

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

**Кваліфікаційна робота на тему:
Анігільатори в графах**

Керівник кваліфікаційної роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*

(підпис)
“ _____ ” _____ 2023 р.

Виконав студент
4-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Дехтяр Юр-Любомисл

Київ – 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,

проф., к.ф-м.н.

_____ Р.К. Чорней

(підпис)

“ _____ ” _____ 2023 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу

студенту 4-го курсу факультету інформатики

Дехтяреві Юрові-Любомислу Валерійовичу

Тема: Анігілятори в графах.

Вихідні дані: Досліджено анігілятори в графах.

Зміст ТЧ до кваліфікаційної роботи:

1 Вступ

2 Основні означення та попередні результати

2.1 Означення

2.2 Попередні результати

3 Основні результати

3.1 Анігіляторні відображення

4 Висновки

Література

Дата видачі “ _____ ” _____ 2023 р. Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Тема: Анігілятори в графах.

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу кваліфікаційної	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	30.09.2022	
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної.	30.09.2022	
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.10.2022	
4.	Дослідження основних властивостей анігіляторів.	01.12.2022	
5.	Дослідження простих опуклих множин та графів їх перетинів.	10.01.2023	
6.	Дослідження графів перетинів простих анігіляторів.	10.02.2023	
7.	Написання програми для виявлення графів перетинів простих анігіляторів.	01.03.2023	
8.	Дослідження анігіляторних відображень.	01.05.2023	
9.	Робота над текстовим оформленням результатів.	25.05.2023	

Зміст

1 Вступ	5
2 Основні означення та попередні результати	6
2.1 Означення	6
2.2 Попередні результати	8
3 Основні результати	15
3.1 Анігіляторні відображення	26
4 Висновки	35

1 Вступ

У сій роботі розглядається поняття анігілятора в графах. Метою дослідження є вивчити їхні властивості та зв'язок з іншими поняттями з теорії графів.

На зв'язних графах досить природньо вводиться метричний простір (відстань між двома вершинами - це довжина найкоротшого шляху між ними). Це дозволяє ввести на графах такі знайомі з математичної аналізи поняття, як опуклі множини, зв'язні множини, (метричні) відрізки. Зокрема, це дозволяє ввести поняття анігілятора. Анігілятор визначається для пари вершин графа: a і b , і його зручно уявляти як промінь, що виходить із вершини b , а вершина a задає його напрям.

У першому розділі роботи розглядаються основні властивості анігіляторів, які в основному відомі з літератури. Особливу увагу приділено особливим анігіляторам, що називаються простими, та похідному поняттю - графам перетинів простих анігіляторів. Дуже корисними для цього дослідження виявляються прості опуклі множини, зокрема графи перетинів простих опуклих множин, і їм також відводиться особлива увага.

У другому ж розділі представлено основні результати роботи. Особливий інтерес викликали такі запитання. По-перше, у сій розділі детально досліджуються графи перетинів простих анігіляторів, з метою навести вичерпну характеристизацію. По-друге, детальніше розглядаються графи перетинів простих опуклих множин з метою виявлення класу графів, що є такими. У останньому підрозділі розглядаються анігіляторні відображення. У метричній теорії графів особливе місце відведено лінійним та неперервним відображенням, що вводяться з використанням метричних відрізків. Цікаво розглянути, що ж відбувається, якщо у означеннях цих відображень замінити відрізки на відповідні анігілятори? Які властивості матимуть такі відображення? Забігаючи наперед, виявляється, що вони дуже тісно пов'язані.

2 Основні означення та попередні результати

Оскільки метрика вводиться тільки на зв'язних графах, надалі усі графи вважаються зв'язними.

2.1 Означення

Означення 2.1. Відстанню $d(u, v)$ між вершинами u та v графа G називається довжина найкоротшого шляху між ними.

Означення 2.2. Околом вершини x графа G називається множина $N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$. Поняття околу легко поширюється на множину вершин: $N(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V(G) \setminus X \mid \exists x \in X : xy \in E(G)\}$, $X \subset V(G)$.

Зауваження 2.3. Тут і надалі, множину вершин графа G позначатимемо $V(G)$, а множину його ребер - $E(G)$.

Означення 2.4. Метричним відрізком у графі G між вершинами $u, v \in V(G)$ називається множина вершин $w \in V(G)$ таких, що:

$$d(u, w) + d(w, v) = d(u, v).$$

Позначається $[u, v]_G$ або просто $[u, v]$, якщо з контексту зрозуміло, про який граф іде мова.

Означення 2.5. Анігілятором $[a, b]$ графа G , де $a, b \in V(G)$, називається множина $\{x \in V(G) \mid b \in [a, x]\}$. Іншими словами, анігілятор - це множина вершин x таких, що вершина b лежить на метричному відрізку $[a, x]$.

Означення 2.6. Анігілятор $[a, b]$ графа G називається *простим*, якщо виконуються дві умови:

1. $[a, b] \cap [b, a] = \emptyset$.
2. $[a, b] \cup [b, a] = V(G)$.

Зауваження 2.7. З означення 2.6 видно, що анігілятор $[a, b]$ простий тоді й тільки тоді, коли простий і $[b, a]$, адже обидві умови симетричні відносно a, b .

Означення 2.8. Граф G називається *графом перетинів простих анігіляторів*, якщо довільний анігілятор графа G , окрім тривіальних анігіляторів $[a, a]$, $a \in V(G)$, можна представити як перетин простих.

Означення 2.9. *Півпростором* $W(a, b)$ графа G , де $ab \in E(G)$, називають множину $\{x \in V(G) \mid d(a, x) < d(b, x)\}$. Себто півпростір - це множина вершин графа, ближчих до a аніж до b .

Означення 2.10. Множина $A \subset V(G)$ називається *зв'язною*, якщо $G[A]$ - зв'язний граф.

Зауваження 2.11. Якщо A - підмножина $V(G)$, то $G[A]$ - граф, породжений A .

Означення 2.12. Множина $A \subset V(G)$ називається *чебишовською*, якщо для $\forall x \in V(G) \mid pr_A(x) \mid = 1$, де $pr_A(x) = \{a \in A \mid \forall y \in A : d(a, x) \leq d(y, x)\}$ - проєкція вершини x на множину A .

