УДК 517.5+517.17+517.18+511.72

Сербенюк С. О.

ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕНІ СИСТЕМАМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ТЕРМІНАХ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ РЯДАМИ КАНТОРА

У статті вивчаються диференціальні, інтегральні та інші властивості функцій, аргумент яких представлений рядом Кантора. Вказано системи функціональних рівнянь, єдиними розв'язками яких у класі обмежених і визначених на $[0;1]$ функцій є досліджувані функції. Доведено, за яких умов розв'язок такої системи рівнянь є функцією розподілу випадкової величини $\eta = \Delta^D_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ з незалежними D-символами або ніде не диференційовною функцією.

Ключові слова: ряд Кантора, D-зображення, системи функціональних рівнянь, сингулярна функція, ніде не диференційовна функція, функція розподілу.

Вступ

У наш час важливим інструментом для дослідження динамічних систем, розподілів випадкових величин типу Джессена — Вінтнера, моделювання реальних процесів і явищ є сингулярні та неперервні ніде не диференційовні функції. Останні є функціями зі складною локальною будовою, оскільки неперервні ніде не диференційовні функції мають нескінченну кількість максимумів та мінімумів у довільному околі будь-якої точки з області визначення, а значення похідної сингулярної функції як дорівнює нулю, так і може відрізнятися від нуля (зокрема, не існувати чи дорівнювати нескінченності) в точках довільного як завгодно малого інтервалу області визначення, що має непорожній переріз зі спектром.

Чіткий апарат, необхідний для вивчення функцій зі складною локальною будовою, нині вдосконалюється, адже недостатність системи ефективних методів дослідження таких функцій зумовлена повільним розвитком загальних теорій сингулярних, ніде не диференційовних функцій та дослідженням лише окремих представників сім'ї таких функцій протягом останніх десятиліть. Для задання та дослідження функцій зі складною локальною будовою використовують автомати зі скінченною чи нескінченною пам'яттю, перетворювачі цифр та, за умови існування самоафінних властивостей функції, системи функціональних рівнянь [1; 2]. Проте всі ці методи ґрунтуються на використанні різних представлень дійсних чисел. Зокрема, s-кового зображення, поліосновного $\tilde{Q}$-зображення, а також представлення дійсних чисел рядами Енгеля, Люрота, Сильвестера, Остроградського 1-го та 2-го видів і т. д. [3–8].

У цій статті досліджуються функції, що задаються системами функціональних рівнянь та аргументи яких представлені знакододатніми [9] рядами Кантора. Останні ряди є узагальненням s-кового представлення.

Об'єкт дослідження

Нехай (d_n) — фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, (A_n) — послідовність множин $A_n \equiv \{0, 1, \ldots, d_n - 1\}$.

Нехай $[0;1] \ni x$ — довільне число, представлене рядом Кантора:

$$x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}, \qquad (1)$$

де $\varepsilon_n \in A_n$.

Оператором зсуву цифр представлення числа x рядом Кантора (1) називається відображення $\hat{\varphi}$, задане таким чином:

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_2 d_3 \ldots d_n}.$$

Тобто $\hat{\varphi}(x) = d_1 x - \varepsilon_1(x)$ і $\hat{\varphi}(x) = d_1 \Delta^D_{0\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n\ldots}$

k-кратне застосування оператора $\hat{\varphi}$ до числа x призводить до оператора $\hat{\varphi}^k$:

$$\hat{\varphi}^k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_{k+1} d_{k+2} \ldots d_n} \equiv \equiv d_1 d_2 \ldots d_k \Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}\varepsilon_{k+3}\ldots}.$$

Крім того, варто відмітити, що

$$d_1 d_2 \ldots d_{k-1} \Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1} i\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}\varepsilon_{k+3}\ldots} = = \frac{i}{d_k} + \frac{\hat{\varphi}^k(x)}{d_k} = \hat{\varphi}^{k-1}(x). \qquad (2)$$

Нехай заданою є матриця $P = \|p_{i,n}\|$ така, що $p_{i,n} \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, та $i = \overline{0, d_n - 1}$, $\sum_{i=0}^{d_n-1} p_{i,n} = 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=1}^{\infty} p_{i_n,n} = 0$ для будь-якої послідовності (i_n).

