

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

**Курсова робота на тему:**  
**Графи, що коспектральні дружба графу**

**Керівник курсової роботи**

Старший викладач, кандидат  
фіз.-мат. наук  
Лебідь В. О.  
(прізвище та ініціали)

„\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р.  
(підпис)

Виконала студентка  
напряму підготовки  
122 Комп’ютерні науки та  
інформаційні технології

Берідзе Л.С.  
(прізвище та ініціали)  
„\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р.

**Київ 2020**

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Зав. кафедри математики,  
проф. Олійник Б. В.

\_\_\_\_\_ (підпис)

„\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ  
на курсову роботу

студентці Берідзе Л. С. факультету інформатики 4 курсу

ТЕМА: «Графи, що коспектральні дружба графу»

Вихідні дані:

Alireza Abdollahi “*Connected graphs cospectral with a Friendship graph*” / Alireza Abdollahi, Shahrooz Janbaz // Transactions on Combinatorics, Vol. 3 No. 2 (2014), pp. 17-20.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Вступ

1 Актуальність дослідження теорії графів

1.1 Історія дослідження

1.2 Використання графів

1.2.1 Хімія

1.2.2 Фізика

1.2.3 Комп’ютерні науки

1.2.4 Математика

1.2.5 Інші науки

2 Основні означення та твердження

2.1 Використані означення

2.2 Приклад розрахунку спектра графа

3 Спектральні характеристики дружба графа

3.1 Коалесценція. Теорема про коалесценцію

3.2 Означення дружба графа

3.3 Теорема про ізоморфність коспектральних графів

3.4 Твердження про характеристичний многочлен дружба графа

Висновки

Список літератури

Дата видачі „\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р.

Керівник \_\_\_\_\_ (підпис)

Завдання отримала \_\_\_\_\_ (підпис)

**Тема: «Графи, що коспектральні дружба графу»**

**Календарний план виконання роботи:**

№ п/п	Назва етапу дипломної роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на дипломну роботу.	10.10.2019	
2.	Огляд літератури за темою роботи.	15.10.2019	
3.	Обговорення плану роботи.	03.12.2019	
3.	Наведення прикладів пошуку спектрів графів і доведення їх коспектральності.	11.01.2019	
4.	Написання вступу, пошук історичних даних про теорію графів. Розгляд використання графів в сучасному житті, приклади.	18.02.2020	
5.	Визначення дружба графа. Огляд теореми про коалесценцію та формула характеристичного многочлена дружба графа.	05.03.2020	
6.	Доведення методом математичної індукції, що формула характеристичного многочлена дружба графа дійсна.	21.03.2020	
7.	Написання 1, 2 та 3 розділів. Формування висновку.	30.03.2020	
8.	Корегування доведення методом математичної індукції. Внесення правок в Крок 3.	02.04.2020	
8.	Доповнення означень, виправлення малюнків та внесення змін у зміст.	10.04.2020	
10.	Корегування всієї роботи	13.04.2020	
11.	Остаточне оформлення роботи та слайдів.	18.04.2020	
12.	Захист дипломної роботи	19.04.2020	

Студентка Берідзе Л.С.

Керівник Лебідь В.О.

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 р.

# Зміст

Вступ .....	3
1 Актуальність дослідження теорії графів .....	4
1.1 Історія дослідження .....	4
1.2 Використання графів.....	4
1.2.1. Хімія.....	5
1.2.2. Фізика.....	5
1.2.3. Комп'ютерні науки.....	6
1.2.4. Математика .....	7
1.2.5. Інші науки.....	7
2 Основні означення та твердження.....	8
2.1 Використані означення.....	8
2.2 Приклад розрахунку спектра графа .....	11
3 Спектральні характеристики дружба графа .....	17
3.1 Коалесценція. Теорема про коалесценцію .....	17
3.2 Означення дружба графа.....	17
3.3 Теорема про ізоморфність коспектральних графів .....	18
3.4 Твердження про характеристичний многочлен дружба графа .....	19
Висновки .....	22
Список використаної літератури .....	23

# Вступ

Визначення графів є настільки загальним, що цим терміном можна описувати безліч подій та об'єктів. Високий рівень узагальнення дозволяє використовувати типові алгоритми теорії графів для вирішення задач транспортних і комп'ютерних мереж, у будівельному проектуванні, моделюванні тощо. Застосування різних обчислень допомагає спланувати найоптимальніший маршрут або найменш ресурсозатратне вирішення проблеми. Наголошуючи на їх застосуванні в реальних системах, термін комп'ютерна мережа іноді визначається як граф, у якому атрибути (наприклад, користувачі системи) асоціюються з вершинами, а система їх відношень, соціальних зв'язків (чи друзі вони між собою) визначають ребра. У даній роботі ми розглядаємо коспектральні властивості конкретного дружба графа та здійснюємо пошук коспектральних йому пар.