Означення 2.13. Множина $A \subset V(G)$ називається *множиною з ворітьми*, якщо $\forall x \in V(G) \exists y \in A \forall z \in A : y \in [x, z]$. При цьому y називається *воротями* для x в A .

Означення 2.14. Множина $A \subset V(G)$ називається *опуклою*, якщо для $\forall a, b \in A$ метричний відрізок $[a, b]_G$ є підмножиною A . Опукла множина A є *простою*, якщо її доповнення $V(G) \setminus A$ - також опукле.

Означення 2.15. *Циклом* називається шлях у графі, у якому перша та остання вершини збігаються. Якщо при цьому усі інші вершини різні між собою, то шлях називається простим циклом. Граф, який сам по собі є простим циклом та має k вершин позначатимемо C_k . *Довжиною* циклу називається кількість ребер (вершин) на ньому.

Означення 2.16. Граф T називається *деревом*, якщо він зв'язний і не містить циклів.

Означення 2.17. Граф G називається *двочастковим*, якщо множину його вершин можна розбити на дві неперетинні множини U та V так, що будь-яке ребро із $E(G)$ містить вершину як з U , так і з V .

Означення 2.18. Граф G називається *медіанним*, якщо для будь-яких трьох вершин u, v, w графа існує вершина t така, що $[u, v] \cap [v, w] \cap [w, u] = \{t\}$. Вершину t називають медіанною вершин u, v, w .

Означення 2.19. Граф G називається *графом блоків*, якщо кожен його блок (компонента двозв'язності) є повним підграфом.

Зауваження 2.20. Граф блоків іноді визначають як граф перетинів блоків довільного графа [4], а означення подане вище подають як характеристику графів блоків. Втім, у сій роботі буде використано лише означення вище; крім того, на думку автора воно краще передає інтуїцію щодо того, чим же насправді є графи блоків.

Означення 2.21. Граф називається *хордальним*, якщо кожен його цикл із чотирма або більше вершинами містить хорду.

Означення 2.22. Підграф H графа G називається *ізометричним*, якщо він зберігає відстані між вершинами:

$$\forall u, v \in V(H) : d_H(u, v) = d_G(u, v).$$

2.2 Попередні результати

Спершу розглянемо декілька простих тверджень, які однак допоможуть відчувати що ж таке сі анагілятори.

Твердження 2.23. *Най $a, b \in V(G)$. Тоді $[a, b] \cap [b, a] \neq \emptyset \iff a = b$ [9].*

Довід. Доведемо достатню умову. Най $x \in [a, b] \cap [b, a]$. З того, що $x \in [a, b]$, за означенням анігілятора слідує, що $b \in [a, x]$. Се значить, що $d(a, b) + d(b, x) = d(a, x) \implies$ якщо $a \neq b$, то $d(b, x) < d(a, x)$. З симетричної умови $x \in [b, a]$ дуально отримаємо, що якщо $a \neq b$, то $d(b, x) < d(a, x)$. Однак сі нерівності суперечать одна одній. Отже, $a = b$. Довід необхідної умови вельми простий. Допитливий читач його з легкістю проведе самостійно. \square

Зауваження 2.24. Легко бачити, що $b \in [a, b]$. А як щодо a ? Виявляється, $a \in [a, b] \iff a = b$. Се прямо впливає із **твердження 2.23**, у чому я закликаю читача переконатися власноруч.

Поняття анігілятора фактично є узагальненням поняття півпростору. Наступне зауваження формалізує сей факт.

Твердження 2.25. *Для будь-яких $a, b \in V(G) : ab \in E(G)$ виконується рівність $W(a, b) = [b, a]$.*

Довід. Най $x \in W(a, b)$. Тоді $d(a, x) < d(b, x)$. Оскільки відстані у графі є цілими числами, модемо записати наступне:

$$d(a, x) < d(b, x) \iff d(a, x) + 1 \leq d(b, x) \iff d(a, x) + d(a, b) \leq d(b, x)$$

Однак за нерівністю трикутника $d(a, x) + d(a, b) \geq d(b, x)$. Отже $d(a, x) + d(a, b) = d(b, x) \implies a \in [x, b] \implies x \in [b, a]$. Отже $W(a, b) \subseteq [b, a]$. Най $x \in [b, a]$. Се значить, що $a \in [x, b]$ (за означенням анігілятора), а тоді

$$d(x, a) + d(a, b) = d(x, b) \iff d(x, a) + 1 = d(x, b) \implies d(x, a) < d(x, b) \implies x \in W(a, b)$$

А відтак $[b, a] \subseteq W(a, b)$. Враховуючи $W(a, b) \subseteq [b, a]$ отримуємо $W(a, b) = [b, a]$, що й потрібно було довести. \square

На сім етапі хотілося б трохи поговорити про прості анігілятори. Спершу наведу твердження, доведене в [9], що описує їх у загальних рисах.

Твердження 2.26. *Якщо $[a, b]$ - простий анігілятор, то $ab \in E(G)$ [9].*

Довід. Проведемо довід від супротивного. Най $[a, b]$ - простий анігілятор, $ab \notin E(G)$. Очевидно, $a \neq b$, бо інакше за **твердженням 2.23** $[a, b] \cap [b, a] \neq \emptyset$. Тоді $\exists x \neq a, b : x \in [a, b] \implies$

$$d(a, x) < d(a, b) \quad i \quad d(b, x) < d(a, b) \tag{1}$$

Оскільки $[a, b]$ - простий, то $x \in [a, b] \cup [b, a]$. Без обмеження загальності, припустимо що $x \in [a, b]$. Тоді $b \in [a, x] \implies d(a, b) \leq d(a, x)$. Однак се суперечить (1)! Отже початкове припущення невірне і $ab \in E(G)$. \square

Зауваження 2.27. Цікаво, що **твердження 2.26** можна послабити. Насправді, якщо $[a, b] \cup [b, a] \neq \emptyset$, то звідси уже випливає, що $ab \in E(G)$. Пропоную читачеві переконатися у цьому самостійно.