Розглянемо нескінченну систему функціональних рівнянь

$$f(\hat{\varphi}^k(x)) = \beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} + p_{\varepsilon_{k+1},k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(x)), \quad (3)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varepsilon_{k+1} \in A_{k+1}$ та

$$\beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \varepsilon_{k+1} = 0; \\ \sum_{i=0}^{\varepsilon_{k+1}-1} p_{i,k+1}, & \text{якщо } \varepsilon_{k+1} \neq 0. \end{cases}$$

Система рівнянь (3) в силу рівності (2) є еквівалентною нескінченній системі

$$f\left(\frac{i + \hat{\varphi}^k(x)}{d_k}\right) = \beta_{i,k} + p_{i,k} \cdot f(\hat{\varphi}^k(x)), \quad (4)$$

де $k = 1, 2, \dots$, $i \in A_k$.

Теорема 1. *Система функціональних рівнянь* (4) *у класі обмежених та визначених на відрізку* $[0; 1]$ *функцій має єдиний розв'язок, який має вигляд*

$$F(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\varepsilon_k(x),k} \prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n(x),n}\right). \quad (5)$$

Доведення. У силу системи (3) та визначеності функції F в усіх точках відрізка $[0; 1]$, отримаємо

$$\begin{aligned} F(x) &= \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1} \cdot f(\hat{\varphi}(x)) = \\ &= \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1} \cdot \left(\beta_{\varepsilon_2,2} + p_{\varepsilon_2,2} \cdot f(\hat{\varphi}^2 x)\right) = \\ &= \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1}\beta_{\varepsilon_2,2} + \\ &\quad + p_{\varepsilon_1,1}p_{\varepsilon_2,2} \cdot \left(\beta_{\varepsilon_3,3} + p_{\varepsilon_3,3} \cdot f(\hat{\varphi}^3 x)\right) = \dots = \\ &= \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1}\beta_{\varepsilon_2,2} + \beta_{\varepsilon_3,3}p_{\varepsilon_1,1}p_{\varepsilon_2,2} + \dots + \\ &\quad + \beta_{\varepsilon_k,k} \prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n,n} + \left(\prod_{n=1}^{k} p_{\varepsilon_n,n}\right) f(\hat{\varphi}^k(x)). \end{aligned}$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} \left(\beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\beta_{\varepsilon_k(x),k} \prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n(x),n}\right)\right) = = f(\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_m\dots}),$$

оскільки F — визначена та обмежена на $[0; 1]$ і

$$\prod_{n=1}^{k} p_{\varepsilon_n,n} \leq \prod_{n=1}^{k} \left(\max_{i=\overline{0,d_n-1}} p_{i,n}\right) \leq p_M^k \to 0, \quad k \to \infty,$$

де $p_M = \max_{n=\overline{1,k}} p_{\varepsilon_n,n}$.

Легко помітити, що $F(x) = x$ за умови, що для всіх $n \in \mathbb{N}$: $p_{i,n} = 1/d_n$.

Неперервність

Лема 2. *Функція* $y = F(x)$ *є коректно означеною в довільній точці відрізка* $[0; 1]$.

Доведення. Нехай x — D-раціональне число. Тобто

$$x = \Delta^D_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(0)} = = \Delta^D_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\dots}.$$

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} \delta &= F(\Delta^D_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\dots}) - \\ &\quad - F(\Delta^D_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(0)}) = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j}\right) \cdot (-\beta_{\varepsilon_n,n} + \beta_{\varepsilon_n-1,n} + \\ &\quad + \beta_{d_{n+1}-1,n+1}p_{\varepsilon_n-1,n} + \\ &\quad + \beta_{d_{n+2}-1,n+2}p_{\varepsilon_n-1,n}p_{d_{n+1}-1,n+1} + \dots) = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j}\right) \cdot \big(-\beta_{\varepsilon_n,n} + \beta_{\varepsilon_n-1,n} + \\ &\quad + (1 - p_{d_{n+1}-1,n+1})p_{\varepsilon_n-1,n} + \\ &\quad + (1 - p_{d_{n+2}-1,n+2})p_{\varepsilon_n-1,n}p_{d_{n+1}-1,n+1} + \dots\big) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Функція* F *є:*