Робота складається з трьох розділів.

У Розділі 1 розглядаємо історію та області використання графів, хто досліджував та вніс вклад в формулювання знань про графи, зокрема, в хімії, фізиці, математиці, тощо.

У Розділі 2 наводимо основні означення та теореми, пов'язані із теорією графів. Розглядаємо приклад двох неізоморфних коспектральних графів.

У Розділі 3 розглядаємо особливості дружба графа, твердження про його характеристичний многочлен, а також наводимо доведення для нього методом математичної індукції.

# 1 Актуальність дослідження теорії графів

У цьому розділі ми будемо розглядати основні події в історії дослідження графів, а особливо ті, які вплинули на сьогоденне вивчення теорії графів. Наведемо приклади наук, в яких відбувається активне використання графів у візуалізації сутностей, систем, тощо.

## 1.1 Історія дослідження

Дослідження спільних характеристик різних графів продовжується вже багато років. До певного часу вважали, що у всіх графів різний спектр. Проте, було доведено, що у різних графів може бути однаковий набір власних значень. Звідси і починається теорія коспектральності графів.

Нині відомо багато видів коспектральних графів. Більшість з них були відкриті до 1988 року. Як регулярні, так і не регулярні графи - відносно матриці суміжності. Перші приклади коспектральних графів віднайшли Колатц і Сіноговіц у 1957 році. У 1998 році Лепович перерахував усі зв'язані графи на 10 вершинах і надав багато даних, включаючи кількість графів з точною кількістю їх коспектральних пар. Визначити, які графи однозначно визначаються за їх спектрами, є загалом дуже важко. Відомо, що лише невелика частка графів є такою визначеною, але, можливо, що майже всі графи мають цю властивість – таке припущення сформулювали Ван Дам та Хемерс у 2003 році.

Згодом Годсіл та Маккей розробили кілька методів побудови пар неізоморфних коспектральних графів. Один із цих методів використовує операцію над графами, що залишає спектр матриці суміжності без змін. Крім того, Годсіл та Маккей перерахували всі графи на щонайбільше дев'яти вершинах, обчислили спектр їх матриці суміжності та визначили кількість цих графів, для яких існує щонайменше одна коспектральна пара. Ця конструкція Годсіла-Маккея взяла назву “перемикання GM”. Виявляється, що для перелічених випадків значна частина всіх коспектральних графів походить від перемикання GM.

## 1.2 Використання графів

Графи можуть бути використані для моделювання багатьох типів відносин і процесів у фізичних, біологічних, соціальних та інформаційних системах. Багато практичних задач можуть бути представлені графами, вони мають дуже широке застосування: з їх

допомогою вибирають найбільш вигідне розташування будівель, графами представлені схеми метро. Далі представлені деякі приклади застосування графів.

### 1.2.1 Хімія

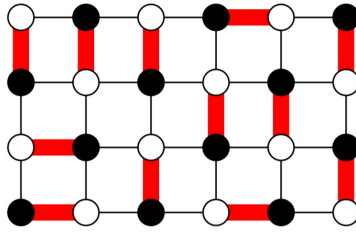
Теорія графів дозволяє точно визначити і пояснити деякі основні поняття хімії: структуру, конфігурацію, квантовомеханічну та статистико-механічну взаємодію молекул, визначити кількість теоретично можливих ізомерів органічних сполук, можливо, проаналізувати деякі хімічні передумови. Молекулярний граф - неорієнтовний граф, який моделює форму хімічної сполуки такої простої форми, де вершини графа відповідають молекулам, а ребра графа - хімічним зв'язкам між ними. Одним з основних застосувань графових спектрів для хімії є застосування в теорії ненасичених кон'югованих вуглеводнів, відомій як молекула Гюкеля.

### 1.2.2 Фізика

Одним з найбільш складних областей охоплення використання графів є фізика. У статистичній фізиці графи можуть моделювати локальні зв'язки між взаємодіючими частинами системи, а також динаміку фізичного процесу в таких системах. Аналогічно, в обчислювальній нейронауці графи можуть використовуватися для представлення функціональних зв'язків між областями мозку, які взаємодіють, включаючи різні когнітивні процеси, де вершини представляють різні ділянки мозку, а ребра представляють зв'язки між цими областями. Теорія графів відіграє важливу роль в електричному моделюванні мереж.