У простих інігіляторів є деякі цікаві властивості. Тримаючи у голові попередні два твердження, перейдімо до їх розгляду.

Твердження 2.28. *Най $a, b \in V(G)$, a і b - суміжні. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1. $W(a, b)$ - простий анігілятор.

2. $\{a, b\}$ - чебишовська множина.

3. $W(a, b) \sqcup W(b, a) = V(G)$ [9].

Довід. Спершу доведемо, що із першої умови випливає третя. Оскільки $W(a, b)$ - простий, то за **твердженням 2.25** $W(a, b) = [b, a]$. Отже, $[b, a]$ - простий анігілятор. Се значить, що $[b, a] \sqcup [a, b] = V(G)$. А се і є шукана рівність (**твердження 2.25**)!

Тепер доведемо, що з третьої умови слідує друга. Зафіксуємо $x \in V(G)$. З третьої умови маємо, що або $x \in W(a, b)$, або $x \in W(b, a)$. Без обмеження загальності припустимо перше. Тоді $d(a, x) < d(b, x) \implies pr_{\{a, b\}}(x) = \{a\} \implies \{a, b\}$ - чебишовська!

Наостанок покажемо, що перша умова є наслідком другої. Зробимо ми се від супротивного. Дійсно, най $W(a, b)$ - не простий. Тоді або $\exists x \notin W(a, b) \cup W(b, a)$, або $W(a, b) \cap W(b, a) \neq \emptyset$. Зважаючи на **твердженням 2.23**, друге є неможливим, тому виконується перше. Якщо $x \notin W(a, b) \cup W(b, a)$, то $d(a, x) \leq d(b, x)$ і $d(b, x) \leq d(a, x) \implies d(a, x) = d(b, x)$. Отже, $pr_{\{a, b\}}(x) = \{a, b\} \implies \{a, b\}$ - не чебишовська, що завершує довід. \square

Продовжимо розмову про властивості простих анігіляторів у наступному ключі. Ми розглянемо конструкцію, побудовану на простих анігіляторах, і розберемося, що вона собою являє. Мова іде про графи перетинів простих анігіляторів (**озн. 2.8**). Не тримаючи інтригу, наведу твердження, що пов'язує їх із іншою досить добре вивченою класою графів.

Теорема 2.29. *Якщо граф G - двочастковий, то він є графом перетинів простих анігіляторів [9].*

Перш ніж перейти до доведення теореми, пропоную розглянути допоміжну лему.

Лема 2.30. *Най у графі G кожна пара суміжних вершин породжує простий анігілятор. Тоді G є графом перетинів простих анігіляторів [9].*

Довід. Най $u, v \in V(G)$. Покажемо, що анігілятор $[u, v]$ є перетином простих. Для сього розглянемо множину \mathcal{P} впорядкованих пар вершин (s, t) таких, що $st \in E(G)$, ребро st лежить на якомусь із найкоротших шляхів між u та v , і $d(u, s) < d(u, t)$. Визначимо множину вершин $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{(s, t) \in \mathcal{P}} [s, t]$.

Очевидно, що \mathcal{D} є перетином простих анігіляторів, адже за умовою кожне ребро породжує простий анігілятор. Таким чином, достатньо довести, що

$\mathcal{D} = [u, v]$. Проведемо сей довід у два кроки.

Спершу покажемо, що $\mathcal{D} \supseteq [u, v]$. Най $x \in [u, v]$. Тоді $v \in [u, x] \implies u - s - t - v - x$ - один із найкоротших шляхів між u та x для усіх пар $(s, t) \in \mathcal{P}$. А відтак $s - t - v - x$ є одним із найкоротших шляхів між s та x , адже інакше існував би коротший шлях між u та x (**рис. 1**). Таким чином, $t \in [s, x] \implies x \in [s, t]$, що завершує першу частину.

Лишається пересвідчитися, що $\mathcal{D} \subseteq [u, v]$. Най $x \in \mathcal{D}$. Зафіксуємо один із найкоротших шляхів між u та v : $v = s_0 - s_1 - \dots - s_{n-1} - s_n = u$ (**рис. 2**). Очевидно, $d(u, v) = n$. Покладемо $j \stackrel{\text{def}}{=} d(u, x) = d(s_n, x)$. Помітимо, що оскільки $x \in \mathcal{D}$, то $x \in [s_i, s_{i-1}]$, $i = \overline{1..n}$. Тоді, за означенням анігілятора, $s_{i-1} \in [s_i, x]$. Маємо:

$$d(x, s_{i-1}) + d(s_{i-1}, s_i) = d(x, s_i) \implies d(x, s_{i-1}) = d(x, s_i) - 1 \quad (2)$$

$$\implies d(x, s_{i-k}) = d(x, s_i) - k, \quad (3)$$

де останній крок доводиться за індукцією. Дійсно, база се рівняння (2). Крок виглядає так:

$$d(x, s_{i-k}) = d(x, s_{i-(k-1)}) - 1 = d(x, s_i) - (k-1) - 1 = d(x, s_i) - k$$

З рівняння (3) отримуємо таке:

$$d(v, x) = d(s_{n-n}, x) = d(x, s_n) - n = d(x, u) - n = d(x, u) - d(u, v)$$

Однак тоді $v \in [u, x] \implies x \in [u, v] \implies \mathcal{D} \subseteq [u, v]$, що доводить лему. \square

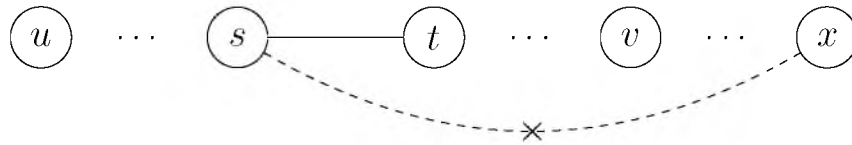


Рис. 1: Якщо між s та x існував би коротший шлях, то він би породжував коротший шлях між u та x

Тепер можна перейти до доводу **теорема 2.29**

Довід. Припустимо, що ми показали, що у двочастковому графі G кожне ребро породжує простий анігілятор. Тоді, згідно з **лемою 2.30**, G є графом перетинів простих анігіляторів. Отже, досить показати, що довільний