- *неперервною;*
- *монотонно неспадною, зокрема, строго зростаючою за умови, коли всі елементи* $p_{i,n}$ *матриці* P *є додатними.*

Доведення. Неперервність. Нехай $[0; 1] \ni x_0 = \Delta^D_{\varepsilon_1(x_0)\varepsilon_2(x_0)\dots\varepsilon_{n_0}(x_0)\varepsilon_{n_0+1}(x_0)\dots}$ — довільне число. Для $x = \Delta^D_{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\dots\varepsilon_{n_0}(x)\varepsilon_{n_0+1}(x)\dots}$ такого, що $\varepsilon_j(x) = \varepsilon_j(x_0)$ при $j = \overline{1, n_0 - 1}$ та $\varepsilon_{n_0}(x) \neq \varepsilon_{n_0}(x_0)$, розглянемо різницю

$$F(x) - F(x_0) = \left(\prod_{j=1}^{n_0-1} p_{\varepsilon_j(x_0),j}\right) \times \times \left(F(\hat{\varphi}^{n_0-1}(x)) - F(\hat{\varphi}^{n_0-1}(x_0))\right). \quad (6)$$

Таким чином,

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \left(\prod_{j=1}^{n_0-1} p_{\varepsilon_j(x_0),j}\right) \leq \leq \left(\max_{j=\overline{1,n_0-1}} p_{\varepsilon_j(x_0),j}\right)^{n_0-1} \to 0, \quad n_0 \to \infty,$$

що еквівалентно умові $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Справді, для D-ірраціонального числа x_0 умова $x \to x_0$ є еквівалентною умові $n_0 \to \infty$ і тому не виникає сумнівів щодо неперервності функції F.

Нехай x_0 — D-раціональне число. У такому разі неперервність функції F у D-раціональній точці x_0, тобто справедливість умови (6), можна довести, використовуючи поняття односторонніх границь.

Монотонність. Очевидно, що

$$F(0) = \beta_{0,1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\beta_{0,n}\prod_{j=1}^{n-1}p_{0,j}\right) = \\ = \min_{x\in[0;1]} F(x) = 0,$$

$$F(1) = \beta_{d_1-1,1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\beta_{d_n-1,n}\prod_{j=1}^{n-1}p_{d_j-1,j}\right) = \\ = \max_{x\in[0;1]} F(x) = 1.$$

Нехай маємо $x_1 = \Delta^D_{\varepsilon_1(x_1)\varepsilon_2(x_1)\ldots\varepsilon_n(x_1)\ldots}$ та $x_2 = \Delta^D_{\varepsilon_1(x_2)\varepsilon_2(x_2)\ldots\varepsilon_n(x_2)\ldots}$ — деякі числа, такі, що $x_1 < x_2$. Тоді існує такий номер n_0, що $\varepsilon_j(x_1) = \varepsilon_j(x_2)$ для всіх $j = \overline{1, n_0-1}$ та $\varepsilon_{n_0}(x_1) < \varepsilon_{n_0}(x_2)$.

Отже,

$$F(x_2) - F(x_1) = \\ = \left(\prod_{j=1}^{n_0-1}p_{\varepsilon_j(x_2),j}\right)\cdot\left(\beta_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \beta_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + \right. \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j}\right) - \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right)\right).$$

Оскільки

$$\beta_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \beta_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} = \\ = p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + p_{\varepsilon_{n_0}(x_1)+1,n_0} + \ldots + \\ + p_{\varepsilon_{n_0}(x_2)-1,n_0} \geq p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0},$$

$$\delta = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j}\right) - \\ - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right) \geq \\ \geq - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right) \geq \\ \geq -\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{d_{n_0+m}-1,n_0+m}\prod_{j=1}^{m-1}p_{d_{n_0+j}-1,n_0+j}\right)\right)\times \\ \times p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} = -(1-p_{d_{n_0+1}-1,n_0+1})p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} - \\ - (1-p_{d_{n_0+2}-1,n_0+2})p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}p_{d_{n_0+1}-1,n_0+1} - \\ - \ldots = -p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0},$$

тому

$$F(x_2) - F(x_1) \geq p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} - p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} = 0.$$

Цілком очевидним є той факт, що у випадку, коли всі елементи $p_{i,n}$ матриці P є додатними, справедливою буде умова $F(x_2) - F(x_1) > 0$.

