво-Могилянська академія, 2009. 592 с.

26. Krivonos Y., Gorbachuk V., Wojcik W., Smailova S. Time series regression and Granger causality. *Current Problems in Information and Computational Technologies*. Vol. 2. Wojcik W., Sikora J. (Eds.). Lublin: Politechnika Lubelska, 2012. P. 7–49.

27. Горбачук В.М. Визначення критичної маси поширення мережевих продуктів. *Науково-технічна інформація*. 2013. № 4. С. 50–55.

28. Gorbachuk V., Chumakov B. A computable critical mass on market of new network product. Transport Systems and Logistics. Chisinau: Academia de Transporturi, Informatica şi Comunicaţii, 2013. P. 272–281.

29. Gorbachuk V., Dunaievskyi M., Syrku A. Epidemic effects in network industries. *International Conference on Software Engineering* (April 12–14, 2021, Kyiv). Kyiv: National Aviation University, 2021. P. 68–72.

30. Mathieu E., Ritchie H., Ortiz-Ospina E., Roser M., Hasell J., Appel C., Giattino C., Rodes-Guirao L. A global database of COVID-19 vaccinations. *Nature Human Behavior*. 2021. Vol. 5. P. 947–953.

31. Bardadym T.O., Gorbachuk V.M., Novoselova N.A., Osypenko S.P., Skobtsov V.Yu. Intelligent analytical system as a tool to ensure the reproducibility of biomedical calculations. *Штучний інтелект*. 2020. № 3. P. 67–81.

32. Новоселова Н.А., Скобцов В.Ю., Том І.Е., Бардадим Т.А., Горбачук В.М., Осипенко С.П. Сучасні можливості розробки та організації інтелектуальних аналітичних систем. *Глушковські читання*. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2020. С. 113–116.

33. Горбачук В., Скобцов Ю., Том І. Економічні аспекти забезпечення здоров'я в інформаційну еру. *National Health as Determinant of Sustainable Development of Society*. Dubrovina N., Filip S. (Eds.). Bratislava, Slovakia: School of Economics and Management in Public Administration, 2021. P. 697–720.

34. Bardadym T., Gorbachuk V., Novoselova N., Osypenko S., Skobtsov V., Tom I. On biomedical computations in cluster and cloud environment. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2021. N 2. P. 76–84.

35. Gorbachuk V., Gavrilenko S., Golotsukov G., Nikolenko D. To digital technologies of patent processing for development of critical products. *Information and Digital Technologies 2021* (June 22–24, 2021, Zilina, Slovakia). 2021. P. 131–141.

V.M. Gorbachuk, M.S. Dunaievskyi, A.A. Syrku, S.-B. Suleimanov

SUBSTANTIATION OF THE DIFFUSION MODEL FOR INNOVATION IMPLEMENTATION AND ITS APPLICATION TO THE PROPAGATION OF VACCINATIONS

Abstract. The article examines in detail the prerequisites and assumptions of the classical Bass model of innovation diffusion in order to apply it to the modeling of topical stochastic processes related to the pandemic. The Bass model has proven its versatility and applicability to various environments. The article presents a thorough mathematical substantiation of the model properties for the purpose of its further development, search of uncertainty parameters and observed variables, based on the theories of evolutionary equations and stochastic processes. The paper provides realistic results of the Bass model parameter estimation for vaccination in Ukraine and Belarus on the weekly data of the first half of 2021 and suggests similar studies for other countries as well as regions and districts of Ukraine.

Keywords: new product, critical mass, pandemic, marketing, health care, stochastic processes.

Надійшла до редакції 10.09.2021