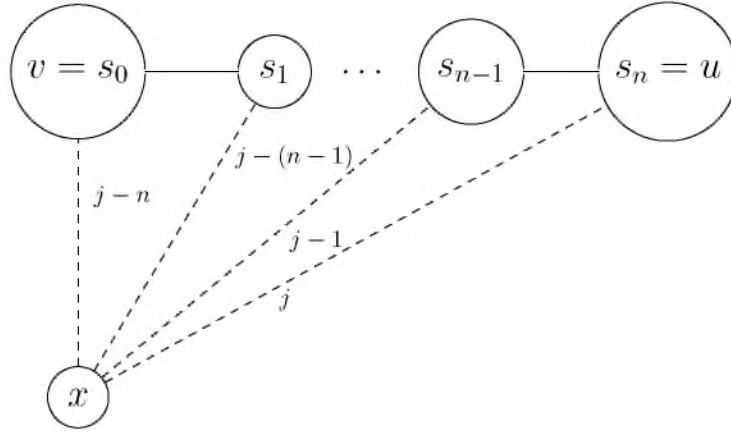


Рис. 2: $d(x, s_{n-i}) = j - i$, де $j \stackrel{\text{def}}{=} d(x, u)$

двочастковий граф задовольняє вказану властивість. Зробімо се від супротивного.

Припустимо, що існує ребро ab двочасткового графа G , яке не породжує простий анігілятор. Тоді, зважаючи на твердження **твердження 2.23**, маємо, що $\exists x \in V(G), x \notin [a, b] \cup [b, a]$. Оскільки $x \notin [a, b]$, то $b \notin [a, x]$. Тоді $d(a, x) \leq d(b, x)$, адже припустивши протилежне одразу отримуємо протиріччя:

$$d(a, x) > d(b, x) \implies d(a, x) \geq d(b, x) + 1 = d(b, x) + d(a, b) \implies b \in [a, x]$$

Дуально можна показати, що $d(b, x) \leq d(a, x)$. Єдиний спосіб задовольнити обидві нерівності: $d(a, x) = d(b, x)$. Тепер розгляньмо точку $c \in [a, x] \cap [b, x]$, що знаходиться найближче до точки a . Зауважу, що в такому разі вона буде водночас найближчою до точки b , адже усі точки із $[a, x] \cap [b, x]$ рівновіддалені від a і b :

$$\forall y \in [a, x] \cap [b, x] : d(a, y) = d(a, x) - d(y, x) = d(b, x) - d(y, x) = d(b, x)$$

Тоді точки a, b, c лежать на непарному циклі (його довжина: $d(a, b) + d(b, c) + d(c, a) = 1 + 2d(b, c)$). А за відомим фактом з теорії графів ([4], ст. 18) у двочастковому графі немає непарних циклів. Се притиріччя завершує довід. \square

Зауваження 2.31. Як слушно вказано у доводі **теорема 2.29**, двочасткові графи - се якраз ті графи, у яких усі цикли парні. Варто зауважити, що якщо у графі знайдеться хоча б один непарний цикл, то у ньому

обов'язково знайдеться ребро, що не породжує простий анігілятор. І справді, розглянемо найменший непарний цикл C нашого графа G і довільне ребро $ab \in E(C)$. Позначимо як x найвіддаленішу від ab вершину з C (**рис. 3**). Най $d_C(a, x) = d_C(b, x) = k$. Як відомо найменший цикл непарної довжини у графі є обов'язково ізометричним (**озн. 2.22**). Тому $d_G(a, x) = d_G(b, x) = k$. А відтак $x \notin W(b, a) \cup W(a, b) = [a, b] \cup [b, a] \implies [a, b]$ - не простий!

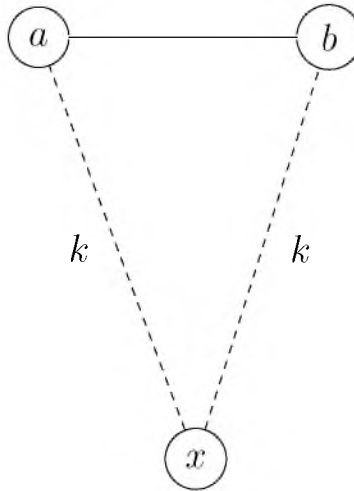


Рис. 3: Ізометричний цикл C . Вершина x рівновіддалена від a та b , тому не належить жадному з півпросторів, породжених ними

Деякі властивості анігіляторів розкриваються при використанні простих опуклих множин. Зокрема, досить цікавою є тема порівня графів перетинів простих анігіляторів та графів перетинів простих опуклих множин. Однак перш ніж перейти до їх розгляду, я вважаю було б доцільно присвятити трішку часу для того, щоби дослідити графи перетинів простих опуклих множин і з'ясувати, що вони із себе являють.

Для початку, цікаво подивитися, які ж опуклі множини є простими. Одну з відповідей дає **означення 2.14**. Дещо в інших термінах, на се питання відповідає наступне твердження.

Твердження 2.32. *Якщо $A \subset V(G)$ - проста опукла множина вершин графа G , то для $\forall a \in A : N(a) \setminus A$ - кліка.*

Довід. Зафіксуємо $a \in A$. Най $b, c \in N(a) \setminus A$. Тоді, $[b, c] \subset V(G) \setminus A$, адже A - проста опукла, тому її доповнення також опукле. Однак тепер легко

бачити, що $d(b, c) = 1$, адже у зворотньому випадку $b - a - c$ буде одним із найкоротших шляхів між b та c . Отже, $bc \in E(G)$, а оскільки b і c були вибрані довільним чином, то $N(a) \setminus A$ - кліка. \square

Зауваження 2.33. Зауважу, що в інший бік твердження не буде правдивим. З умови, що для $\forall a \in A : N(a) \setminus A$ - кліка, не випливає, що A - проста опукла. Ба більше, се не стане правдою в загальному випадку, навіть якщо накласти додаткову умову, що A - опукла. Контрприклад для цієї гіпотези наведений на **рис. 4**.