Нехай η — випадкова величина, представлена у вигляді такого канторівського розкладу

$$\eta = \frac{\xi_1}{d_1} + \frac{\xi_2}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{\xi_k}{d_1 d_2 \ldots d_k} + \ldots \equiv \Delta^D_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

де цифри ξ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, є випадковими і набувають значень $0, 1, \ldots, d_k - 1$ з ймовірностями $p_{0,k}, p_{1,k}, \ldots, p_{d_k-1,k}$. Тобто ξ_k — незалежні та $P\{\xi_k = i_k\} = p_{i_k,k}$, $i_k \in A_k$.

У силу означення функції розподілу та рівностей

$$\{\eta < x\} = \{\xi_1 < \varepsilon_1(x)\} \cup \\ \cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 < \varepsilon_2(x)\} \cup \ldots \cup \\ \cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = \varepsilon_2(x), \ldots, \xi_k < \varepsilon_k(x)\} \cup \ldots,$$

$$P\{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = \varepsilon_2(x), \ldots, \xi_k < \varepsilon_k(x)\} = \\ = \beta_{\varepsilon_k(x),k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{\varepsilon_j(x),j},$$

наслідком останньої теореми є така лема.

Лема 4. *Функція розподілу F_η випадкової величини η має вигляд:*

- *$F_\eta(x) = 0$, якщо $x < 0$;*
- *якщо $0 \leq x < 1$,*

$$F_\eta(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\varepsilon_k(x),k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{\varepsilon_j(x),j}\right];$$

- *$F_\eta(x) = 1$, якщо $x \geq 1$,*

де $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}$.

Інтегральні властивості

Теорема 5. *Функція $y = F(x)$ є інтегровною за Лебегом, причому*

$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{0,n} + \beta_{1,n} + \beta_{2,n} + \ldots + \beta_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

Доведення. Використовуючи означення досліджуваної функції та властивості інтеграла Лебега, отримаємо:

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^{\frac{1}{d_1}} F(x)dx + \int_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} F(x)dx +$$
$$+ \int_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} F(x)dx + \ldots + \int_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} F(x)dx =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{d_1}} p_{0,1}F(\hat{\varphi}(x))dx +$$
$$+ \int_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} \big[p_{0,1} + p_{1,1}F(\hat{\varphi}(x))\big]dx +$$
$$+ \int_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} \big[p_{0,1} + p_{1,1} + p_{2,1}F(\hat{\varphi}(x))\big]dx + \ldots +$$
$$+ \int_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} \big[\beta_{d_1-1,1} + p_{d_1-1,1}F(\hat{\varphi}(x))\big]dx =$$
$$= \left[\begin{array}{c} x = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{1}{d_1}\hat{\varphi}(x), \\ dx = \frac{1}{d_1}d(\hat{\varphi}(x)). \end{array}\right] =$$
$$= \frac{p_{0,1}}{d_1}\int_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) + p_{0,1}x\Big|_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} +$$
$$+ \frac{p_{1,1}}{d_1}\int_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) + (p_{0,1}+p_{1,1})x\Big|_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} +$$
$$+ \frac{p_{2,1}}{d_1}\int_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) + \ldots + \beta_{d_1-1,1}x\Big|_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} +$$
$$+ \frac{p_{d_1-1,1}}{d_1}\int_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) =$$
$$= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \ldots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} +$$
$$+ \frac{1}{d_1}\int_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) =$$
$$= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \ldots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} +$$
$$+ \frac{1}{d_1}\Bigg[\int_0^{\frac{1}{d_2}} p_{0,2}F(\hat{\varphi}^2(x))d(\hat{\varphi}(x)) +$$
$$+ \int_{\frac{1}{d_2}}^{\frac{2}{d_2}} \big[p_{0,2} + p_{1,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\big]d(\hat{\varphi}(x)) +$$
$$+ \int_{\frac{2}{d_2}}^{\frac{3}{d_2}} \big[p_{0,2} + p_{1,2} + p_{2,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\big]d(\hat{\varphi}(x)) + \ldots +$$
$$+ \int_{\frac{d_2-1}{d_2}}^{1} \big[\beta_{d_2-1,2} + p_{d_2-1,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\big]d(\hat{\varphi}(x))\Bigg] =$$
$$= \ldots = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{0,j} + \beta_{1,j} + \beta_{2,j} + \ldots + \beta_{d_j-1,j}}{d_1 d_2 \ldots d_j} +$$
$$+ \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_n}\int_0^1 F(\hat{\varphi}^n(x))d(\hat{\varphi}^n(x)) = \ldots$$

Продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо:

$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{0,n} + \beta_{1,n} + \beta_{2,n} + \ldots + \beta_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

Що й потрібно було довести.

Диференціальні властивості

Лема 6. *1. Приріст μ_F функції F на циліндрі $\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n}$ визначається рівністю:*

$$\mu_F(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n}) = \prod_{j=1}^{n} p_{c_j,j}.$$

2. Нехай $x_0 = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ — D-ірраціональна точка, тоді

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n} d_j p_{\varepsilon_j,j}\right).$$

Доведення. 1. Обчислимо приріст μ_F функції F на циліндрах $\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n}$. Тобто

$$\mu_F(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n}) =$$
$$= F(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n[d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots}) -$$
$$- F(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n(0)}) =$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{n} p_{c_j,j}\right)\cdot\big(\beta_{d_{n+1}-1,n+1} +$$
$$+ \beta_{d_{n+2}-1,n+2}p_{d_{n+1}-1,n+1} +$$
$$+ \beta_{d_{n+3}-1,n+3}p_{d_{n+2}-1,n+2}p_{d_{n+1}-1,n+1} + \ldots\big) =$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{n} p_{c_j,j}\right)\cdot\big(1 - p_{d_{n+1}-1,n+1} +$$
$$+ (1 - p_{d_{n+2}-1,n+2})p_{d_{n+1}-1,n+1} + \ldots\big) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} p_{c_j,j} \geq 0.$$

2. Знайдемо похідну функції F в D-ірраціональній точці $x_0 = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. Оскільки

$$x_0 = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n},$$

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_F(\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n})}{|\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}|} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n} p_{\varepsilon_j,j}}{\frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}} = \prod_{j=1}^{\infty} d_j p_{\varepsilon_j,j}.$$

За класичною теоремою Лебега неперервна монотонна функція має скінченну похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Проте, за умови, коли $a_n = d_n p_{\varepsilon_n,n} > 1$ для всіх натуральних чисел n, за винятком, можливо, скінченної кількості, отримаємо $F'(x_0) = \infty$. Тому:

• у випадку, коли для скінченної множини значень n справджується $a_n \geq 1$, отримаємо $F'(x_0) = 0$;
• у випадку, коли $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ (що є справедливим лише для функції $F(x) = x$), отримаємо $F'(x_0) = 1$;
• у випадку, коли лише для скінченної кількості номерів справджується умова $p_{\varepsilon_n,n} \neq 1/d_n$, отримаємо $0 \leq F'(x_0) < \infty$.

Самоафінність

Теорема 7. *Якщо елементи $p_{i,n}$ матриці P є додатними, то графік Γ_F функції F в просторі $\mathbb{R}^2$ є множиною виду*

$$\Gamma_F = \bigcup_{x\in[0;1]} (x; \ldots \circ \psi_{\varepsilon_n,n} \circ \ldots \circ \psi_{\varepsilon_2,2} \circ \psi_{\varepsilon_1,1}(x)), \quad (7)$$

де $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots}$,

$$\psi_{i_n,n} : \begin{cases} x' = (1/d_n)x + i_n/d_n; \\ y' = \beta_{i_n,n} + p_{i_n,n}y, \end{cases}$$

$i_n \in A_n$.