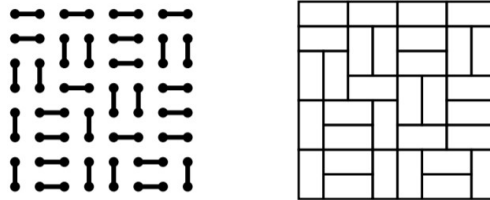
Також згадаємо про так звану димерську проблему.

Проблема з димером пов'язана з дослідженням термодинамічної опори похибки системи діатомових молекул ("димерів"), адсорбованих на поверхні кристалу. Найбільш сприятливі точки для адсорбції атомів на такій поверхні утворюють двовимірну решітку, при цьому димер може займати дві сусідні точки. Необхідно порахувати всі способи, якими димери можуть бути розташовані на решітці не перекриваючи один одного так, що кожна точка решітки була зайнята.



**Рис. 1.2.2.1** Візуалізація димерської проблеми

Проблема димеру на квадратній решітці еквівалентна задачі обчислення всіх можливих варіантів, при яких шахова дошка розміром  $n \times n$  ( $n$  парне) вкрита доміно так, що кожне доміно охоплює два сусідні квадрати поля і поле накрите повністю.



**Рис. 1.2.2.2** Приклад шахової дошки, вкритої доміно

Вершини графа представлені як точки, найбільш сприятливі для адсорбції атомів (поглинання). Дві вершини є суміжними тоді і лише тоді, коли відповідні точки можуть бути зайняті димером. Розташування димерів на поверхні визначає 1-фактор у відповідному графі, і навпаки. Таким чином, проблема димеру зводиться до завдання визначення кількості 1-факторів у графі. Перерахування 1-факторів передбачає врахування шляхів у відповідних графах та власних значень.

Не тільки проблему димеру, але й деякі інші задачі можна звести до перерахування 1-факторів (тобто розташування димерів).

### 1.2.3 Комп'ютерні науки

У інформатиці графи використовуються для представлення мереж зв'язку, організації даних, обчислювальних пристроїв, потоку обчислень тощо. Наприклад, структура посилань веб-сайту може бути представлена орієнтовним графом, у якому вершини

є веб-сторінками, а ребра - посилання з однієї сторінки на іншу. Аналогічний підхід можна застосувати до проблем соціальних медіа переміщень, дизайну комп'ютерних мікросхем та в багатьох інших областях. Тому розробка алгоритмів для обробки графів викликає велику зацікавленість у галузі інформатики. Перетворення графів часто формалізується і представляється системами переписування графів. Доповнюючими системами перетворення графів є бази даних графів, орієнтовані на безпечне для транзакцій стійке зберігання та запит даних, структурованих за графами. Один з методів захисту даних є рандомізація мережі, що зображує зв'язки між особами. Видаляючи деякі правдиві ребра і додаючи деякі помилкові так, що глобальні характеристики мережі не змінюються. Таким чином база даних уникає можливості взлому та викрадення даних.

#### **1.2.4 Математика**

Прикладом графа у математиці може стати будь-який багатогранник у трьохвимірному просторі. Наприклад, вершини та ребра куба можна розглядати як вершини та ребра графа. При цьому ми відштовхуємося від того, як розташовані елементи куба у просторі.

Ще одна галузь, яка має багато спільного зі спектрами графів, є комбінаторна оптимізація. Зв'язки між власними значеннями графів та комбінаторною оптимізацією привернули до себе увагу в останні двадцять років.

#### **1.2.5 Інші науки**

У психології, наприклад, при дослідженні міжособистісних зв'язків у групі використовуються соціограми. Теорія графів також широко використовується в соціології як спосіб, наприклад, для вимірювання престижу акторів або для вивчення розповсюдження слуху, зокрема за допомогою програмного забезпечення для аналізу соціальних мереж. Під дахом соціальних мереж є багато різних типів графів. Графи знайомств та дружби описують, чи знають люди один одного. Графи впливу моделюють, чи можуть певні люди впливати на поведінку інших. Нарешті, графи співпраці моделюють, чи працюють двоє людей певним чином, як, наприклад, разом у кіно.

## 2 Основні означення та твердження

В даному розділі пригадаємо всі основні визначення та твердження, які активно фігурують в теорії графів. Розглянемо поняття ізоморфності, коспектральності графів, а також наведемо розрахунок спектрів на прикладі двох графів і доведемо, що вони коспектральні.