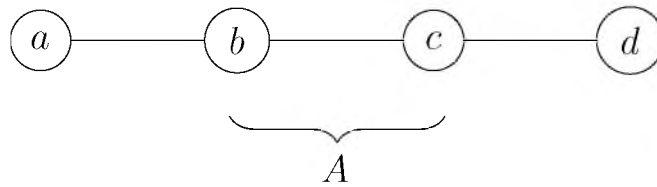


Рис. 4: Най $A = \{b, c\}$ - опукла множина, причому вона задовольняє умову $\forall a \in A : N(a) \setminus A$ - кліка. Однак A - не проста!

Для розмови про графи перетинів простих опуклих множин годилося б спершу розглянути, які графи є такими. Яскравим прикладом є медіанні графи, про що свідчить наступний результат.

Теорема 2.34. *Медіанні графи є графами перетинів простих опуклих множин.*

Сю теорему доведено у [1]. У секції про основні результати я наведу новий довід, який розглядає сю задачу з графової перспективи.

Щодо зв'язку між графами перетинів простих опуклих множин та графів перетинів простих анігіляторів, то його прекрасно описує наступна теорема.

Теорема 2.35. *Най G - граф перетинів простих опуклих множин. Тоді G є графом перетинів простих анігіляторів тоді і лише тоді, коли G - двочастковий.*

Довід. Див. [9]. \square

3 Основні результати

При розгляді опуклих множин виділяється окрема класа: двоточкові опуклі множини, а саме, ребра. Цікаво, за яких умов ці опуклі множини є простими? А що якщо умову посилити, і припустити, що кожне ребро у графі є простим? Виявляється, для таких графів існує досить нескладна характеристика, яка висвітлена у наступній теоремі.

Теорема 3.1. *Графи, у яких кожне ребро є простою опуклою множиною, се повні графи K_n , а також ланцюг P_3 , та цикли C_4 й C_5 (див. рис. 5).*

Довід. Досить нескладно переконатися, що ребра наведених в умові графів дійсно є простими опуклими множинами. Переконаємося, що для усіх інших графів се не так.

Спершу, припустимо, що граф G не є графом блоків (озн. 2.21). Згідно з [2], графи блоків се якраз ті графи, у яких немає породжених діамантів та циклів довжиною більшою або рівною 4. Оскільки G - не граф блоків, то:

1. G містить породжений діамант (рис. 6).

Най вершини діаманта позначені як на рисунку. Тоді легко бачити, що ребро ab - не є простою опуклою множиною, адже $A \stackrel{\text{def}}{=} V(G) \setminus \{a, b\}$ - не опукла! Дійсно, $x, y \in A$, але $[x, y] \not\subseteq A$, оскільки $a, b \in [x, y]$ (x та y - не з'єднані, бо діамант породжений, а тому відстань між ними хоча б 2).

Отже, такі G не задовольнятимуть умову теореми.

2. G містить породжений цикл довжиною хоча б 4.

Спершу розглянемо випадок, коли $G \cong C_k$, $k \geq 4$. Якщо $k = 4$ або $k = 5$, то кожне ребро у G - просте опукле. Інакше, у G жадне ребро не буде простим опуклим, адже воно лежатиме на відрізку між сусідніми вершинами.

Якщо ж G не є простим циклом, але у G породжений підграф $C_{k \geq 4}$, то існує вершина $a \in V(C_k)$, що суміжна з вершиною $b \notin C_k$ (рис. 8). Тоді ребро ab не буде простим опуклим. Дійсно, оскільки C_k - породжений підграф, то $a_{-1}a_1 \notin E(G)$, а тоді $a \in [a_{-1}, a_1] \implies V(G) \setminus \{a, b\}$ - не опукла множина.

Таким чином, окрім графів блоків є лише 2 графи, у яких усі ребра прості опуклі - C_4 й C_5 .

Як же щодо графів блоків? Якщо у графі G є лишень 1 блок, то він має бути повним, а отже G - повний граф. Легко пересвідчитися, що K_n задовольняє умову. Тепер припустимо, що у графі G більше, ніж 1 блок. Тоді у G є точка з'єднання u . Розглянемо двох її сусідів (ступінь точки з'єднання завше хоча б 2) a та b . Звісно, вони лежатимуть у різних блоках. Най знайдеться іще одна вершина $c \in [a, u]$ (рис. 9). Тоді ребро ub не буде простим, адже граф $G - u$ - не зв'язний, і вершини a та c опиняться у різних компонентах. Отже такої вершини c немає. Дуально, анігілятор $[b, u]$ не містить жадної вершини, окрім a . Отже, отримуємо єдиний граф: P_3 , що завершує довід. \square