Доведення. Оскільки умова

$$f(x) = \beta_{i,1} + p_{i,1} f(\hat{\varphi}(x))$$

є еквівалентною умові

$$f\left(\frac{i+x}{d_1}\right) = \beta_{i,1} + p_{i,1} f(x)$$

для $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots}$, тому очевидно, що

$$\psi_{i_1,1} : \begin{cases} x' = (1/d_1)x + i_1/d_1; \\ y' = \beta_{i_1,1} + p_{i_1,1}y. \end{cases}$$

Перейдемо до афінних перетворень $\psi_{i,2}$, $i = \overline{0, d_2 - 1}$. Оскільки рівності

$$f(\hat{\varphi}(x)) = \beta_{i,2} + p_{i,2} f(\hat{\varphi}^2(x)),$$
$$f\left(\frac{i+\hat{\varphi}(x)}{d_2}\right) = \beta_{i,2} + p_{i,2} f(\hat{\varphi}(x))$$

є еквівалентними, тоді

$$\psi_{i_2,2} : \begin{cases} x' = (1/d_2)x + i_2/d_2; \\ y' = \beta_{i_2,2} + p_{i_2,2}y. \end{cases}$$

По індукції отримаємо:

$$\psi_{i_n,n} : \begin{cases} x' = (1/d_n)x + i_n/d_n; \\ y' = \beta_{i_n,n} + p_{i_n,n}y. \end{cases}$$

Отже,

$$\bigcup_{x\in[0;1]} (x; \ldots \circ \psi_{\varepsilon_n,n} \circ \ldots \circ \psi_{\varepsilon_2,2} \circ \psi_{\varepsilon_1,1}(x)) \equiv G \subset \Gamma_F.$$

Нехай $T(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_F$. Розглянемо точку $x_n = \hat{\varphi}^n(x_0)$, де $x_0 = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots}$ — деяка фіксована точка з $[0; 1]$.

У силу того, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_n \in A_n$,

$$f(\hat{\varphi}^k(x_0)) = \beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} + p_{\varepsilon_{k+1},k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(x_0)), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

та з того, що $\overline{T}\big(\hat{\varphi}^k(x_0); f(\hat{\varphi}^k(x_0))\big) \in \Gamma_F$, випливає

$$\psi_{i_k,k} \circ \ldots \circ \psi_{i_2,2} \circ \psi_{i_1,1}(\overline{T}) = T_0(x_0; f(x_0)) \in \Gamma_F, \quad i_k \in A_k.$$

Звідси й випливає, що $\Gamma_F \subset G$. Таким чином,

$$\Gamma_F = \bigcup_{x\in[0;1]} (x; \ldots \circ \psi_{\varepsilon_n,n} \circ \ldots \circ \psi_{\varepsilon_2,2} \circ \psi_{\varepsilon_1,1}(x)).$$

Теорему доведено.

Ніде не диференційовні функції

Нехай елементи матриці $P = \|p_{i,n,}\|$ можуть бути і від'ємними числами, але

$$\beta_{0,n} = 0, \beta_{i,n} > 0 \text{ для } i \neq 0 \text{ та } \max_i |p_{i,n}| < 1,$$
$$\sum_{i=0}^{d_n-1} p_{i,n} = 1 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} p_{i_n,n} = 0$$

для будь-якої послідовності (i_n).

Теорема 8. *Нехай матриця P є такою, що для всіх $n \in \mathbb{N}$: $p_{\varepsilon_n,n} \cdot p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$, причому $d_n \cdot p_{d_n-1,n} \geq 1$ або $d_n \cdot p_{d_n-1,n} \leq 1$ та*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{0,k} \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{d_k-1,k} \neq 0$$

одночасно. Тоді функція F є ніде не диференційовною на $[0; 1]$.

Доведення. Нехай x_0 — деяка D-раціональна точка, тобто

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(0)} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots} = x_0^{(2)},$$

$\varepsilon_n \neq 0$.

Розглянемо послідовності (x'_k), (x''_k) чисел

$$x'_k = x_0^{(1)} + 1/(d_1 d_2 \ldots d_{n+k}) = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1(0)},$$

$$x''_k = x_0^{(2)} - 1/(d_1 d_2 \ldots d_{n+k}) = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots[d_{n+k}-1](0)}$$

такі, що $x' \to x_0$ і $x'' \to x_0$ при $k \to \infty$.