### 2.1 Використані означення

**Означення 2.1.1.** Загальним неорієнтованим графом називають сукупність  $G = (V, E, L, \delta_E, \delta_L)$ , де  $V$  - множина вершин,  $E$  - множина ребер,  $L$  - множина петель та відображень,

$$\delta_E : E \rightarrow C_V^2$$

- множина двохелементних множини  $V$

$$\delta_L : L \rightarrow V.$$

**Означення 2.1.2.** Матриця суміжності графа  $G$  зі скінченною кількістю вершин  $n$  (пронумерованих числами від 1 до  $n$ ) — це квадратна матриця  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  розміру  $n \times n$ , в якій значення елементу  $a_{ij}$  рівне числу ребер з  $i$ -ї вершини графа в  $j$ -у вершину.

**Означення 2.1.3.** Простим графом  $G$  називається граф без кратних ребер та петель.

**Означення 2.1.4.** [3] Матриця Лапласа графа  $G$  - матриця  $L$  неорієнтованого графа без циклів, індексована набором вершин  $G$  з нульовими сумами рядків, де  $L_{xy} = -A_{xy}$ ,  $x \neq y$ . Якщо  $D$  - діагональна матриця, індексована набором вершин  $G$  таким чином, що  $D_{xx}$  є степінь (валентність)  $x$ , тоді  $L = D - A$ .

**Означення 2.1.5.** Характеристичний поліном — це поліном, що визначається формулою  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

**Означення 2.1.6.** Кожен граф  $G$  має дійсне власне число  $\lambda_0$  з відповідним невід'ємним дійсним власним вектором, так що для кожного власного числа  $\lambda$  ми маємо  $|\lambda| \leq \lambda_0$ . Значення  $\lambda_0(G)$  не зростає, коли вершини чи ребра видалені з  $G$ .

**Означення 2.1.7.** Спектр графа - це множина всіх власних значень матриці суміжності з урахуванням їх кратності.

**Означення 2.1.8.** Спектр Лапласа скінченного неорієнтованого графа - це спектр матриці Лапласа  $L$  (множина всіх власних значень матриці Лапласа).

**Означення 2.1.9.** *Власний вектор (матриці  $M$ ) - ненульовий вектор  $x$ , для якого справедливо  $Mx = \lambda x$ . Якщо застосувати власний вектор до матриці то отримаємо - колінеарний вектор - той же вектор, помножений на скаляр. Скаляр, на який множиться власний вектор - власне число матриці.*

**Означення 2.1.10.** *Шлях граф - послідовність вершин, в якій кожна вершина з'єднана з наступною ребром.*

**Означення 2.1.11.** *Цикл графа - ланцюг, у якого початок і кінець збігаються.*

**Означення 2.1.12.** *Циклічний граф - граф, що складається з деякого числа вершин, з'єднаних замкнутим ланцюгом.*

**Означення 2.1.13.** *Граф  $G$  -  $k$ -регулярний, якщо кожна вершина з'єднана з точно  $k$  вершинами.*

Якщо  $G$  регулярний степеня  $k$ , то для кожного власного значення  $\lambda$  маємо  $|\lambda| \leq k$ .

Якщо  $G$  регулярний степеня  $k$ , то Матриця Лапласа має вигляд:  $L = kI - A$ .

Якщо  $G$  має власні значення матриці суміжності  $A$ :  $k = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Власні значення матриці Лапласа  $L$ :

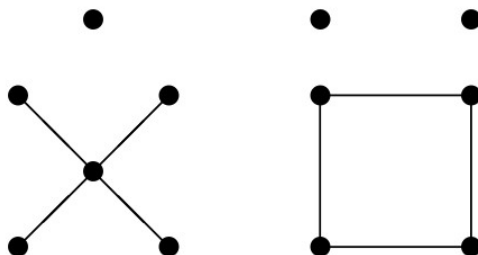
$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n, \text{ то } \lambda_i = k - \mu_i \text{ для } i = 1, \dots, n.$$

**Означення 2.1.14.** *Повний граф - простий граф, в якому кожна пара різних вершин суміжна, тобто існує ребро, що сполучає ці вершини.*