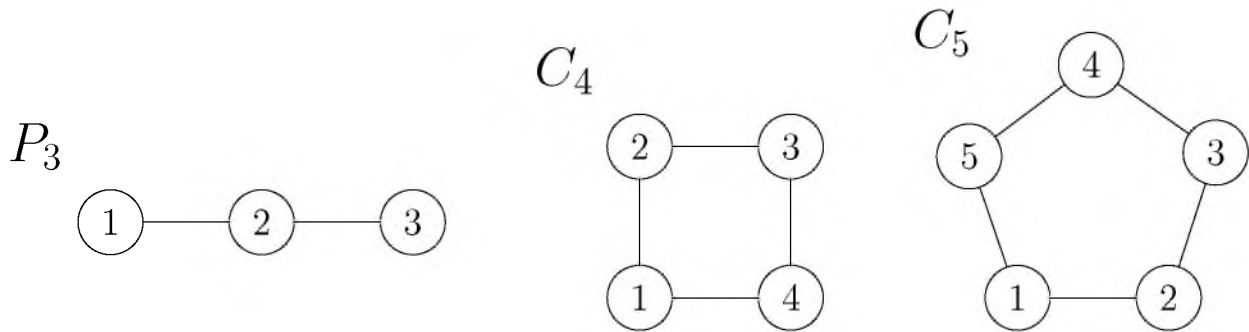


Рис. 5: Не повні графи, для яких кожне ребро є простим опуклим

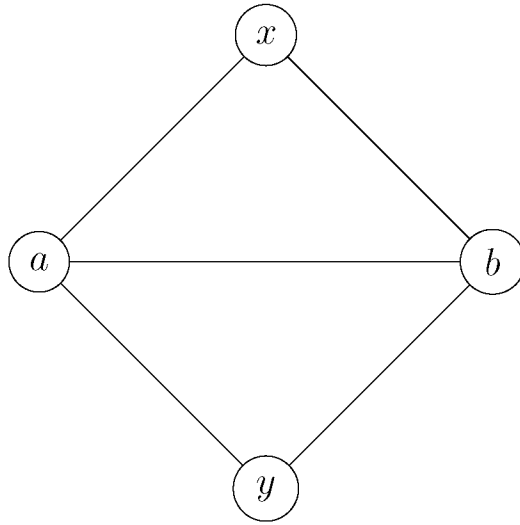


Рис. 6: Граф-діямант

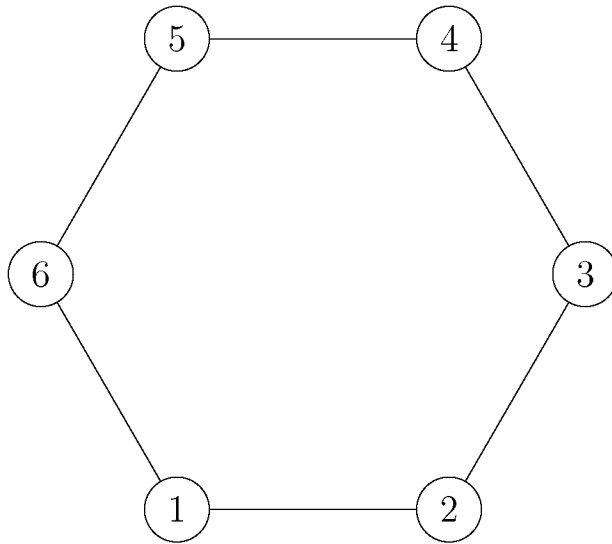


Рис. 7: Цикл C_6 . Доповнення до ребра 12 - не опукла множина, адже відрізок $[3, 6]$ містить вершини 1 та 2

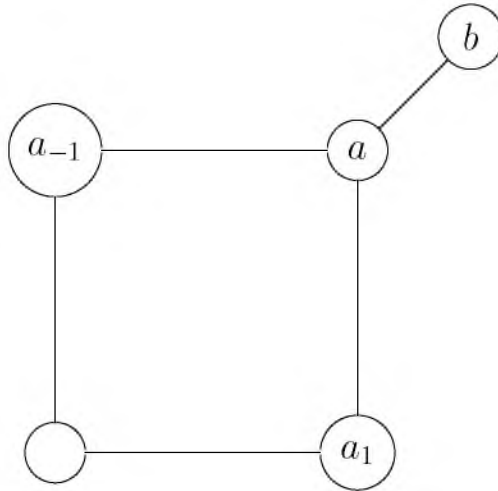


Рис. 8: Цикл C_k з'єднаний ребром із вершиною b

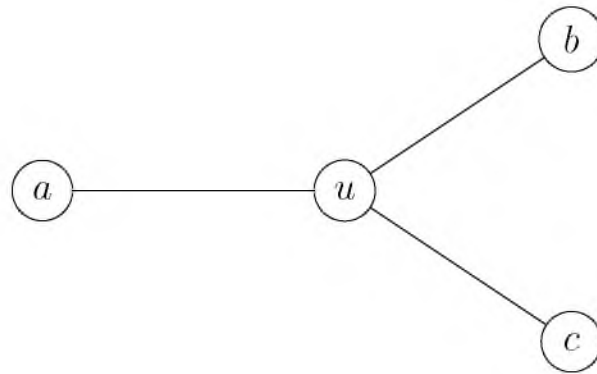


Рис. 9: Анігілятор $[a, u]$ містить хоча б дві вершини: b та c

У попередній секції йшла мова про те, що медіанні графи обов'язково є графами перетинів простих опуклих множин (**теорема 2.34**). Зараз я б хотів навести оригінальний довід цієї теореми. Оскільки він досить довгий, його годиться розбити на декілька тверджень.

Лема 3.2. *У медіанному графі довільна опукла множина є множиною з ворітьми.*

Довід. Спершу покажемо, що у медіанному графі G будь-яка опукла множина A є чебишовською. Дійсно, припустимо, що це не так. Тоді існує вершина x така, що $|pr_A(x)| > 1$. Виберемо різні $p_1, p_2 \in pr_A(x)$. Оскільки граф

медіанний, то $[x, p_1] \cap [p_1, p_2] \cap [p_2, x] = \{m\}$ (m - медіана вершин x , p_1 та p_2). Помітимо, що $m \in [p_1, p_2] \subset A$, адже A - опукла! Але єдина вершина із $[x, p_1]$, що належить A , - це власне p_1 , бо усі інші точки метричного відрізка знаходяться ближче. Тому $m = p_1$. Дуально можна показати, що $m = p_2$, що суперечить тому, що p_1 і p_2 - різні.

Тепер доведемо, що в медіанних графах усі чебищовські множини є множинами з ворітьми. Для цього зафіксуємо $x \in V(G)$. Нехай $g \in pr_A(x)$ (g єдина вершина з $pr_A(x)$, адже A - чебищовська). Переконаємося, що g - ворота для x у A . І справді, нехай $z \in A$. Тоді, оскільки G - медіанний, то

$$[x, g] \cap [g, z] \cap [z, x] = \{t\}.$$

Однак $[x, g] \cap [g, z] = \{g\}$, адже $[g, z] \subset A$, а $[x, g] \cap A = \{g\}$, бо g елемент проєкції x на A . Таким чином, $t = g \implies g \in [x, z] \implies A$ - множина з ворітьми. \square

Лема 3.3. *Нехай A - множина з ворітьми графа G . Тоді A є перетином півпросторів.*

Довід. Покажемо, що $A = \bigcap_{x \in N(A)} W(g_x, x)$, де g_x - ворота для x у A . За-

уважу, що $g(x)$ та x дійсно з'єднані ребром, адже з того, що $x \in N(A)$ випливає, що проєкція (яка і буде ворітьми) x на A знаходиться на відстані 1.

