УДК 530.12:521.51

Опанасюк Ю. А.

ІНВАРІАНТНИЙ ОПИС ПРОТЯЖНИХ РЕЛЯТИВІСТИЧНИХ СИСТЕМ

В статті обговорюються концептуальні аспекти проблеми пуанкаре-інваріантного опису протяжних фізичних систем. Після стислого огляду аналітичних методів інваріантного опису релятивістичних систем пропонуються схеми застосування пуанкаре-інваріантних формалізмів, розвинутих в рамках різних форм релятивістичних теорій прямої взаємодії до аналізу протяжних фізичних систем. Розглядається можливість застосування розвинутого підходу для прогнозування експериментів у Сонячній системі.

Вступ

В роботі [1] йшлося про труднощі, що виникають при пуанкаре-інваріантному (ПІ) формулюванні динаміки гравітуючих неточкових мас. Продовжуючи обговорення, варто, насамперед, зауважити, що заміна ПІ рівнянь для точкових мас відповідними рівняннями для протяжних тіл стосується не лише гравітаційної взаємодії. Йдеться про загальнофізичну потребу отримання більш реалістичних наближень, що вимагає не тільки відмови від апріорних й, досить часто, штучних обмежень можливих швидкостей, а й усунення не менш штучного використання поняття "точкової маси" в тих випадках, коли доречніше було б застосовувати поняття протяжного тіла. Така невідповідність існуючого теоретичного апарату вимогам фізичної реальності пов'язана, з одного боку, з труднощами математичного характеру, що виникають в межах добре пристосованого до потреб релятивізму стандартного польового підходу. Про це вже йшлося в [1]. З другого боку, виникають перепони концептуального характеру. Мається на увазі коректність використання в релятивістичній фізиці поняття протяжного тіла на кшталт традиційної моделі жорсткого (твердого) тіла в класичній механіці. Йдеться про можливості використання поняття протяжного (неточкового) тіла, а не про реанімацію незастосовного в релятивізмі поняття жорсткого тіла й, тим більше, не про заміну постулатів сучасної фізичної парадигми — концепція поля залишається в ній визначальною. Стосовно ж власне гравітаційної взаємодії, то вважаючи загальну теорію відносності (ЗТВ) загальновизнаною сучасною теорією тяжіння, одначе, згідно з задекларованими в [1] намірами, аналіз існуючих на сьогодні теорій гравітації (ТГ) зручно проводити в межах так званої систематики Дікке (див. [1]: (П1) — (П4) та (К1) — (К4)). Вважаємо, що при коректному та послідовному аналізі треба, за пропозицією Бонді [2], розглядати три апріорі незалежні різновиди мас. Відома гіпотеза Шіффа [3, с 21] потребує окремого ґрунтовного висвітлення. Необхідно звернути увагу на те, що систематика Дікке, вважаючи, що простір-час (ПЧ) являє собою чотиривимірний диференційовний многовид, не наділяє апріорі цей многовид метричними чи афінними властивостями — на наявність тих або інших структур має вказати експеримент [1, (П1)]. "Має вказати експеримент" включає потребу обговорення проблеми зіставлення теоретичних висновків з результатами можливих спостережень—так званої проблеми спостережуваних величин, або просто спостережуваних. В зв'язку з останнім особливого значення набувають питання, пов'язані з введенням та реалізацією систем відліку (СВ). Це лише деякі з аспектів проблеми інваріантного опису протяжних фізичних систем (ПФС).

Видається природним почати обговорення з вже цитованого пункту 1 систематики Дікке [1]. Необхідність стверджувати, що фізичні явища відбуваються (а, точніше, можуть моделюватися) в деякому диференційованому многовиді, що називається просторово-часовим континуумом, на нашу думку, переконливо обґрунтована Р. Пенроузом у "Вступі" до його монографії [4]. Ясна річ, коли доводиться переходити на мову метатеорії, а це саме той випадок, то можна говорити лише про зручність в застосуванні того чи іншого математичного формалізму як засобу моделювання фізичної реальності. Й, відверто кажучи, якби не рідкісна в плані надзвичайно вдалого поєднання глибокого фізичного контексту з розвинутим автором математичним апаратом вже згадана праця Р. Пенроуза [4], то обговорення таких питань в обсязі журнальної публікації навряд чи було б можливим. Посилаючись на [4] та на не менш блискучі в цьому плані [6—9], виправдовуємо застосування в подальшому певного математичного формалізму й полишаємо, водночас, хистке та нечітко окреслене пограниччя власне фізики з огортаючими її метатеоретичними міркуваннями. Звузивши, в такий спосіб, наше обговорення до суто фізичної проблематики, вкажемо межі можливого застосування поняття диференційовного многовиду, а відтак й пропонованого підходу. В межах класичної фізики жодних перепон на цьому шляху, на нашу думку, не існує. Застосовність вимагає обговорення лише для малих масштабів, де суттєву роль починають відігравати квантові ефекти. Починаючи з масштабу порядку 10^{-13} см — приблизний "радіус" елементарної частинки — через принцип невизначеності Гайзенберґа можливе виникнення надзвичайно великого імпульсу й значення координат частинки стає невизначеним (не кажучи вже про можливість народження нових частинок!). В такій ситуації, навіть не торкаючись питання застосовності самого поняття диференційовного многовиду, мусимо констатувати виникнення серйозних труднощів й потребу модифікації математичного апарату. Подальше зменшення масштабу призводить до вже зовсім загрозливої ситуації. Згідно з сучасними уявленнями [6—9] в масштабах порядку 10^{-33} см квантові флуктуації кривини простору-часу будуть достатніми для того, щоб змінити його топологію. Жодної певності щодо того, чи ми й надалі матимемо справу з гладким многовидом, немає.

Існуюча непевність щодо глобальної топології Всесвіту (див. [4, 5] та цитовану там літературу) теж може спричинитися до можливої, принаймні, часткової незастосовності поняття диференційовного многовиду й, відповідно, в дуже великих масштабах. Однак майже вся фізика наших днів, поки що, зосереджена поміж такими крайнощами, а тому в термінах поняття диференційовного многовиду доречно вести подальший аналіз протяжних фізичних систем.

Нагадаємо, що стандартна модель твердого (жорсткого) тіла — це скінченна чи нескінченна сукупність матеріальних точок, відстані між якими не змінюються. В межах такої моделі (назвемо її "ідеальною") спосіб реалізації внутрішніх в'язей, що забезпечують таку жорсткість, не обговорюється. Більш реалістична модель вимагає конкретизації фізичної природи внутрішніх в'язей. Така конкретизація, ґрунтуючись на принципі ньютонової далекодії, принципових труднощів не зустрічає. Враховуючи вже сказане, утримаємося, на разі, від спокуси обговорення релятивістичної версії (дуже, втім, багатообіцяючої) згаданої конкретизації. Підходячи до обговорення трохи з іншого боку (див. [1, 16]), зауважимо, що диференційовні многовиди (простори-часи) Ньютона та Галілея[1] [4, с 19] наділяються метричними структурами таким чином, що відстань між двома точками у просторі визначена лише при умові перетворення в нуль різниці часів для цих точок. Й навпаки, різниця часу тут завжди визначається однозначно. Отже, ми в даному випадку маємо справу з розшарованим по E^1 ("час") простором з шарами E^3 ("простір"), тобто "час" E^1 є фактор-простором повного простору, щодо шарів E^3. Фактор-простір — абсолютний ньютонівський час є природним параметром еволюції фізичної системи. В просторах спеціальної теорії відносності (СТВ) та загальної теорії відносності (ЗТВ) структура розшарування з базою E^1 руйнується й замінюється іншою структурою — метричною [4, 6—9], в результаті чого введення формалізму для опису навіть "ідеальної" моделі того, що (при зроблених зауваженнях) можна розглядати як релятивістичний аналог "жорсткої" ПФС, суттєво ускладнюється й треба вдаватися до принципово інших методів опису ПФС. Доводиться переосмислювати все, починаючи з проблеми порівняння теоретичних висновків з результатами можливих спостережень, відтак й введення та реалізації СВ. Існує значна кількість різних підходів до введення поняття спостережуваних та означення СВ. Необхідної концептуальної єдності, на жаль, не опрацьовано, що змушує щоразу обговорювати доцільність та обґрунтованість застосованого формалізму. А тому на часі зробити бодай дуже стислий огляд літератури, присвяченої методам аналітичного опису ПФС без апріорних обмежень допустимих швидкостей, інакше, протяжних релятивістичних фізичних систем (ПРФС).