Тоді

$$F(x'_k)-F(x_0)=\Bigg[\beta_{\varepsilon_1,1}+\beta_{\varepsilon_2,2}p_{\varepsilon_1,1}+$$
$$+\ldots+\beta_{\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}+$$
$$+\beta_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k-1}p_{0,m}\right)\Bigg]-$$
$$-\left[\beta_{\varepsilon_1,1}+\beta_{\varepsilon_2,2}p_{\varepsilon_1,1}+\ldots+\beta_{\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}\right]=$$
$$=\left(\prod_{j=1}^{n}p_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}p_{0,m}\right),$$

$$F(x_0)-F(x''_k)=\Bigg[\beta_{\varepsilon_1,1}+\sum_{t=2}^{n-1}\left[\beta_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}p_{\varepsilon_j,j}\right]+$$
$$+\beta_{\varepsilon_n-1,n}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}+p_{\varepsilon_n-1,n}\beta_{d_{n+1}-1,n+1}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}+$$
$$+\ldots+p_{\varepsilon_n-1,n}\beta_{d_{n+k}-1,n+k}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}\prod_{l=n+1}^{n+k-1}p_{d_l-1,l}+$$
$$+p_{\varepsilon_n-1,n}\beta_{d_{n+k+1}-1,n+k+1}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}\prod_{l=n+1}^{n+k}p_{d_l-1,l}+\ldots\Bigg]-$$
$$-\Bigg[\beta_{\varepsilon_1,1}+\sum_{t=2}^{n-1}\left[\beta_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}p_{\varepsilon_j,j}\right]+\beta_{\varepsilon_n-1,n}\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}+$$
$$+\sum_{l=n+1}^{n+k}\left[\beta_{d_l-1,l}\left(\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}\right)p_{\varepsilon_n-1,n}\prod_{m=n+1}^{l-1}p_{d_m-1,m}\right]\Bigg]=$$
$$=p_{\varepsilon_n-1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}p_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}p_{d_m-1,m}\right).$$

Звідки

$$B'_k=\frac{F(x'_k)-F(x_0)}{x'_k-x_0}=(d_n\cdot p_{\varepsilon_n,n})\times$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^{n-1}d_jp_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}d_mp_{0,m}\right).$$
$$B''_k=\frac{F(x_0)-F(x''_k)}{x_0-x''_k}=(d_n\cdot p_{\varepsilon_n-1,n})\times$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^{n-1}d_jp_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}d_mp_{d_m-1,m}\right).$$

Позначимо $b_{0,k}=\prod_{m=n+1}^{n+k}d_mp_{0,m}$ і $b_{d_k-1,k}=$ $=\prod_{m=n+1}^{n+k}d_mp_{d_m-1,m}$.

Сформулюємо та доведемо твердження наступної леми, використовуючи тавтології

$$(A\to B)\leftrightarrow\overline{A\wedge\overline{B}},\qquad \bigvee_{j=1}^{n}A_j\leftrightarrow\overline{\bigwedge_{j=1}^{n}\overline{A_j}}.$$

Лема 9. *Якщо для довільного* $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} p_{0,n}>0,\\ p_{1,n}<0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_{2t-1,n}<0,\\ p_{2t,n}>0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

$t\in\mathbb{N}$, *тоді*

$$\left[\begin{array}{l} d_np_{0,n}\geq 1,\\ d_np_{2,n}\geq 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d_np_{d_n-1,n}\geq 1.\end{array}\right.$$

Справді, з умов $p_{\varepsilon_n,n}p_{\varepsilon_n-1,n}<0$ та $0<\beta_{1,n}=$ $=p_{0,n}$ випливає система у формулюванні останньої леми.

Доведення проводиться методом від супротивного. Припустимо, що для всіх $i_n\in A_n\setminus\{1\}$: $d_np_{i_n,n}<1$. Тоді

$$\sum_{i_n\in A_n\setminus\{1\}}d_np_{i_n,n}<d_n-1,$$

звідки $p_{1,n}>1/d_n$, що суперечить умові $p_{1,n}<0$. Отже, припущення є хибним. Лему 9 доведено.