Спершу переконаємося, що $A \subset \bigcap_{x \in N(A)} W(g_x, x)$. Дійсно, якщо $a \in A$, то

$\forall x \in N(A) a \in W(g_x, x)$, бо $g_x \in [a, x]$ ($g_x \neq x$, оскільки $x \notin A$). А у такому разі a буде належати перетинові $W(g_x, x)$ по всіх x .

Для того, щоби перевірити, що $A \supset \bigcap_{x \in N(A)} W(g_x, x)$, припустимо, що існує

$y \in V(G) \setminus A$ такий, що $y \in \bigcap_{x \in N(A)} W(g_x, x)$. Виберемо вершину t таку, що

$t \in [y, g_y]$ та $d(t, g_y) = 1$ (**рис. 10**). Очевидно, що така існує, адже $y \notin A \implies d(y, g_y) \geq 1$. За нашим припущенням $y \in W(g_t, t)$. Однак це неможливо!

Причина цьому наступна. Легко бачити, що $g_t = g_y$, адже єдина вершина з A , що лежить у $[t, g_t]$, це якраз g_y . Тому $y \in W(g_t, t) \implies y \in W(g_y, t) \iff y$ ближче до g_y , аніж до t , що суперечить $t \in [y, g_y]$ \square

Лема 3.4. *Нехай $a, b \in V(G)$, де G - медіанний граф. Тоді $W(a, b)$ - проста опукла множина.*

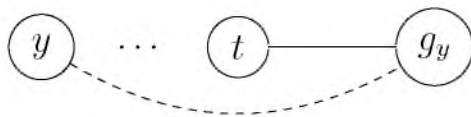


Рис. 10: t - передостання вершина на одному з найкоротших шляхів між y та g_y

Довід. З [7] у медіанному графі півпростір є опуклою множиною. Тому множина $W(a, b)$ – опукла. Оскільки граф G – двочастковий, то доповнення до множини $W(a, b)$ – це півпростір $W(b, a)$. Дуально, він є опуклим. Тому $W(a, b)$ є простою опуклою множиною. \square

Скориставшись вище наведеними лемами досить нескладно довести **теорему 2.34**.

Довід. Най G - медіанний граф, $A \subset V(G)$ - опукла. Тоді, оскільки G - медіанний, то A - множина з ворітьми (**лема 3.2**). Звідси, за **лемою 3.3**, A є перетином півпросторів. Однак за **лемою 3.4** півпростір у медіанному графі є простою опуклою множиною! Тому A є перетином простих опуклих множин, що й потрібно було довести. \square

Наслідок 3.5. *Дерево є графом перетинів опуклих множин.*

Довід. Оскільки дерево обов'язково є медіанним графом, то твердження випливає із **теореми 2.34**. \square

Отже, це твердження прямо випливає з попереднього. Що цікаво, існують відмінні від медіанних графів надкляси дерев, що також є графами перетинів опуклих множин. Дійсно, дерева є підкласом графів блоків, які теж є графами перетинів простих опуклих множин. Доведемо є сей факт.

Теорема 3.6. *Графи блоків є графами перетинів опуклих множин.*

Довід. Нехай G - граф блоків, а A - опукла множина його вершин. Розглянемо $B = V(G) \setminus A$. Най $G[B]$ має n компонент зв'язності: B_1, B_2, \dots, B_n (див. **рис. 11**). Тоді $A = \bigcap_{i=1}^n V(G) \setminus B_i$ - перетин простих опуклих множин. Наступна лема допоможе се довести.

Лема 3.7. *Най G - граф блоків, A - підмножина його вершин. A - опукла тоді й тільки тоді, коли A - зв'язна.*

Довід. Необхідність очевидна. Для доведення достатності зафіксуємо граф блоків G та неопуклу множину вершин A у ньому. Оскільки A – не опукла, то $\exists u, v \in A \exists w \in [u, v] : w \notin A$. Як відомо, у графі блоків кожна точка метричного відрізка між u та v є точкою з'єднання (можливо, за винятком самих u та v). Оскільки $u, v \in A$, то $w \notin A \implies w$ – точка з'єднання. Однак тоді w лежить на усіх шляхах між u та $v \implies A$ – не зв'язна. Тому у графі блоків зв'язність та опуклість справді еквівалентні. \square

Таким чином, кожна множина B_i опукла, бо зв'язна. Тоді, для того, щоби $V(G) \setminus B_i$ була простою опуклою, досить показати, що вона є опуклою. Завважимо, що $V(G) \setminus B_i = A \cup (\bigcup_{j \neq i} B_j)$. А ця множина зв'язна тому, що довільна множина B_j з'єднана з A ребром. Дійсно, в іншому разі шлях між B_j та A у графі G повинен був би пролягати через якусь B_k , але оскільки B_j - компоненти зв'язності у B , то вони можуть бути з'єднані тільки через A . \square