1. Методи інваріантного опису ПРФС

Відразу ж відкидаємо спокусу охарактеризувати усі запропоновані на сьогодні підходи — вже

[1]Зазначимо, що в [4] простори-часи Ньютона та Галілея — різні многовиди.

тільки перелікові усіх існуючих публікацій (див. [3, 6—15] та цитовану там літературу) треба присвятити окреме ґрунтовне дослідження. З метою ілюстрації застосування отриманих в рамках пропонованого підходу висновків доцільно обмежитися посиланнями лише на праці [10—15]. Найбільш прийнятним з огляду на його самодостатність та універсальність є теоретико-груповий підхід [1, с. 27]. З погляду саме такого підходу в [10] викладені основи континуальної релятивістичної кінематики, неевклідової та конформної геометрії, проаналізована повна система кінематичних рівнянь релятивістського континууму, що дозволяє збагнути в найбільш загальному вигляді, зокрема, природу релятивістського обертання. Навіть за умови такої актуальності питання, автор [10] обмежується тензорним методом та методом диференціальних форм й не вживає більш глибокого спінорного формалізму. Проте використання спінорів в дусі Вандер-Вардена та Інфельда дає можливість аналізувати, серед іншого, й недоступні тензорному апаратові тонкощі просторово-часової структури. Фундаментальні книжки Пенроуза та В. Ріндлера [13, 14] є чи не найґрунтовнішими серед посібників зі спінорного числення, стимульованого ідеями релятивістичної та квантової механіки. Змістовний та стислий огляд існуючої на той час літератури, що не втратила актуальності й до сьогодні, можна знайти в "Передмові" Н. В. Міцкевича до книжки А. К. Лапковського [10, с 3]. Однак ми торкнулися проблематики настільки широкого діапазону, що якби не монографії [10, 12] та цитована там література[1], то бодай поверховий аналіз в межах журнальної статті був би проблематичним. Для зручності посилань намагатимемося, де це не входитиме в протиріччя з [1], використовувати символіку та термінологію книжок [10—12].

Важливо усвідомлювати, що між поняттями СВ та системи координат (СК), котрі часто плутають, немає нічого спільного [17]. *Як* вказується в [12, с 9], поняття СВ в релятивістичних теоріях має не меншу важливість, ніж система понять в сучасній квантовій теорії, яка дозволяє описувати спостережувані в мікросвіті. Таку аналогію між, зокрема, ЗТВ та квантовою механікою підкреслював ще В. А. Фок [18]. Не претендуючи жодною мірою на вичерпну власну характеристику сучасного розуміння поняття СВ, вибірково процитуємо [11, с 151]: "Переходячи на мову метатеорії, будемо розуміти під СВ в широкому смислі теоретичну модель сукупності засобів та методів вимірювання фізичних величин (спостережуваних). Безумовно, таке формулювання є дуже загальним й, застосовуючись в різних областях фізики, повинне відповідним чином уточнюватися. Основні особливості проблеми вимірювань в ЗТВ втікають, по-перше, з визнання неусувного впливу гравітаційних полів на засоби вимірювання (гравітація визначає метричну структуру простору-часу (ПЧ)) й, по-друге, з польового, континуального характеру цієї теорії. Останнє означає, що фізичні величини математично моделюються полями на просторово-часовому многовиді. При цьому лише невелика кількість величин має характер одноточкових скалярів". Й далі: "Інші ж величини, в тому числі н ті, що описують просторово-часові співвідношення, а також диференціальні властивості скалярів моделюються більш складними геометричними об'єктами, порівняння яких залежить від геометрії ПЧ. А тому, говорячи про проблему вимірювання в ЗТВ, ми маємо на увазі означення СВ саме для таких об'єктів". В цитованих джерелах, крім подальшої конкретизації наведених понять та обговорення перспективи їх розвитку, міститься й достатня для розуміння складності проблеми в цілому їх ретроспектива — з останньої стає зрозумілим, що навіть сам А. Айнштайн ще, фактично, часто плутав та змішував поняття СВ та СК [12, с 8]. Відтак, як і в [11], розрізнятимемо "внутрішні" та "зовнішні" СВ. Перші використовують, крім "власних" засобів ріманової геометрії (геодезичні лінії, вектори Кілінга тощо), лише один додатковий засіб — відмічений в одній світовій точці ортoрепер, що моделює еталони часу та довжини. Зовнішні ж СВ визначаються або стосовно до якоїсь внутрішньої, або ж містять невизначені параметри, використовуючи при цьому певні додаткові геометричні об'єкти (негравітаційні фізичні поля, другу метрику, тетрадні чи монадні поля тощо). Як уже йшлося, сучасні ТГ, зокрема ЗТВ, використовують чотиривимірний псевдоріманoвий многовид лоренцової сигнатури. Адекватною мовою для його опису є мова диференціальної геометрії, відповідні поняття якої M_r — r-вимірний диференційовний многовид, AM — відповідний повний атлас, локальну карту $\{U, r\} \in AM$, означену в околі $U \subset M$ (в більшості випадків індекси розмірності будемо опускати), тощо [20] будемо використовувати й вводити при необхідності. Природним буде при розгляді ПРФС, коли стають суттєвими ефекти викривлення ПЧ, користуватися парадигмою, що включає постулат, який називається принципом

[1] Монографія К. А. Пірагаса, В. І. Жданова, А. М. Александрова, Ю. М. Кудрі та Л. Є. Пірагас [11], базуючись на оригінальних матеріалах, містить, до того ж, необхідні та зручні для висвітлення суміжних областей оглядові матеріали. Інваріантні методи опису протяжних релятивістських систем [11, гл. 3] мають своїми витоками відомі роботи О. 3. Петрова [15], з керівництвом якого кожен з авторів пов'язує певний етап своєї діяльності.

Посилання на книжку Ю. С. Владімірова [12] з огляду на її орієнтованість на фізичну проблематику можуть бути корисними особливо в тих розділах, що стосуються методів задання СВ.

мінімального зв'язку (фізичних полів з кривиною ПЧ) [21]. Більш відома його назва: сильний принцип еквівалентності. Це широко відомий постулат, що узгоджується з експериментом. Детально він обговорюється в книжці Мізнера та ін. [7—9].

Перехід до вивчення систем неточкових розмірів вимагає врахування ефектів змінної кривини, які в першому наближенні описуються усередненим по області ПЧ, яку займає ПФС, тензором Рімана. Згідно з попереднім зауваженням природно постулювати, що математична форма фізичних законів, записаних з використанням символів Крістофеля, а не тензора кривини, має однаковий вигляд незалежно від того, чи наш многовид плоский, чи викривлений. Отже вищенаведений постулат еквівалентний твердженню, що математична форма фізичних законів у викривленому ПЧ така ж, як і в криволінійних координатах плоского многовиду Мінковського.