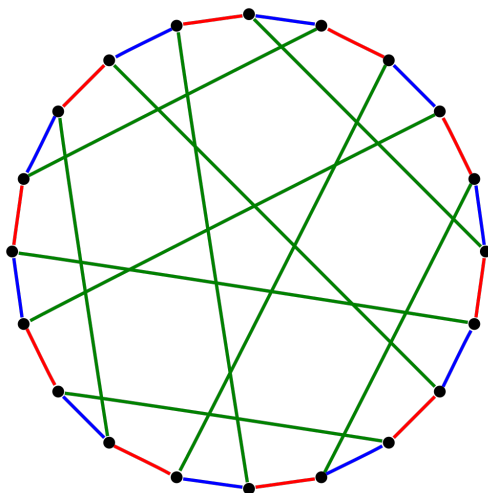
Повний граф зазвичай позначається  $K_n$ . Нехай  $G$  - повний граф  $K_n$  на  $n$  вершин. Матриця суміжності  $A = J - I$ , де  $J$  - матриця, складена з одиниць і  $I$  - одинична матриця, а спектр матриці суміжності має вигляд:  $(n-1)^1, (-1)^{n-1}$ . Матриця Лапласа  $L$  дорівнює  $L = nI - J$ , що має спектр  $0^1, n^{n-1}$ .

**Означення 2.1.15.** Графи з однаковим спектром називаються коспектральними (або ізоспектральними). Тобто власні значення матриці суміжності або матриці Лапласа однакові.

Наведені графи є коспектральними:



**Означення 2.1.16.** Фактор графа  $G$  - це підграф, який має ту саму вершину, як  $G$ .  $k$ -фактор графа є кістяковий  $k$ -регулярному підграфу, а  $k$ -факторизація розбиває множини ребер на  $k$ -фактори, що не перетинаються. Зокрема, 1-фактор - це набір попарно несуміжних ребер, а 1-факторизація  $k$ -регулярного графа - це фарбування ребер  $k$  кольорами. 2-фактор - це набір циклів, що охоплює всі вершини графа.



**Рис. 2.1.16.1** 1-факторизація графа Дезарга - кожен клас кольорів є 1-фактором

**Означення 2.1.17.** В теорії графів, ізоморфізмом графів  $G$  і  $H$  є бієкція між множинами вершин  $G$  і  $H$ .

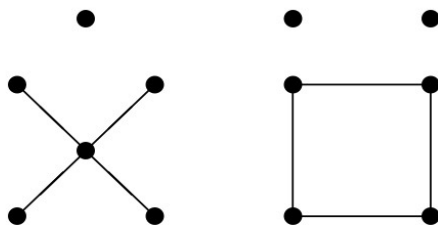
$f : V(G) \rightarrow V(H)$  така, що будь-які дві вершини  $u$  і  $v$  графа  $G$  суміжні в  $G$  тоді і тільки тоді, коли  $f(u)$  і  $f(v)$  суміжні в  $H$ . Такий тип бієкції зазвичай зветься «реброзберігуюча бієкція», згідно із загальним поняттям ізоморфізму як бієкції зі збереженням структури. Тобто графи  $G$  і  $H$  є ізоморфними, якщо шляхом перестановки рядків і стовпців матриці суміжності графа  $G$  можливо отримати матрицю суміжності графа  $H$ .

Граф G	Граф H	Ізоморфізм між G і H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Рис. 2.1.17.1 Приклад ізоморфізму графів

## 2.2 Приклад розрахунку спектра графа

Приклад 2.2.1. Маємо 2 графи:



Довести, що графи коспектральні.

Матриці суміжності

1)

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	1
F	1	1	0	1	1	0

2)

	G	H	I	J	K	L
G	0	1	0	0	0	1
H	1	0	0	0	1	0
I	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0
K	0	1	0	0	0	1
L	1	0	0	0	1	0

Характеристичні многочлени збігаються:  $\lambda^6 - 4\lambda^4 = 0$ .

Отже власні числа однакові  $\lambda =$

$$0 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (3)$$

Розглянемо 1-ий граф та знайдемо його власні вектори.

