УДК 519.81

Михалевич В. М.

ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИТУАЦІЇ У СТОХАСТИЧНИХ ЗАДАЧАХ РІШЕННЯ

У статті розглядається експеримент випадкових стохастичних результатів. Ці результати і рішення визначають здобутки того, хто приймає рішення.

Через певні природні обмеження є дві моделі цієї ситуації: лотерейна і матрична.

Для кожної матричної моделі $M_м$ ситуації існує унікальна лотерейна модель $M_л$ цієї ж ситуації. Така відповідність (відображення) називається проекцією класу матричних моделей на клас лотерейних моделей ситуацій прийняття рішень. Виявляється, що ця проекція сюр'єктивна. Ми доводимо тут, що клас ситуацій задач прийняття рішень, які моделюються в матричному вигляді, збігається з класом ситуацій задач прийняття рішень, що моделюються в лотерейному вигляді.

Розглядається експеримент, випадкові можливі результати (впливи) якого залежно від рішення, яке приймається, визначають здобутки того, хто приймає це рішення ([3], [6] - [10]).

Одна зі схем такої ситуації, надалі називатимемо її лотерейною і позначатимемо $Z_л$, може бути формалізована у вигляді трійки:

$$Z_л = (D, R, a(\bullet)), \tag{1}$$

де D – простір рішень (дій), R – простір здобутків (наслідків), a – багатозначне відображення простору дій у простір здобутків, тобто $a(d) \subset R$, $\forall\ d \in D$.

Інша схема цієї ситуації, далі називатимемо її матричною ([3], [6]) і позначатимемо $Z_м$, може бути представлена у вигляді четвірки:

$$Z_м = (\Omega, D, R, \sigma(\bullet, \bullet)), \tag{2}$$

де D і R, як і вище, простори рішень і здобутків відповідно, Ω – простір впливів, а σ – функція здобутків ([3]), $\sigma \in R^{\Omega \cdot D}$, тобто $\forall\ \omega \in \Omega$, $\forall\ d \in D$ $\sigma(\omega, d) \in R$.

При цьому матрична схема природно виникає, коли в умові задачі рішення наявний простір впливів Ω. Хоча остання обставина здійснюється далеко не завжди, проте в багатьох випадках матричне представлення виявляється зручнішим, ніж лотерейне. Зокрема це стосується задач рішень зі спостереженнями, в яких у разі використання лотерейної формалізації виникають дуже громіздкі формули й міркування ([6]). Тому становлять інтерес задачі переходу від матричної схеми до лотерейної і навпаки - від лотерейної до матричної.

Такі самі задачі виникли й на рівні моделей ситуації задачі рішення. Спрощено кажучи, модель ситуації доповнює її схему інформації стосовно випадковості здобутку. Точніше, лотерейна модель ситуації $M_л$ може бути формалізована у вигляді трійки

$$M_л = (D, (R, B), \{\mu_d, d \in D\}), \tag{3}$$

де D і R – простори рішення і здобутків відповідно, B – σ-алгебра на R, а μ_d – ймовірна міра на вимірному просторі (R, B), $\forall\ d \in D$.

Зв'язок $M_л$ з відповідною $Z_л$ зрозумілий: $a(d)$ – підмножина з R, на якій зосереджена міра μ_d (зрозуміло, що $a(d)$ визначається з точністю до множини з нульовою мірою μ_d).

У свою чергу матрична модель ситуації $M_м$ представляється у вигляді четвірки:

$$M_м = ((\Omega, A, \mu), D, (R, B), \sigma(\bullet, \bullet)), \tag{4}$$

де (Ω, A, μ) – ймовірнісний простір на просторі впливів Ω, з σ-алгеброю A і повною мірою μ. При цьому $\forall\ B \in B, \forall\ d \in D$; має виконуватись умова $\{\omega \in \Omega : \sigma(\omega, d) \in B\} \in A$.

Далі на множині R з відповідним відношенням переваг припускається існування функції корисності U ([3], [10]). При цьому вважається, що функція U вимірна відносно відповідної σ-алгебри B ([3]).

Використовуючи функцію корисності, ми можемо представити наші моделі у зручнішому вигляді.

У разі лотерейної формалізації з (3) отримуємо

$$M_л = (D, \{X_d, d \in D\}), \tag{5}$$

де випадкові величини $X_d = U(r)$, $\forall\ r \in R$ з імовірнісного простору (R, B, M_d), $\forall\ d \in D$. Тобто $M_л$ – однопараметрична сім'я випадкових величин, параметризована множиною D з функціями розподілу $F_d(x) = \mu_d\{r \in R : U(r) < x\}$, $\forall\ d \in D$.

У матричному представленні ситуації з (4) матимемо

$$M_м = ((\Omega, A, \mu), D, L(\bullet, \bullet)), \tag{6}$$

де $L \in (\Omega \times D)^{R_1}$ така, що $L(\omega, d) = -U\,|\sigma(\omega, d)|$ і $L(\bullet, d)$ – вимірна відносно σ-алгебри A, $\forall\, d \in D$, $\forall\, \omega \in \Omega$ (останнє відразу випливає з властивостей функції U і σ). Тобто L буде т. зв. функцією втрат ([3]), яка є випадковою функцією ([1], [2], [4]).