Задачі вимірювання для протяжних систем, незважаючи на локальний характер диференціальних рівнянь фізичної теорії, вимагають введення двоточкових величин, систематичне застосування яких в диференціальній геометрії (та ЗТВ) започатковано працями Руза [22—24] та Сінга [25,26].

Алгебра A (Tp, $T\bar{p}$) двоточкових тензорів будується шляхом тензорного множення дотичних та кодотичних просторів Tp, Tp^*, $T\bar{p}$, $T\bar{p}^*$ двох різних точок p та $\bar{p}$ многовиду M. Поля двоточкових величин означуються в областях і на підмноговидах з $M \times M$. Точку p будемо вважати відміченою, вона при побудові СВ може асоціюватися з положенням спостерігача [11, с 158]. її абстрактні координати позначимо ζ^{α}, а відповідні абстрактні індекси надкреслюватимемо.

Задання на M структури ріманового або афінно-зв'язного простору індукує $M \times M$ структуру простору добутку [27]. Інакше кажучи, для двоточкових тензорних полів очевидним чином означені коваріантні похідна $\nabla_{\bar{\alpha}}$ та ∇_{α} по координатах точок p та $\bar{p}$ відповідно.

Зрозуміло, що інваріантний опис ПФС в межах заданої СВ, серед іншого, передбачає й порівняння тензорів, що задані в різних точках M, тобто, фактично, елементів алгебр A *(Tp)* та A $(T\bar{p})$. Для надання такому порівнянню фізичного змісту треба вимагати, щоб воно узгоджувалося з алгебраїчною структурою, або, іншими словами, воно повинно ґрунтуватися на заданні ізоморфізму цих алгебр. А для цього необхідно та достатньо задати лінійний ізоморфізм основних просторів [28] W : $Tp \to T\bar{p}$, тобто регулярний оператор $W^{\bar{\rho}}_{\alpha}$, що відображає t^{α} в $\bar{t}^{\bar{\rho}} = W^{\bar{\rho}}_{\alpha} t^{\alpha}$

Очевидно, що на многовиді таке відображення може розглядатися певною мірою як аналогічне до паралельного переносу векторів в афінному просторі. За Сінгом [25], оператор W називається пропагатором. Та враховуючи, що цей термін вже давно використовується в іншому значенні в квантовій теорії поля, в роботах [29] було запропоновано називати W транслятором, а операцію переносу — трансляцією.

В третьому розділі книжки [11] операція трансляції поширюється на всі важливі для задания СВ випадки, даються важливі поняття W-інваріантності, означуються транзитивні, голономні та ортотранслятори, що допускають спінорну факторизацію. Найбільш загальним транслятором, що допускає спінорну факторизацію, виявився конформний транслятор, що визначається умовою

$$g_{\mu\nu} W^{\mu}_{\alpha} W^{\nu}_{\beta} = |\varphi|^2 g_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

де $g_{\alpha\beta}$ — поле метричного тензора, причому в спінорному представленні метрики $g_{\alpha\beta} = g_{AA'BB'} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}$ для довільного спінорного транслятора $\varepsilon_{RQ} W^{R}_{A} W^{Q}_{B} = \varphi \varepsilon_{AB}$

При цьому локальними спостережуваними називаються величини, що являються (спін-) тензорами в опорній точці $\bar{p}$. З викладеного зрозуміло, що задания поля (орто-) транслятора $W_{RA} W^{RA} = 2\varphi$ на U дозволяє зіставити спін-тензорним полям на U їх локально спостережувані образи. Зрозуміло (про це вже йшлося), що задания еталонного репера в $\bar{p}$ надає локально спостережуваним цілком конкретні значення.

Інваріантне задания положення точок досягається за допомогою так званого експоненціального відображення геодезичної пульверизації (пульверизація в [13, 14] називається струменем). Пульверизацією на многовиді M називають векторне поле на T(M), що задовольняє певним умовам [13, 14], в абстрактних координатах пульверизація описується системою звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{d^2\zeta^{\alpha}}{dt^2} + 2H^{\alpha}\left(\zeta^{\beta}, \frac{d\zeta^{\beta}}{dt}\right) = 0, \tag{2}$$

де H^{α} — однорідні функції другого степеня по змінних $\dot{\zeta}^{\beta} \equiv \frac{d\zeta^{\beta}}{dt}$, внаслідок чого система (2) є інваріантною відносно афінних перетворень. Саме до такого вигляду зводяться лагранжеві рівняння руху з несингулярною функцією Лагранжа.

За теоремою Ейлера

$$2H^{\alpha} = H^{\alpha}_{\beta\gamma}\zeta^{\beta}\zeta^{\alpha}, \tag{3}$$

де $H^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 H^{\alpha}}{\partial\zeta^{\beta}\partial\zeta^{\gamma}}$ — однорідні функції нульового ступеня по ζ, що утворюють геометричний об'єкт другого порядку та того ж типу, що й зв'язність.

Розв'язки $\zeta^\alpha(t)$ системи (2) інколи називають шляхами на M, а геометрію, яка визначається пульверизацією — загальною геометрією шляхів [31, 32].

За теоремою існування та єдиності розв'язків (див. додаток 1 в [3О]), якщо функції $H^\alpha(\zeta^\beta,\zeta^\beta)$ диференційовні класу C^κ, $\kappa > 1$ в околі точки $\zeta^\beta = \zeta^{\bar\beta}, \zeta^\beta = u^{\bar\beta}$, то система (2) однозначно визначає локальний розв'язок $\zeta^\alpha(\zeta^{\bar\beta}, u^{\bar\beta}, t)$ класу C^{k+2} по t, класу C^k по $\zeta^{\bar\beta}$ та $u^{\bar\beta}$ й такий, що має 1-струмінь вигляду $j_0^1\zeta^\alpha(\zeta^{\bar\alpha}, u^{\bar\alpha})$.

Для відшукання струменів більш високого порядку аж до $\kappa+2$ (по змінній t) послідовно диференціюємо (2):

$$\frac{d^n\zeta^\alpha}{dt^n} + 2\underset{n}{H}^\alpha(\zeta^\beta,\zeta^\beta) = 0, \qquad \textbf{(4)}$$

де $H^\alpha = H^\alpha$, а для $\underset{n}{H}^\alpha$ маємо рекурентне співвідношення

$$\underset{n+1}{H}^\alpha = \frac{\partial \underset{n}{H}^\alpha}{\partial\zeta^\beta}\zeta^\beta - 2\frac{\partial \underset{n}{H}^\alpha}{\partial\zeta^\beta}\underset{2}{H}^\beta. \qquad (5)$$

При цьому, якщо $H^\alpha \in C^\infty$, то в такий спосіб будується локальний розв'язок в формі ряду Тейлора

$$\zeta^\alpha = \zeta^{\bar\alpha} + u^{\bar\alpha}t - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n!}\underset{n}{H}^\alpha\left(\zeta^{\bar\beta}, u^{\bar\beta}\right)t^n,$$

причому функції $\underset{n}{H}^\alpha$ є однорідними степеня n по змінній ζ:

$$\underset{n}{H}^\alpha\left(\zeta^{\bar\beta}, U^{\bar\beta}t\right) = \underset{n}{H}^\alpha\left(\zeta^{\bar\beta}, U^{\bar\beta}\right)t^n. \qquad (7)$$

Таким чином, пульверизація на M задає в кожній точці $\bar p \in M$ дифеоморфізм $\exp_{\bar p}: N_0^* \to N_{\bar p}$ деякого околу $N_{\bar p} \subset M$ точки $\bar p$, що визначається формулою $U^\beta \to \zeta^\alpha\left(\zeta^{\bar\beta}, U^\beta, 1\right)$ й називається експоненціальним відображенням; $\dot N_0$ та $N_{\bar p}$ називаються нормальними околами.