1)  $\lambda = 0$

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	1
F	1	1	0	1	1	0

[13] Методом Гаусса отримуємо залежність:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Тоді:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 = -x_2 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Фундаментальна система рішень:

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2)  $\lambda = 2$

	A	B	C	D	E	F
A	-2	0	0	0	0	1
B	0	-2	0	0	0	1
C	0	0	-2	0	0	0
D	0	0	0	-2	0	1
E	0	0	0	0	-2	1
F	1	1	0	1	1	-2

[13] Методом Гаусса отримуємо залежність:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_6 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_6 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 = \frac{1}{2}x_6 \\ x_6 = x_6 \end{cases}$$

Тоді, фундаментальна система рішень:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_6 \\ \frac{1}{2}x_6 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x_6 \\ \frac{1}{2}x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

3)  $\lambda = -2$

	A	B	C	D	E	F
A	2	0	0	0	0	1
B	0	2	0	0	0	1
C	0	0	2	0	0	0
D	0	0	0	2	0	1
E	0	0	0	0	2	1
F	1	1	0	1	1	2

[13] Методом Гаусса отримуємо залежність:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_6 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_6 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{1}{2}x_6 \\ x_5 = -\frac{1}{2}x_6 \\ x_6 = x_6 \end{cases}$$

Тоді, фундаментальна система рішень:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_6 \\ -\frac{1}{2}x_6 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}x_6 \\ -\frac{1}{2}x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

*Аналогічну роботу проводимо з 2им графом. Отримуємо такі власні вектори двох графів для власних чисел 0, 2, -2:*

Власні числа	1ий Граф	2ий Граф
$\lambda_1 = 0$	$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_6 \\ \frac{1}{2}x_6 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x_6 \\ \frac{1}{2}x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_6 \\ x_6 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$
$\lambda_3 = -2$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_6 \\ -\frac{1}{2}x_6 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}x_6 \\ -\frac{1}{2}x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -x_6 \\ x_6 \\ 0 \\ 0 \\ -x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$

### 3 Спектральні характеристики дружба графа

У цьому розділі розглянемо поняття коалесценції та теореми про коалесценцію. Визначимо, що таке дружба графа, а також сформулюємо теорему про ізоморфність коспектральних графів. Методом математичної індукції доведемо, що формула характеристичного многочлена дружба графа дійсна.

#### 3.1 Коалесценція. Теорема про коалесценцію

**Означення 3.1.1.** Для графа  $G$  зафіксуємо вершину  $v$ . Для графа  $G'$ , який не має із графом  $G$  спільних вершин, зафіксуємо вершину  $v'$ . Коалесценцією графів  $G$  та  $G'$  відносно фіксованих вершин називається граф  $G \cdot G'$ , утворений ідентифікацією вершин  $v \equiv v'$ .

Спектр коалесценції графів визначається наступною теоремою:

**Теорема 3.1.1.** [1] Характеристичний многочлен коалесценції двох графів визначається за формулою:

$$P_{G \cdot G'}(\lambda) = P_G(\lambda)P_{G'-v'}(\lambda) + P_{G'}(\lambda)P_{G-v}(\lambda) - \lambda P_{G-v}(\lambda)P_{G'-v'}(\lambda)$$

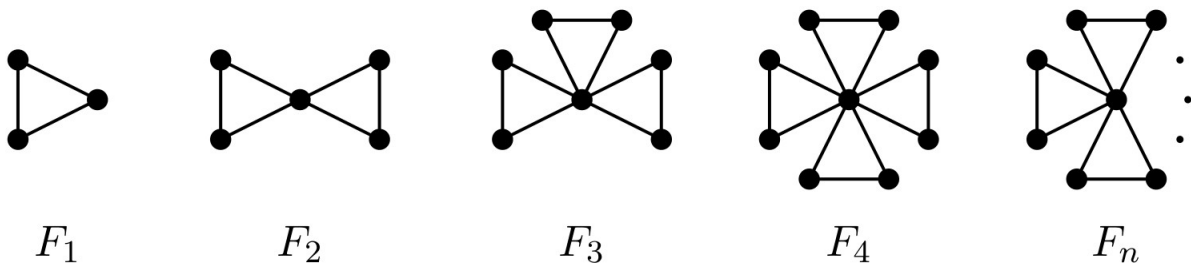
де  $G - v$  ( $G' - v'$ ) - підграф графа  $G$  ( $G'$ ), отриманий видаленням вершини  $v$  ( $v'$ ).

#### 3.2 Означення дружба графа

**Означення 3.2.1.** Дружба граф  $F_n$  - граф, що складається з  $2n + 1$  вершин та є коалесценцією  $n$  циклів довжини 3.

Граф дружба  $F_n$  можна побудувати, з'єднавши  $n$  копій циклу графа  $C_3(F_1)$  із загальною вершиною  $v$ .

На малюнку показані приклади дружба графа.