Повертаючись до поставлених вище задач переходу, достатньо просто показати, що в нижчевказаному сенсі матрична і лотерейна схеми еквівалентні. Справді, при переході від матричної схеми $Z_м$ до лотерейної схеми $Z_л$ тієї ж ситуації (операцію коротко називатимемо проектуванням) за багатозначне відображення a беремо таке, для якого

$$a(d) = \{\sigma(\omega, d) : \omega \in \Omega\},\ \forall\, d \in D. \tag{7}$$

Обернений перехід від лотерейної схеми $Z_л$ до матричної $Z_м$, такої, що проекція останньої збігається з $Z_л$, здійснюється таким чином. За простір впливів Ω обираємо $\Omega = \{\omega \in D^R : \omega(d) \in a(d)\ \forall\, d \in D\}$, а функцію σ визначаємо як таку, що $\sigma(\omega, d) = \omega(d)$, $\forall\, \omega \in \Omega$, $\forall\, d \in D$. Тобто операція проектування є сюр'єктивним відображенням класу лотерейних схем ситуацій прийняття рішення $Z_л = \{Z_л(\bullet, \bullet, \bullet)\}$ у клас матричних схем ситуацій прийняття рішення $Z_м = \{Z_м(\bullet, \bullet, \bullet)\}$ ([6]).

Виявляється, що і для розглянутих вище моделей ситуації має місце аналогічний результат. А саме, під час переходу від матричної моделі $M_м$ (6) до лотерейної $M_л$ визначимо процедуру проектування, задавши розподіли випадкових величин X_d, $d \in D$, для $M_м$ таким чином: $F_d(x) = \mu(\{\omega \in \Omega : L(\omega, d) < x\})$, $\forall\, d \in D$. Це визначення коректне внаслідок вимірності $L(\bullet, d)$ відносно σ-алгебри A, $\forall\, d \in D$.

Обернений перехід від лотерейної моделі ситуації $M_л$ (5) до матричної $M_м$, такої що її проекція збігається з $M_л$, здійснюється таким чином. Ми можемо задати на сім'ї випадкових величин $\{X_d, d \in D\}$ випадкову функцію в широкому сенсі ([1], [2]), поклавши сумісні функції розподілу послідовності випадкових величин $X_{d_1}, X_{d_2}, \ldots, X_{d_n}, \forall d_1, d_2, \ldots, d_n \in D, \forall n \in N$, як $F_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{d_1}(x_1) \cdot F_{d_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{d_n}(x_n)$. За фундаментальною теоремою Колмогорова для будь-якої випадкової функції в широкому сенсі можна побудувати стохастично еквівалентну в широкому сенсі випадкову функцію ([1], [2], [4]). Ця випадкова функція очевидно і є результатом оберненого переходу від $M_л$ (5) до $M_м$, бо її проекція збігається з $M_л$ (5).

З отриманих нами результатів можна зробити висновок у формі такої теореми.

Теорема. Клас ситуацій задач прийняття рішень, які моделюються в матричному вигляді, збігається з класом ситуацій задач прийняття рішень, що моделюються в лотерейному вигляді.

[1]. *Блекуэл Д., Гиршик М.* Теория игр и статистических решений. - М.: ИЛ, 1958.

[2]. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, 1965. - 655 с.

[3]. *Гитман И. И., Скороход А. В.*

[4]. *Де, Гроот М.* Оптимальные статистические решения. - М.: Мир, 1975. - 491 с.

[5]. *Ду Дж. Л.* Случайные процессы. - М.: ИЛ, 1956.

[6]. *Иваненко В. И., Лабковский В. А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. - К.: Наук. думка, 1990. - 135 с.

[7]. *Лоэв М.* Теория вероятностей. - М.: ИЛ, 1962. - 720 с.

[8]. *Льюс Р. Д., Райфа Х.* Игры и решения. - М.: ИЛ, 1961. - 642 с.

[9]. *Фишберн П. С.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978. - 358 с.

[10]. *Невьё.* Математические основы теории вероятностей. - М.: Мир, 1969. - 310 с.

[11]. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука, 1970. - 707 с.

V. M. Mykhalevych

ON MODELS OF SITUATIONS IN STOCHASTIC DECISION MAKING PROBLEMS

We consider an experiment with random stochastic outcomes. These outcomes and decisions made by a decision maker define the gain of the latter.

Under some natural restrictions there are two models, lottery and matrix, of such situation.

For each matrix model $M_м$ of a situation there is a unique lottery model $M_л$ of this situation. Such a correspondence (mapping) is called a projection of a class of matrix models into a class of lottery models of decision making situations. It appears that this projection is surjective. We prove here that a class of decision making situations that can be described in the matrix form coincides with a class of decision making situations modeled in the lottery form.