У випадку так званої "обмеженої геометрії шляхів" [32] $H^\alpha_{\beta\gamma}$ в (3) ототожнюється з об'єктом лінійної симетричної зв'язності $H^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, а рівняння (2) є рівнянням геодезичних в афінній параметризації:

$$\frac{d^2\zeta^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{d\zeta^\beta}{dt}\frac{d\zeta^\beta}{dt} = 0. \qquad \textbf{(8)}$$

Послідовний розвиток такого підходу можна знайти в [11, с. 136—176]. Як нам здається, методи, які ми коротко розглянули в цьому пункті, в цілому являють собою певну концепцію конструктивного інваріантного опису протяжних релятивістичних систем. Загальною її геометричною основою суть сукупність геодезичних ліній ПЧ разом з експоненціальним відображенням.

Формалізм реалізації розглянутої концепції для зручності подальшого використання викладений в термінах роботи [11]. Аналогічні геометричні конструкції, орієнтовані на, можливо, дещо ширший діапазон застосування, вже розроблялися автором даної роботи раніше — одна з версій доповідалася на IX Всесоюзній геометричній конференції в Кишиневі ще у вересні 1988 року [38].

2. Релятивістичні теорії прямої взаємодії та ПІ опис ПРФС

Розглянуті в попередньому пункті, як і ті, що залишилися поза нашою увагою, методи ПІ опису ПФС не позбавлені відомих труднощів математичного характеру, що виникають в межах добре пристосованого до потреб релятивізму стандартного польового підходу (див. [1, 16]). Ці труднощі виникають вже на рівні побудови динаміки точкових тіл й, фактично, зводять нанівець практичну вартість їх застосування до більш реалістичних моделей. Звісно, це не применшує ані їх евристичної ролі для подальшого осмислення обговорюваних вище питань, ані їх значення для опрацювання практично безмежного кола проблем релятивістичної динаміки точкових тіл. Як сказано у роботі [16], значна частіша цих труднощів не виникає в рамках так званих релятивістичних теорій прямої взаємодії (РТПВ) [33—37]. Повертаючись до питань, поставлених у "Вступі" до даної роботи, вкажемо, що поєднання формалізмів різних форм РТПВ з результатами попереднього пункту вселяє певний оптимізм щодо їх розв'язання. Дійсно, конкретизація фізичної природи внутрішніх в'язей, необхідних для побудови класичної моделі жорсткого тіла, в межах концепції ньютонової далекодії принципових труднощів не викликає, а тому в нашому випадку цілком природним буде вдатися до відповідних релятивістичних версій формальної реалізації такої концепції. Звісно, йдеться поки що про "ідеальну" модель ПРФС, що дає можливість обговорювати її еволюцію при наявності досить жорстких, проте реалістичних, обмежень. Взявши до уваги наявність сучасних потужних обчислювальних засобів, варто детально опрацьовувати й ті аспекти, що пов'язані з перспективою подальшого застосування до експериментів у Сонячній системі та до верифікації ще життєздатних на сьогодні ТГ.

Для більшої ясності зауважимо, що з погляду нашого підходу можливість причинного в ньютонівському розумінні (або предиктивного) опису ПРФС, дає екстраполяція за допомогою формалізму попереднього пункту методів вибору однопараметричного сімейства гіперповерхонь конфігурації (ГК) на ПЧ довільної кривини. Як відомо [33—37], ГК, визначаючи форму релятивістичної динаміки, можуть вибиратися довільним чином, задовольняючи єдиному обмеженню: щоб принаймні для певних перетворень симетрії ПЧ (тобто елементів неоднорідної групи Лоренца) відповідні перетворення СК не торкалися незалежного параметра еволюції *t*. Геометричною мовою це означає, що для протяжного тіла, що зображується часоподібною світовою "трубкою" (конгруенцією світових ліній) певний клас елементів неоднорідної групи Лоренца, що діє в околі *U* довільної точки *PєM,* не зміщуючи ГК, здійснював би на них внутрішні рухи (див., зокрема, [1, 16]).

З погляду виконання умов релятивістичної інваріантності та причинності всі ці параметри еволюції, що відіграють роль бази розшарування, є рівноправними. Аби звузити цей клас "часів" до зручних для фізики, доречно згадати, що лагранжевий формалізм служить основою для того, щоб за теоремою Ньотер діставати величини, які зберігаються, і що ці величини набувають особливо простої— адитивної— форми для тих перетворень симетрії, котрі не торкаються незалежної змінної.

Принцип мінімального зв'язку [21] дозволяє переформулювати співвідношення, записані для певного околу *U* викривленого многовиду в термінах криволінійних координат ПЧ Мінковського, що, в свою чергу, дозволяє, принаймні в фізично прийнятних наближеннях, застосовувати відповідні формалізми РТПВ. Сама по собі відпадає потреба обговорення таких питань, як коректність застосування "псевдотензорної ідеології", наявність строгих законів збереження та, занадто категоричних на думку їх опонентів, тверджень деяких авторів про беззмістовність з математичної точки зору операції інтегрування тензорів в довільному рімановому просторі (див. хоча б [39] та, відповідно, [3; 7—9]). Останнє є важливим, передовсім, через те, що наявність якихось диференціальних законів збереження в такому разі не гарантує можливість отримання відповідних інтегральних законів. Варто вказати й на те, що, на відміну від традиційних для так званого параметризованого пост-ньютонівського формалізму наближень (ППН), що є наслідками вимоги існування асимптотичної ПІ метрики, пропонований підхід забезпечує (наближену) ПІ і в зоні взаємодії [40, **41].**

Керуючись викладеними міркуваннями, в межах нашого підходу отримано ряд результатів. Усвідомлюючи призначення даної публікації, не будемо намагатися викласти тут усі деталі, а задовольнімося лише переліком деяких з цих результатів й наведенням певних динамічних рівнянь та співвідношень.

3. Застосування до експериментів у Сонячній системі

Проілюструємо, як діє запропонована схема в більш прагматичному варіанті, пов'язаному з перспективою подальшого застосування до експериментів у Сонячній системі. Досить реалістичним наближенням може бути система, що складається лише з двох протяжних тіл, що займають об'єми V_1 та V_2 і знаходяться одне від одного на відстані *l*, що значно перевищує їх характеристичні розміри *a*. Маючи на меті побудову досить універсального формалізму, що давав би можливість не обмежуватися рамками ЗТВ, зручно скористатися так званим параметризованим постньютонівським (ППН) формалізмом [3]. В цьому феноменологічному' формалізмі метрика ріманового ПЧ, створювана тілом, яке складається з ідеальної рідини, записується у вигляді суми певних узагальнених гравітаційних потенціалів з довільними коефіцієнтами, що дістали назву постньютонівських параметрів. Оминаючи, на разі, обговорення їх модифікації, що уможливлює розгляд неметричних теорій (див. [1, 16]), метрику ріманового ПЧ запишемо у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} g_{00} = &-1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi \Phi W + \\ &+ (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + \\ &+ 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 + 2(1 + \zeta_3)\Phi_3 + \\ &+ 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)A - \\ &- (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\omega^2 U - \alpha_2 \omega^i \omega^j U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1)\omega^i V_i \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} g_{0i} = &-\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_i - \\ &-\frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_i - \\ &-\frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)\omega^i U - \alpha_2 \omega^j U_{ij} \end{aligned} \tag{10}$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij}, \tag{11}$$

