ПРО БЛОКИ У ГРАФАХ ІЗ ПАРНИМИ ТА НЕПАРНИМИ ВІДСТАНЯМИ МІЖ НЕ ТОЧКАМИ З'ЄДНАННЯ

К.О. АНТОШИНА, С.О. КОЗЕРЕНКО

Вершина графа називається точкою з'єднання, якщо її видалення збільшує кількість компонент зв'язності. Наприклад, для зв'язного графа G вершина $u \in V(G)$ є точкою з'єднання, якщо граф $G - u$ незв'язний. Дерево – це зв'язний ациклічний граф. Легко бачити, що не точками з'єднання дерева є в точності вершини степеня 1, які називаються висячими. У роботі [3] досліджувався спеціальний клас графів під назвою сильно унікально незалежні графи. Це такі графи G, в яких існує єдина максимальна незалежна множина вершин $A \subset V(G)$, що її доповнення $V(G)\backslash A$ теж незалежна в G. Зокрема, було показано, що сильно унікально незалежні дерева (надалі просто SUIT) характеризуються як дерева із парними відстанями між їхніми висячими вершинами. Узагальнюючи цей клас дерев, у роботі [1] було розглянуто зв'язні графи із парними відстанями між їхніми не точками з'єднання (NCE-графи) та графи з цими непарними відстанями (NCO-графи).

Твердження 1. [1] *Зв'язний граф є NCE-графом тоді й тільки тоді, коли він двочастковий, причому всі його не точки з'єднання лежать у спільній частці.*

Реберним графом $L(G)$ графа G називається граф перетинів родини $E(G)$. Тобто, вершинами $L(G)$ є ребра G, а ребрами – пари ребер G, які мають спільну вершину.

Теорема 1. [1] *Зв'язний граф є NCO-графом тоді й тільки тоді, коли він ізоморфний реберному графу деякого $SUIT$'а.*

Граф називається двозв'язним, якщо він зв'язний та не має точок з'єднання. Блок у графі – це його максимальний двозв'язний підграф. Графом блоків $B(G)$ графа G називається граф перетинів множин вершин усіх блоків у G. Таким чином, вершинами $B(G)$ є блоки G, а ребрами – пари блоків, які містять (єдину) спільну точку з'єднання.

Теорема 2. [2] *Граф H ізоморфний графу блоків деякого графа G тоді й лише тоді, коли в H кожен блок є повним підграфом.*

Наприклад, дерева є графами блоків. Блок у графі називатимемо висячим, якщо він має не більше одної точки з'єднання.

Твердження 2. *Кожен висячий блок у NCE-графі є висячим ребром.*

Із Твердження 2 одразу слідує, що будь-який NCE-граф із хоча би двома вершинами має хоча би дві висячі вершини. Наступна теорема описує NCE-графи з рівно двома висячими вершинами. Позначимо через $B_2(G)$ підграф графа блоків $B(G)$, який породжений усіма мостами в G.

Теорема 3. *Граф G є NCE-графом із рівно двома висячими вершинами тоді й тільки тоді, коли G – непарний ланцюг або G не ланцюг і виконані наступні умови:*

(1) *граф блоків $B(G)$ є ланцюгом із хоча би двома вершинами;*
(2) *кожен блок у G ізоморфний K_2 або $K_{2,m}$ для $m \geq 2$;*
(3) *кожен блок $B \simeq K_{2,m}$ із $m \geq 2$ у G має точно дві точки з'єднання в G, які складають частку B;*
(4) *кожна компонента зв'язності $B_2(G)$, яка не містить висячі вершини з $B(G)$, має парну кількість вершин;*
(5) *кожна компонента зв'язності $B_2(G)$, яка містить висячі вершини з $B(G)$, має непарну кількість вершин.*

Використовуючи схожу ідею, що і в доведенні теореми 2, отримано наступний результат.

Твердження 3. *Кожен зв'язний граф блоків ізоморфний графу блоків деякого NCE-графа.*

Для NCO-графів це питання також має доволі просту відповідь.

Твердження 4. *Граф H є графом блоків деякого NCO-графа тоді й тільки тоді, коли H є SUIT'ом.*

Зауважимо. що оскільки реберні графи дерев збігаються з їхніми графами блоків, то теорему 1 можна вважати описом графів блоків SUIT'ів.

Література

[1] K. Antoshyna and S. Kozerenko, *Graphs with odd and even distances between non-cut vertices* // preprint submitted to publication, 2023.
[2] F. Harary, *A characterization of block graphs* // Canad. Math. Bull. **6** (1963), 1–6.
[3] G. Hopkins and W. Staton, *Graphs with unique maximum independent sets* // Discrete Math. **57(3)** (1985), 245–251.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: kantoshyna@imath.kiev.ua

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Інститут математики НАН України
Київська школа економіки, Київ, Україна
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net