### 3.3 Теорема про ізоморфність коспектральних графів

Граф  $G$  називається визначеним спектром суміжності (скорочено DS - determined by spectrum), якщо  $Spec(G) = Spec(H)$  для деяких графів  $H, G$ , тоді  $G \cong H$ . Доведено, що дружба-граф саме є графом DS. Найбільш загальний результат був отриманий Хемерсом про графи із всіма власними значеннями окрім двох, рівних  $\pm 1$ . Як наслідок цей результат показує, що граф  $F_n - DS$ , якщо  $n \neq 16$  і  $F_{16}$  коспектральний з диз'юктивним об'єднанням 10 повних графів  $K_2$  та графом  $D$ :

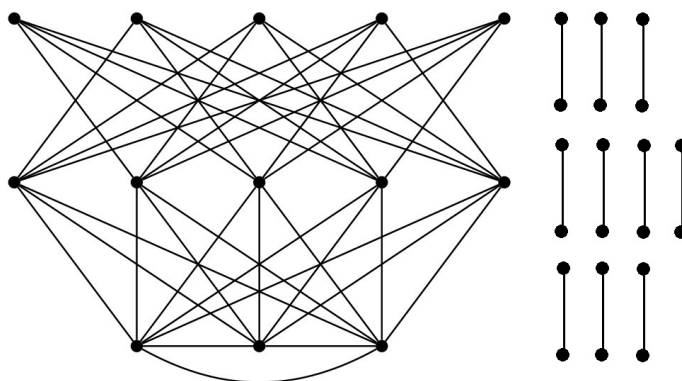


Рис. 3.3.1  $D \cup 10K_2$

Граф  $F_{16}$  не ізоморфний диз'юктивному об'єднанню  $10K_2$  з графом  $D$ .

$$Spec(D \cup 10K_2) = \{(-1)^6, 1^5, -\frac{\sqrt{129}-1}{2}, \frac{\sqrt{129}+1}{2}\} \cup \{(-1)^{10}; (1)^{10}\}$$

$$Spec(F_{16}) = \{(-1)^{16}, 1^{15}, -\frac{\sqrt{129}-1}{2}, \frac{\sqrt{129}+1}{2}\}$$

Спектри  $F_{16}$  та  $(D \cup 10K_2)$  однакові, отже, графи - коспектральні.

**Теорема 3.3.1.** [4] Будь-який граф, що коспектральний дружба графу  $F_n$ , є ізоморфним до цього графа  $F_n$ .

### 3.4 Твердження про характеристичний многочлен дружба графа

**Твердження 3.4.1.** *Характеристичний многочлен дружба графа має вигляд:*

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 2n)$$

*Доведемо за методом математичної індукції, що формула характеристичного многочлена дружба графа дійсна.*

*Крок 1 - База індукції*

*Перевіримо, що дана формула робоча при  $n = 2$ . Застосуємо теорему коалесценції:*

$$P_{G \cdot G'}(\lambda) = P_G(\lambda)P_{G'-v'}(\lambda) + P_{G'}(\lambda)P_{G-v}(\lambda) - \lambda P_{G-v}(\lambda)P_{G'-v'}(\lambda)$$

*Графи  $G$  та  $G'$  ідентичні та є циклами довжини 3, а отже, власні числа та вектори - однакові.*

*Знайдемо характеристичні многочлени графів  $G$ ,  $G'$ ,  $G - v$  та  $G' - v'$ :*

*1)  $G, G'$*

$$P_G(\lambda) = P_{G'}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

*2)  $G - v, G' - v'$*

$$P_{G-v}(\lambda) = P_{G'-v'}(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

*Підставимо в формулу для пошуку характеристичного многочлена коалесценції двох графів:*

$$\begin{aligned} P_{G \cdot G'}(\lambda) &= (\lambda^3 - 3\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) + (\lambda^3 - 3\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) - \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1) = \\ &= (\lambda^2 - 1)(2(\lambda^3 - 3\lambda - 2) - \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)) = (\lambda^2 - 1)((\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 - \lambda(\lambda - 1)) = \\ &= (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)((\lambda - 2)(\lambda + 1) + (\lambda - 2)(\lambda + 1) - \lambda(\lambda - 1)) = \\ &= (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 4) \end{aligned}$$

*База індукції вірна. Отже, дійсно, многочлен  $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 2n)$  справ-*

джується для графа  $F_n$  при  $n = 2$ .

*Крок 2 - Припущення*

Припустимо, що формула

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 2n)$$

виконується для  $n-1$ .