де потенціали метрики U, U_{ij}, Φ_W, A, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, V_i та W_i визначаються формулами:

$$U = \int \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}', \tag{12}$$

$$U = \int \frac{\rho'(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{13}$$

$$\Phi_W = \int \frac{\rho'\rho''(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} - \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) d^3\vec{r}' d^3\vec{r}'', \tag{14}$$

$$U = \int \frac{\rho'[\vec{v}'(\vec{r} - \vec{r}')]^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{15}$$

$$\Phi_1 = \int \frac{\rho' v'^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{16}$$

$$\Phi_2 = \int \frac{\rho' U'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{17}$$

$$\Phi_3 = \int \frac{\rho' \Pi'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} d^3\bar{r}', \tag{18}$$

$$\Phi_4 = \int \frac{\rho'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} d^3\bar{r}', \tag{19}$$

$$V_i = \int \frac{\rho' v_i'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} d^3\bar{r}', \tag{20}$$

$$V^i = \int \frac{\rho' v'^i}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} d^3\bar{r}', \tag{21}$$

$$W_i = \int \frac{\rho' \bar{v}'(\bar{r}-\bar{r}')(x_i - x_i')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} d^3\bar{r}'. \tag{22}$$

У формулах (9) — (22) використані такі позначення: γ, β, ξ, α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 — ППН параметри; $\bar{r}, x_\alpha, x^i, x^0 \equiv t$ — майже глобальна лоренцева система координат [3, с. 91]; ρ — густина маси спокою, виміряна в локальній вільно падаючій СВ, що супроводжує гравітуючу матерію; $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ — координата швидкості матерії; ω^i — координата швидкості ППН системи координат відносно системи відліку Всесвіту, котра в середньому перебуває в стані спокою; p — тиск, що вимірюється аналогічно ρ; П — внутрішня енергія на одиницю маси спокою, що включає усі види енергії, крім маси спокою та тяжіння (наприклад, енергію стиснення та теплову енергію). В таких позначеннях запишемо тензор енергії-імпульсу ідеальної рідини:

$$T^{00} = \rho(1+\Pi+v^2+2U), \tag{23}$$

$$T^{0i} = \rho\left(1+\Pi+v^2+2U+\frac{p}{\rho}\right)v^i, \tag{24}$$

$$T^{ij} = \rho v^i v^j \left(1+\Pi+v^2+2U+\frac{p}{\rho}\right)+p\delta^{ij}(1-2\gamma U). \tag{25}$$

Введемо інваріантну густину:

$$\rho^* = \rho(-g)^{\frac{1}{2}} U^0, \tag{26}$$

де U^0 — компонента 4-швидкості, g — визначник метричного тензора. Поняття інваріантної густини зручне тому, що для довільної функції $f(\bar{r},t)$, заданої на об'ємі, границі якого лежать ззовні матерії, справедливе співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho^* f d^3x = \int_V \rho^* \left(\frac{df}{dt}\right) d^3x, \tag{27}$$

згідно з яким, зокрема,

$$\frac{dm}{dt} = 0; \quad m \equiv \int_V \rho^* f d^3x, \tag{28}$$

де m — повна маса спокою частинок в об'ємі V, що визначається за формулою (26)

$$m = \int \rho U^0 (-g)^{\frac{1}{2}} d^3x = \int \rho dv. \tag{29}$$

Всюди, де не обумовлено, використовується система одиниць, в якій $G = C = 1$.

Для коректності постньютонівського наближення необхідно, щоб максимальні значення ньютонівського потенціалу U, квадрата характерної швидкості v^2, питомого тиску $\frac{p}{\rho}$ та питомої внутрішньої енергії П мали приблизно однаковий порядок малості $O(\varepsilon^2)$, де $\varepsilon \ll 1$ — деякий безрозмірний параметр. У цьому випадку тіла будуть перебувати у ближній зоні гравітаційного випромінювання, що зумовлюється її рухом. В області, зайнятій тілами, зміни всіх величин з часом обумовлюватимуться насамперед рухом речовини й, відтак, частинні похідні всіх величин за часом будуть малими в порівнянні з частинними похідними за координатами:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim O^\alpha(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Такі оцінки є типовими для Сонячної системи, при цьому $\varepsilon \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$

Оминаючи, з метою уникнення надмірних повторень, ідеологію подальшого розвитку нашого підходу за (К3) та (К4) систематики Дікке — детальніше див. [1], де можна знайти й версію побудови аналогічних співвідношень для ПФС, що складається з N гравітуючих точкових об'єктів, викладену засобами ПРМ-3 [1] — скористаємося коваріантним рівнянням збереження густини тензора енергії-імпульсу в рімановому просторі:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \tag{30}$$

Обчислимо на основі (9) — (29) компоненти рімановиx зв'язностей та, разом з компонентами тензора енергії-імпульсу підставимо в рівняння (30):

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{0i} + \partial_j T^{ij} + \rho\partial^i U + \frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1)\rho\partial^i\Phi_1 -$$

$$-\frac{\zeta_1}{2}\rho\partial^i A + (3\gamma+1-2\beta+\zeta_2)\rho\partial^i\Phi_2 + (1+\zeta_3)\rho\partial^i\Phi_3 +$$

$$+3(\gamma+\zeta_4)\rho\partial^i\Phi_4 + 2\gamma\rho v^i v^k\partial_k U - \xi\rho\partial^i\Phi_\omega +$$

$$+\rho\partial^i U\left(\Pi - \frac{1}{2}(2\gamma+1)v_k v^k + \gamma\frac{p}{\rho} - (2\beta+2\gamma+1)U\right) +$$

[1] ПРМ-3 — Предиктивна релятивістська механіка в трьохвимірному формулюванні — одночасова форма РТПВ, що ґрунтується на використанні рівнянь Каррі-Хілла (див. [1, 16, 34]).

$$+\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1)\rho\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1)\rho\frac{\partial W^i}{\partial t}+$$

$$+\rho\frac{\partial U}{\partial t}\left[2\gamma v^i-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)W^i\right]+\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\rho v_k\times$$

$$\times[\partial^i V^k-\partial^k V^i]+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\omega_k\omega^k\partial^i U-$$

$$-\frac{\alpha_2}{2}\omega_k\omega_l\rho\partial^i U^{kl}+\frac{1}{2}(2\alpha_3-\alpha_1)\omega_k\rho\partial^i V^k+$$

$$+\alpha_2\omega_k\rho\frac{\partial U^{ik}}{\partial t}-\frac{\alpha_1}{2}\rho v_l[\omega^i\partial^l U-\omega^l\partial^i U]=\rho O(\varepsilon^6). \quad (31)$$

Рівняння руху протяжного тіла з відомим тензором енергії-імпульсу природно виникають з коваріантного закону збереження (31) приведенням його до вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta^{i0}=\aleph^i, \quad \textbf{(32)}$$

де ζ^{i0} — густина повного імпульсу якогось тіла, а $\aleph^i$ являє собою усю решту рівняння (31) й може трактуватися як сила, що діє на це тіло. Така процедура розділення рівняння (31) містить, проте, суттєву невизначеність: частину позадивергенційних членів на однакових підставах можна зарахувати як до зміни імпульсу тіла, так і до сили, що діє на нього (див. [1, 39]).