Оскільки $\prod_{j=1}^{n-1}d_jp_{\varepsilon_j,j}=const$, $p_{\varepsilon_n,n}p_{\varepsilon_n-1,n}<$ <0 та за умовою теореми послідовності $(b_{0,k})$, $(b_{d_k-1,k})$ не збігаються до 0 одночасно, отримаємо такі випадки ($m=\overline{n+1,n+k}$, $k\to\infty$):

1. якщо для всіх $k\in\mathbb{N}$, за винятком, можливо, скінченної множини номерів k: $d_mp_{0,m}>1$ та $d_mp_{d_m-1,m}>1$, то одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до ∞, а інша — до $-\infty$;
2. якщо для всіх $k\in\mathbb{N}$, за винятком, можливо, скінченної множини номерів k: один з добутків $d_mp_{0,m}$, $d_mp_{d_m-1,m}$ є більшим 1, а інший — меншим 1, тоді одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до $\pm\infty$, а інша — до 0;
3. якщо для всіх $k\in\mathbb{N}$, за винятком, можливо, скінченної множини номерів k: один з добутків $d_mp_{0,m}$, $d_mp_{d_m-1,m}$ є більшим 1, а інший — рівним 1, тоді одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до $\pm\infty$, а інша є сталою послідовністю;
4. якщо для всіх $k\in\mathbb{N}$, за винятком, можливо, скінченної множини номерів k: один з добутків $d_mp_{0,m}$, $d_mp_{d_m-1,m}$ є меншим 1, а інший — рівним 1, тоді одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до 0, а інша є сталою послідовністю;
5. якщо для всіх $k\in\mathbb{N}$ добутки $d_mp_{0,m}$, $d_mp_{d_m-1,m}$ є рівними 1, то послідовності B'_k, B''_k є різними сталими послідовностями, оскільки $p_{\varepsilon_n,n}\neq p_{\varepsilon_n-1,n}$ в силу умов $p_{\varepsilon_k,k}\in(-1;1)$, $\beta_{\varepsilon_k,k}>0$.

Таким чином, функція F є ніде не диференційовною на $[0;1]$, оскільки у всіх випадках $\lim_{k\to\infty}B'_k\neq\lim_{k\to\infty}B''_k$.

Список літератури

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — К. : Наукова думка, 1992. — 208 с.
3. Барановський О. М. Про одну функцію, пов'язану з рядами Остроградського 1-го та 2-го видів / О. М. Барановський, І. М. Працьовита, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009. — № 10. — С. 40–49.
4. Василенко Н. А. Функція Серпінського. Самоафінні властивості / Н. А. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009. — № 10. — С. 121–131.
5. Працьовитий М. В. Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського / М. В. Працьовитий, Н. А. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2010. — № 11. — С. 170–181.
6. Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції / М. В. Працьовитий // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2002. — № 3. — С. 327–338.
7. Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы / Н. В. Працевитый // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К. : КГПИ, 1989. — С. 78–90.
8. Сербенюк С. О. Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2012. — № 13(2). — С. 166–182.
9. Cantor G. Über die einfachen Zahlensysteme / G. Cantor // Z. Mathl. Phys. — 1869. — Bd. 14. — S. 121–128.

S. Serbenyuk

FUNCTIONS, THAT DEFINED BY FUNCTIONAL EQUATIONS SYSTEMS IN TERMS OF CANTOR SERIES REPRESENTATION OF NUMBERS

The article is devoted to the investigation of differential, integral and other properties of functions, that their argument is represented by Cantor series. The functional equations systems, that investigating functions are unique solution of these systems in the class of determined and bounded on $[0;1]$ functions are indicated. It is proved, under what conditions the solution of the functional equations system is the distribution function of the random variable $\eta = \Delta^D_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ with independent D-symbols or the nowhere differentiable function.

Keywords: Cantor series, D-representation, functional equations systems, singular function, nowhere differentiable function, distribution function.

Матеріал надійшов 17.02.2015