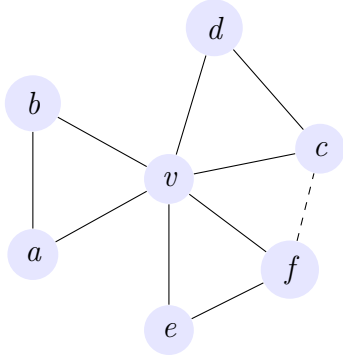
За припущенням характеристичний многочлен такий:

$$P_{F_{n-1}} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - 2(n - 1))$$

*Крок 3 - Доведення*

Доведемо, що для  $F_n$  характеристичний многочлен має вигляд із твердження, використовуючи припущення.

Маємо граф  $F_n$ , який є коалесценцією графів  $C_3$  та  $F_{n-1}$ :



$$G = C_3 = \{a, b, v\};$$

$$G' = F_{n-1} = \{d, c, v, \dots, f, e\};$$

Коалесценція  $F_n$  буде дорівнювати:

$$P(F_n) = P(C_3 \cdot F_{n-1})$$

Характеристичні многочлени всіх графів та підграфів:

$$1) P_G(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

$$2) P_{G-v}(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$3) P_{G'}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - 2(n - 1))$$

$$4) P_{G'-v'}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{n-1}$$

Підставляємо:

$$\begin{aligned}
P_{F_n}(\lambda) &= P_{C_3 \cdot F_{n-1}}(\lambda) = (\lambda^3 - 3\lambda - 2)(\lambda^2 - 1)^{n-1} + \\
&+ (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 2(n - 1)) - \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1} = \\
&= (\lambda^2 - 1)^{n-1}((\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2n + 2)) = \\
&= (\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda + 1)((\lambda + 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + (\lambda^2 - \lambda - 2n + 2)) = \\
&= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - 2\lambda + \lambda - 2 - \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - \lambda - 2n + 2) = \\
&= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 2n)
\end{aligned}$$

Отже, наше припущення (Крок 2) - вірне. Тоді многочлен:

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 2n)$$

дійсно є характеристичним многочленом дружба графа.

## Висновки

Дане дослідження було присвячено роботі з графами та була виконана робота над їх спектрами. Ми перевірили, що у різних графів дійсно може бути однаковий спектр, у наслідку - дані графи коспектральні.

Також ми розглянули теорему про коалесценцію і граф, який є коалесценцією  $n$  циклів довжини 3 – дружба граф  $F_n$ . Довели за допомогою методу математичної індукції, що формула характеристичного многочлена дружба графу дійсна.

Для дружба графа  $F_{16}$  довели, що граф, який йому коспектральний і неізоморфний - існує. У всіх інших випадках будь-який граф, який коспектральний дружба графу  $F_n (n \neq 16)$  - є ізоморфним йому.

## Список використаної літератури

- [1] Грушка Д. С. *Побудова коспектральних графів відносно узагальненої матриці суміжності* / Грушка Д. С., Лебідь В. О. // Могілянський математичний журнал: науковий журнал (2018), Т. 1. - С. 11-14.
- [2] Протасов В. Ю. *Изоморфизм графов и равенство симплексов* // Математические заметки, (2009), Т. 85. №. 5. С. 758-767.
- [3] Andries E. Brouwer, Willem H. Haemers, *Spectra of graphs* // third ed., Johann Abrosius Barth Verlag (1995).
- [4] Alireza Abdollahi *Connected graphs cospectral with a Friendship graph* / Alireza Abdollahi, Shahrooz Janbaz // Transactions on Combinatorics, Vol. 3 No. 2 (2014), pp. 17-20.
- [5] Dragoš Cvetković. *Applications of Graph Spectra: an Introduction to the Literature* // Zbornik Radova (2009), pp. 7-32.
- [6] E.R. van Dam, W.H. Haemers *Which graphs are determined by their spectrum?* // Linear Algebra Appl. 373 (2003), pp. 241 – 272.
- [7] Michelle L. Rittenhouse, *Properties and Recent Applications in Spectral Graph Theory* // Virginia Commonwealth University (2008).
- [8] Richard Kenyon, *Dimer Problems* // University of British Columbia (2005)
- [9] Steve Butler *Cospectral graphs for both the adjacency and normalized Laplacian matrices* // Linear and Multilinear Algebra No. 58 (2010), pp. 287–390.
- [10] Willem Haemers *Enumeration of cospectral graphs* / Edward Spence, Willem Haemers // European Journal of Combinatorics No. 25 (2004), pp. 199–211.
- [11] <https://mathworld.wolfram.com/CospectralGraphs.html>
- [12] <https://mathworld.wolfram.com/DeterminedbySpectrum.html>
- [13] <https://matrixcalc.org/vectors.html>