Усунути цю неоднозначність можна, використовуючи рівночасно й рівняння, записані на основі лагранжевого підходу. Крім усунення вказаної невизначеності шляхом лагранжевого формулювання, можна обійти й інші, не менш принципові труднощі, про які вже йшлося. Дійсно, однією з найбільш важливих переваг розглянутих в другому пункті роботи [1] алгоритмів побудови формалізмів РТПВ є те, що відносно групи Пуанкаре енергія H та імпульс P_l перетворюються як компоненти 4-вектора, а момент імпульсу J_l та інтеграл руху K_l — у компоненти 4-тензора другого рангу (див. [1], пункт 2, співвідношення (24) — (28) й коментарі до них). Іншими словами, наслідком теореми Е. Нетер є існування десяти величин, що зберігаються. Причому, для системи взаємодіючих тільки поміж собою частинок ці величини мають такі ж трансформаційні властивості, як і відповідні характеристики окремої частинки. В цьому сенсі систему в цілому можна розглядати як одну частинку. Поняття руху центру мас набуває звичного характеру класичної нерелятивістичної механіки. Функція Лагранжа для довільної замкнутої системи явно не залежить від часу — маємо усі переваги класичного формулювання механіки й можемо використовувати закони збереження в стандартному вигляді.

Продовжуючи обговорення (див. другий пункт [I]) ПІ методів, звернімо увагу на те, що прикрий факт наявності в ПІ лагранжіанах похідних нескінченного порядку (інакше маємо неприємну "теорему про відсутність взаємодії" — див. цитовану в [1] літературу) в наших наближеннях є несуттєвим (!). ППН-наближення для експериментів у Сонячній системі не вимагають розгляду аж так екзотичних ситуацій. Натомість приємним фактом є існування певного взаємозв'язку між лагранжевою та ньютоновою формами РТПВ. Й хоча, як вже щойно йшлося, релятивістичні лагранжіани взаємодії в загальному випадку містять вищі похідні всіх порядків, а в наближеннях по c^{-2} існують, втім, і лагранжіани, що залежать від похідних скінченного порядку. Відповідні рівняння Ейлера-Лагранжа, взагалі, будуть диференціальними рівняннями вище другого порядку (в точній теорії — нескінченного порядку), так що постановка звичної для механіки задачі Коші втрачає сенс. В [37] розглянута процедура виділення з множини всіх розв'язків підмножини таких, що одночасно можуть бути розв'язками рівнянь типу (29) з роботи [1]. При цьому припускається, що лагранжіан L має структуру:

$$L=L^{(0)}(x,\dot{x},t)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n L^{(n)}(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots,t), \quad \textbf{(33)}$$

де ε — деякий малий параметр (як правило, це константа взаємодії або c^{-1}), а лагранжіан $L^{(0)}=L|_{\varepsilon=0}$ невироджений, тобто для матриці Гессе

$$H_{faIij}=\frac{\partial^2 L^{(0)}}{\partial\dot{x}_a^i\partial\dot{x}_b^j}=H_{baji}, \quad \textbf{(34)}$$

виконується умова

$$\det\|H\|\neq 0. \quad (35)$$

Виявилося, що як рівняння "ньютонової" форми, так і загальний розв'язок умов ПІ лагранжевого опису в ПН наближенні накладають певні обмеження на відповідні ППН параметри. Результати, з цієї точки зору, є аналогічними отриманим в межах моделі N точкових гравітуючих частинок. А тому з огляду на його компактність, зручно навести й аналітичний вигляд ПН лагранжіану для останнього випадку [16, 40, 41]:

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\upsilon_a^2+\alpha_a^L\upsilon_a^4\right)+\frac{1}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\times$$

$$\times\left[1+\beta_{ab}^L\upsilon_a^2+\gamma_{ab}^L(\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b)+\delta_{ab}^L\frac{(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{v}_a)^2}{r_{ab}^2}+\sigma_{ab}^L\frac{m_a+m_b}{r_{ab}}\right]+$$

$$+\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\rho_{abc}^L\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}, \quad (36)$$

$$\text{де } \gamma_{[ab]}^L=\delta_{[ab]}^L=\sigma_{[ab]}^L=\rho_{[ab]}^L=0. \quad (37)$$

Умови

$$\beta_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab} + \frac{2}{3}\gamma_{ab} = 0, \tag{38}$$

$$\beta_{[ab]} - \frac{1}{2}\delta_{[ab]} = 0 \tag{39}$$

та відповідно

$$\alpha^L_a = \frac{1}{4},\ \gamma^L_{ab} + \beta^L_{\{ab\}} = -\frac{1}{2},\ \varepsilon^L_{ab} + \delta^L_{\{ab\}} = -\frac{1}{2}, \tag{40}$$

$$\delta^L_{\{ab\}} = -\beta^L_{\{ab\}}, \tag{41}$$

є необхідними та достатніми для того, щоб (36) відповідав рівнянням "ньютонового" типу:

$$\ddot{x}^i_a = \overset{0}{\underset{3}{\mu^i_a}} + \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r^3_{ab}} \times$$

$$\times\left\{x^i_{ab}\left[\upsilon^2_a - \beta_{ab}\upsilon^i_{ab} - \gamma_{ab}\frac{(r_{ab}\mathrm{v}_{ab})^2}{r^2_{ab}} + \frac{3}{2}\frac{(r_{ab}\mathrm{v}_a)^2}{r^2_{ab}}\right] +\right.$$

$$\left. + \upsilon^i_{ab}\left[\delta_{ab}(\mathrm{v}_{ab}r_{ab}) + (\mathrm{v}_a r_{ab})\right]\right\}. \tag{42}$$

Крім того, варто зазначити, що загальний розв'язок умов ПІ лагранжевого опису містить, як частковий випадок, у відповідному наближенні, лагранжіан Фіхтенгольца, що відповідає рівнянням руху Айнштайна—Інфельда—Гофмана [48].

Порівнюючи рівняння, що витікають з (36) з ПН-рівняннями геодезичних ППН-метрики (9) — (12) з потенціалами (12) — (22), здійснимо, згідно з запропонованими в [1, 40] процедурами, фізичне ототожнення вільних параметрів з відповідними ППН-параметрами та одночасно встановимо обмеження на ППН-параметри в зв'язку з наявністю інтегральних законів збереження. Результати такого ототожнення збігаються з результатами та доповнюються співвідношеннями, що випливають з загальновідомої для таких випадків вимоги симетричності компонент повного тензора енергії-імпульсу. Отримані співвідношення (з точністю до позначення) узгоджуються з результатами [3, 39]. Обгрунтування деталей застосованих процедур можна знайти в [40, 41] та відповідно [3, 39].

Повернімося тепер знову до гравітуючої системи двох протяжних тіл. В процесі реалізації пропонованої схеми з використанням методу В. А. Фока [49] відповідні рівняння типу (31) відповідно спрощені у зв'язку зі щойно описаною процедурою, були проінтегровані за стандартними правилами [49, 50]. Поряд з інертною масою протяжного тіла, при цьому зручно використовувати й сумарну масу тіла $m_a = \sum_{V_a}\rho_a dV$, яка, внаслідок коваріантного рівняння неперервності

$$\nabla_\alpha[\rho_0 u^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\upsilon^i)\right] = O(\varepsilon^5), \tag{43}$$

є незалежною від часу. З'ясувалося, що функція Лагранжа системи двох протяжних тіл, які рухаються у створюваному ними ж полі тяжіння для СВ з початком в центрі мас подвійної системи [1] може бути представлена у вигляді:

$$L = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\dot R}{}^i\,\underset{1}{\dot R}{}_i\left(1 + \frac{1}{m_1}\int\rho_1\Pi dV - \frac{1}{2}\underset{1}{\dot R}{}^i\,\underset{1}{\dot R}{}_i + \frac{1}{2m_1}\eta_{ij}\int\frac{\rho_1\rho'_1(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)dxdx'}{|x - x'|^3} - \frac{1}{2m_1}\int\rho_1\upsilon^i_1\upsilon_{1i}dV\right)\right)\int\rho_1 dV +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\underset{2}{\dot R}{}^i\,\underset{2}{\dot R}{}_i\left(1 + \frac{1}{m_2}\int\rho_2\Pi dV - \frac{1}{2}\underset{2}{\dot R}{}^i\,\underset{2}{\dot R}{}_i + \frac{1}{2m_2}\eta_{ij}\int\frac{\rho_2\rho'_2(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)dxdx'}{|x - x'|^3} - \frac{1}{2m_2}\int\rho_2\upsilon^i_2\upsilon_{2i}dV\right)\right)\int\rho_1 dV -$$

$$-\frac{m_1 m_2}{l}\left(1 - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{m_1}\int\rho_1\upsilon^i_1\upsilon_{1i}dV + \frac{1}{m_2}\int\rho_2\upsilon^i_2\upsilon_{2i}dV + \underset{1}{\dot R}{}^i\,\underset{1}{\dot R}{}_i + \underset{2}{\dot R}{}^j\,\underset{2}{\dot R}{}_j\right) + \left(1 - 2\beta + \frac{3}{2}\xi\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\eta_{ij}}{m_1}\int\frac{\rho_1\rho'_1(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)dxdx'}{|x - x'|^3} + \frac{\eta_{ij}}{m_2}\int\frac{\rho_2\rho'_2(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)dxdx'}{|x - x'|^3}\right) + \frac{1}{m_1}\int\rho_1\Pi dV + \frac{1}{m_2}\int\rho_2\Pi dV -$$

$$-\frac{1}{2}n_i\,\underset{1}{\dot R}{}^i\,n_j\,\underset{2}{\dot R}{}^j + 2(\gamma + 3)\underset{1}{\dot R}{}^k\,\underset{2}{\dot R}{}_k + \xi n_i n_j\left(\frac{1}{2m_1}\int\frac{\rho_1\rho'_1(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)dxdx'}{|x - x'|^3} + \frac{1}{2m_2}\int\frac{\rho_2\rho'_2(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)dxdx'}{|x - x'|^3}\right) +$$

$$+ 3\gamma\left(\frac{1}{m_1}\int\rho_1 dV + \frac{1}{m_2}\int\rho_2 dV\right) + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\frac{m_1 + m_2}{l} +$$

$$\left. + \frac{1}{l^2}n_i n_j\left(\frac{1}{2m_1}\int\rho_1(3x^i x^j - \eta_{ij}x^k x_k)dV + \frac{1}{2m_2}\rho_2(3x^i x^j - \eta_{ij}x^k x_k)dV\right) + (m_1 + m_2)O(\varepsilon^5)\right. \tag{44}$$

[1] За таких умов доходимо висновку, що з постньютонівською точністю вибрана СВ є інерціальною.

В (44) використовуються загальноприйняті скорочення та стандартні позначення, при цьому $\underset{k}{R}^{i}$ та $\underset{k}{\dot{R}}^{i}$ — координати та швидкості відповідним чином введеного центра мас (див. попередні пункти). Постньютонівський порядок малості досягається за рахунок утримування членів відповідних ступенів за малим параметром $\frac{a}{l} \sim O(\varepsilon)$, де a та l відповідно характерні розміри тіл та ПФС в цілому.

Порівняння (44) з відповідними результатами аналогічних досліджень в межах інших підходів, де розглядалися подібні [3] та аналогічні [39] моделі, переконує у фізичній змістовності отриманих виразів й можливості подальшої розбудови формалізму пропонованого підходу.

Міркування фізичного характеру дозволяють розглядати ситуації, при яких функція Лагранжа (44) не містить явної залежності від часу. Обговоренню цих питань та отриманню відповідних рівнянь Ейлера-Лагранжа будуть присвячені наступні публікації, де розглядатимуться й випадки більш високих швидкостей, що вимагає залучення РТПВ фокерівського типу [34].

Насамкінець вкажемо на можливість виходу за межі цієї (майже тривіальної через сферичну симетрію) ситуації. Дійсно, така можливість забезпечується застосуванням формалізму викладеної в попередніх пунктах концепції конструктивного інваріантного опису ПРФС. Зрозуміло, що серед труднощів застосування цього формалізму буде й побудова відповідних трансляторів *W*, яка обумовлюватиметься передовсім вибором однопараметричного простороподібного сімейства ГК (див. [33—37]), що визначають і відповідну форму релятивістичної динаміки. Втім це тематика інших досліджень, що уможливлюються як значними напрацюваннями в напрямку розвитку різних форм РТПВ (див. [34,35]), так і розвитком континуальної релятивістичної кінематики та неевклідової й конформної геометрії.

Висновок

Розглянуті в статті методи інваріантного опису протяжних фізичних систем дають можливість побудови більш реалістичних наближень, що вимагають як відмови від штучних апріорних обмежень можливих швидкостей, так і усунення не менш штучного використання поняття "точкової маси" в тих випадках, коли доречніше використовувати поняття протяжного тіла.

Вказуються шляхи подолання відомих математичних труднощів [1, 16], що виникають вже на стадії побудови релятивістичної механіки точкових об'єктів.

Добре розвинуті методи класичної нерелятивістичної механіки, що фігурують в різних формах РТПВ, після аналізу концептуальних аспектів їх сумісності з релятивістичною парадигмою та з'ясування меж їх використання, виявилися цілком пристосованими до потреб релятивізму.

Варто відмітити й те, що, на відміну від традиційних для так званого параметризованого постньютонівського (ППН) формалізму наближень, що суть наслідками вимоги існування асимптотичної ПІ метрики, пропонований підхід забезпечує (наближену) ПІ і в зоні взаємодії [40, 41].

Як нам здається, методи, які ми коротко розглянули у цій статті, в цілому являють собою певну концепцію конструктивного інваріантного опису протяжних релятивістичних систем.

На завершення, в третьому пункті статті запропонована схема реалізації даної концепції для простої, проте прагматичної моделі, пов'язаної з можливістю застосування до експериментів у Сонячній системі. Знайдено загальний вигляд лагранжіану, що дає можливість у достатньому для таких цілей квазірелятивістичному наближенні записувати відповідні рівняння Ейлера-Лагранжа для довільних конкретних астрофізичних об'єктів. Таким чином, розглянуті підходи можуть широко застосовуватися й для прогнозування результатів експериментів у Сонячній системі.

1. *Опанасюк Ю. А.* Проблема пуанкаре-інваріантності в динаміці гравітуючих неточкових тіл. Наукові записки. Том 19. Фізико-математичні науки. Фізика.
2. *Bondi N.* Negative Mass in General Relativity // Rev. Mod. Phys.— 1957 — Vol. 29.— N 3.— P. 423—428.
3. *Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике / Пер. с англ.— М.: Энергоатомиздат, 1985.— 295 с.
4. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени / Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.— 180 с.
5. *Парновский С. Л.* Влияние вязкости на эволюцию Вселенной: тип II по Бианки // ЖЭТФ — 1977.— Т. 72.— № 3,— С. 809—819.
6. *Weeler J. A.* Geometrodynamics. Academic Press, New York, 1962.
7. *Мизиер Ч, Торн К.,Ушер Дж.* Гравитация. Т. 1 / Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 476 с.
8. *Мизнер Ч, Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 2 / Пер. с англ.— М.: Мир, 1977 — 527 с.
9. *Мизнер Ч, Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 3 / Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 512 с.
10. *Лапковский А. К.* Релятивистская кинематика, неевклидовы пространства и экспоненциальное отображение.— Минск: Наука и техника, 1985.— С. 263.
11. *ПирагасК.А.,ЖдановВ. Ч., Александров А. Н.,КудряЮ. Н., Пирагас А. Е.* Качественные и аналитические методы в релятивистской динамике.— М: Энергоатомиздат, 1995.— 448 с.
12. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчёта в теории гравитации.— М.: Энергоатомиздат, 1982.— 256 с.
13. *Пенроуз Р., Риндлер В.,* Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля / Пер. с англ.— М.: Мир, 1987,— 528 с.
14. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени / Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.— 576 с.
15. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности.— М.: Наука, 1975.

16. *Opanasyuk Yu.* On single-time methods in relativistic gravity dynamics//Condensed Matter Physics.—1998.— Vol. 1.—N3 (15).—P. 537—551.
17. *Мицкевич Н. В.* — В кн.: Физическая наука и философия.— М.: Наука, 1973.— С. 303.
18. *Фок В. А.* — В кн.: Физическая наука и философия.— М.: Наука, 1973.— С. 73.
19. *Хокинг С, Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени / Пер. с англ.— М: Мир, 1977.
20. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциачьной геометрии / Пер. с англ.— М.: Наука, 1981. В 2-х т.
21. *Шутії Б.* Геометрические методы математической физики / Пер. с англ.— М.: Мир, 1884.— С. 303.
22. *Ruse H. S.* Taylor's theorem in the tensor calculus / Proc. Lond. Math. Soc— 1931.— V. 32.— P. 87—92.
23. *Ruse H. S.* Some theorems in the tensor calculus / Proc. Lond. Math. Soc— 1930.— P. 225—230.
24. *Ruse K S.* An absolute partial differentia! caicuius / Quart. J. Math., Oxford Ser— 1931.— V. 2.— P. 190—202.
25. *Синг Дж.* Общая теория относительности / Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
26. *Syng J. F.* A characteristic function in Riemannian space and its application to the solution of geodesic triangles / Proc. Lond. Math. Soc— 1931.— V. 32,— P. 241.
27. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом / Пер. с англ.— М.: Мир, 1971.
28. *Бурбаки Н.* Алгебра.— М.: Физматгиз, 1962. Главы 1—3. Алгебраические структуры; линейная и полилинейная алгебра.
29. *Alexandrov A. N., Pyragas K. A.* Exponential mapping and Taylor's theorem in tensor analysis / Tensor N.S.— 1975.— V. 29.— P. 187—199 / Препринт ЦТФ-74Р, Институт теоретической физики АН УССР. Киев, 1971.
30. *Стенберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии / Пер. с англ.— М.: Мир, 1970.
31. *Thomas T. Y* The differential invariants of generalized spaces. Cambridge: U.P. Cambridge, 1934.
32. *Руно X.* Дифференциальная геометрия фикслеровых пространств / Пер. с англ.— М.: Наука, 1981.
33. *Dirac P. A. M.* Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys.— 1949,— Vol. 21 — P. 392—399.
34. *Владимиров Ю.. С, ПурыгинА. Ю.* Теория прямого метачастичного взаимодействия.— М.: Энергоатомиздат, 1986.— 135 с.
35. *Гайда Р. П.* Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц // Физ. ЭЧАЯ — 1982.— № 13.— Вып 2 — С. 427-493.
36. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Формы релятивистской динамики в классическом лагранжевом описании системы частиц // Теор. Мат. Физ.— 1983.— Т. 55.— С. 88—105.
37. *Гайда Р. П.* Релятивистская классическая теория прямых взаимодействий частиц в трёхмерной формулировке. Диссертация док. физ.-мат. наук.— Львов, 1984.— 381 с.
38. *Опанасюк Ю. А.* О геометрическом подходе к построению формализма для сравнения теорий гравитационного взаимодействия // IX всесоюзная геометрическая конференция. Кишинёв, 20—22 сентября 1988 г.— Кишинёв: Штиинца, 1988.—-С. 231.
39. *Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Чугреев 10. В.* О соотношении между инертной и гравитационной массами протяжного тела в метрических теориях гравитации // Труды Мат. ин-та АН СССР.— 1985— Т. 167— С. 108—155.
40. *Жданов В. К, Опанасюк 10. А.* Феноменологическая формулировка прямого метачастичиого взаимодействия в релятивистской теории гравитации // Изв. вузов. Физика.— 1986.— № П.—С. 69—73.
41. *Опанасюк Ю. А., Пирагас К. А.* Релятивистские уравнения движения и их связь с уравнениями метрических теорий гравитации // Бюллетень Вильнюсской астрономической обсерватории.— 1988.—№ 81.— С. 35—41.
42. *ЛайтманА.* и др. Сборник задач по теории относительности и гравитации / Пер. с англ.— М.: Мир, 1974.— С. 536.
43. *Gaida R. P.* On the Hamiltonian formulation of the instantaneous action-at-a-distance theory in relativistic classical two-body problem / Preprint of the Institute of Theoretical Physics, ITP-74-145E, Kiev, 1974.— 18 p.
44. *Gaida R. P., Kluchkovsky Yu. B., Tretiak V. I.* Lagrangian function and equations of motion of relativistic interacting particle system. In: 9th Intern, conference on genera! relativity and gravitation. Abstract of contributed papers for the discussion groups (Lena, July 14—19, 1980).— Vol. 2, Jena — 1980 — P. 164—165.
45. *Gaida R. P., Kluchkovsky Yu. B., Tretiak V. I.* Lagrangian classical relativistic mechanics of a system of directly interacting particles // Theor. Math. Phys— 1980.— Vol. 44.— N 2— P. 687—697.
46. *Gaida R. P., Kluchkovsky Yu. B., Tretiak V. I.* Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of interacting particles.— In: Constraint's theory and relativistic dynamics. Eds. G.Longhi, L. Lusanna. Singapore, World Sci. Publ— 1987.— P. 210—241.
47. *Gaida R. P., Tretiak V. I.* Direct action Lagrangian and Hamiltonian description of a particle system in the distinct forms of relativistic mechanics / Preprint of the Institute of Theoretical Physics, ITP-82-87P, Kiev —1982.— 38 p. (in Russian).
48. *Фихтенгольц И. Г.* Лагранжева форма уравнений во втором приближении теории тяготения Энштейна // ЖЭТФ.— 1950,— Т. 20 — Вып. 3 — С. 233—242.
49. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.— 2-е изд., доп.— М: Физматгиз, 1961.— 563 с.
50. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика.— М: Наука, 1972.— 382 с.

Opanasyuk Yu. A.

INVARIANT DESCRIPTION OF EXTENDED RELATIVISTIC SYSTEM

The problems of description of the nonpoint relativistic objects are discussed. After a short outline of the existing methods of an action-at-distance relativistic mecanics a new approach to the invariant description of the nonpoint relativistic object are proposed.

The generalized Poincare-invariant (PI) Lagrangians are derived in post-Newtonian approximations of the phenomenological formulation of the relativistic action-at-a distance gravity for the system of two nonpoint bodies. These generalized PI approximations are convenient in the analysis of the basic gravidynamical experiments in the Solar System.