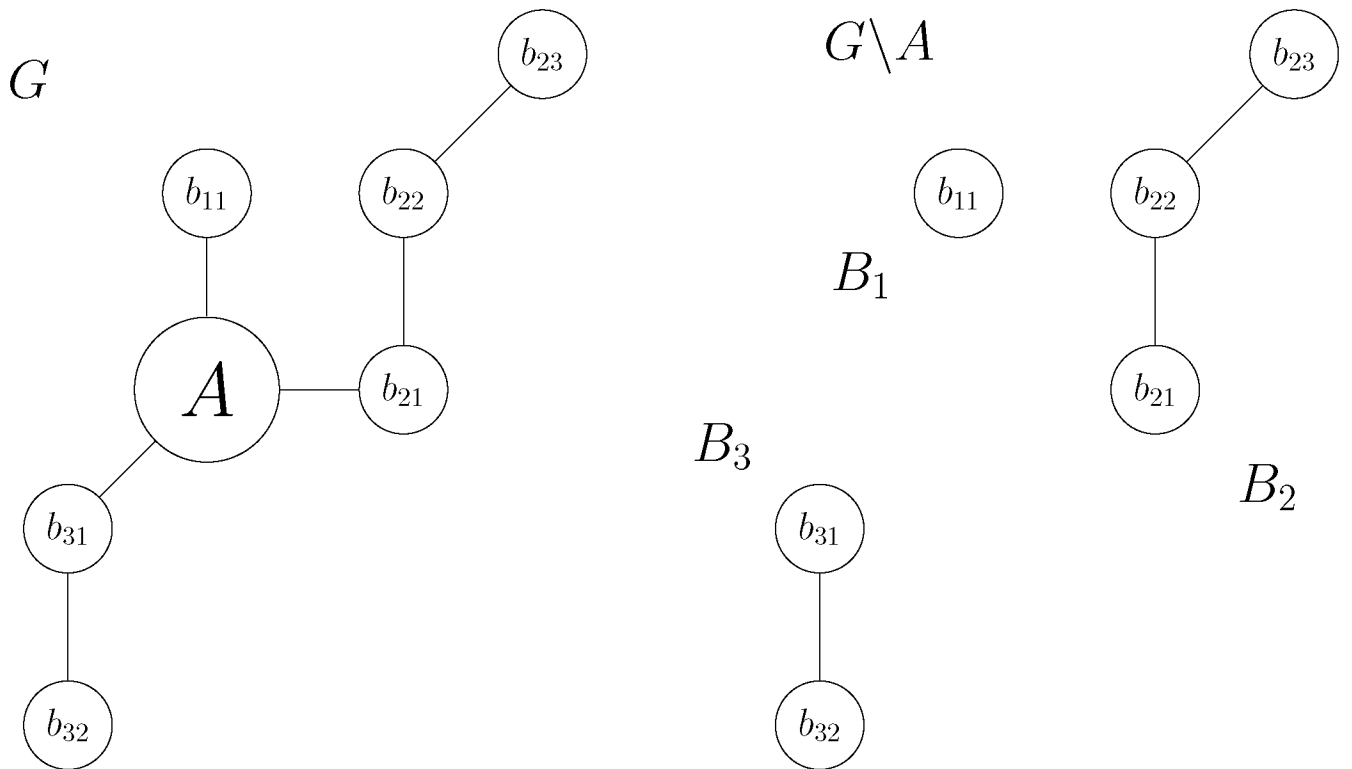


Рис. 11: При викиданні опуклої множини A граф G розпадається на декілька опуклих множин

Зауважу, що хоча довід цього результату оригінальний, саме твердження прямо впливає із раніше доведених теорем. Зокрема, у [10] показано, що довільний хордальний граф, без породжених H_1 та H_2 (рис. 12) є графом просторів з'єднань, які у свою чергу є графами перетинів простих опуклих множин [11]. Легко переконатися, що графи блоків є хордальними, без породжених H_1 та H_2 .

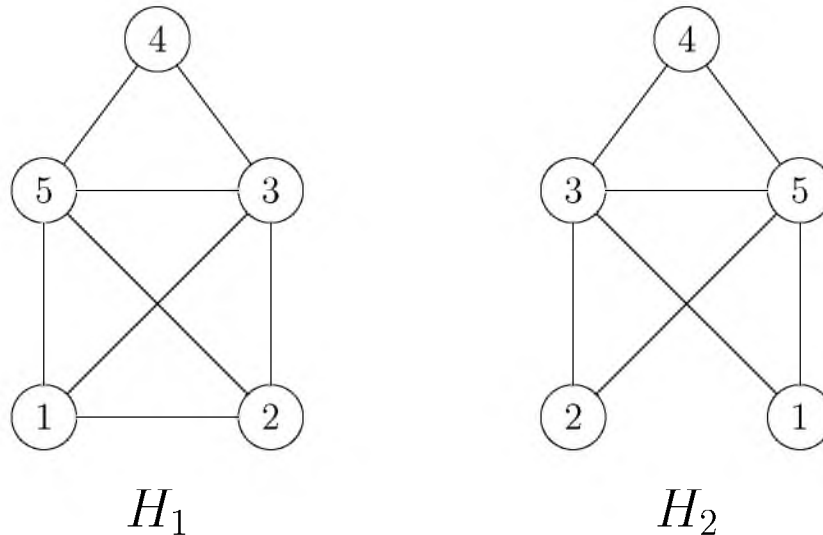


Рис. 12: Заборонені підграфи для хордальних графів просторів з'єднань

Отже, у межах графів перетинів простих опуклих множин кожен граф перетинів простих анігіляторів є двочастковим. Але чи правда це у загальному випадку? Оскільки теоретичного доводу знайти не вдалося, я вирішив спробувати знайти контрприклад - недвочастковий граф перетинів простих анігіляторів - з використанням комп'ютерних засобів. Результат описує наступне твердження:

Твердження 3.8. *Нехай G - зв'язний граф із $|V(G)| \leq 10$. Тоді G є графом перетинів перетинів простих анігіляторів тоді і тільки тоді, коли він двочастковий.*

Перевірялося твердження повним перебором усіх зв'язних графів із максимум десятьма вершинами. Для перевірки на те, чи є заданий граф графом перетинів простих анігіляторів було розроблено наступний алгоритм.

Algorithm 1: Перевірка чи є заданий граф графом перетинів простих анігіляторів

Input : Неорієнтований зв'язний граф $G = (V, E)$

Output: True якщо G є графом перетинів простих анігіляторів, false у іншому разі.

// Step 1: Пошук усіх анігіляторів графа

1 *annihilators* \leftarrow FindAnnihilators(G);

2 *primes* \leftarrow {};

3 **for** $a \in$ *annihilators* **do**

4 | **if** a is prime **then**

5 | | add a to *primes*;

6 | **end**

7 **end**

// Step 2: Перевірка чи є анігілятор перетином простих

8 **for** $a \in$ *annihilators* **do**

9 | $ll \leftarrow$ {};

10 | **for** $p \in$ *primes* **do**

11 | | **if** p contains a **then**

12 | | add p to ll ;

13 | | **end**

14 | **end**

15 | **if** $a \neq \bigcap ll$ **then**

16 | | **return** false;

17 | **end**

18 **end**

19 **return** true;

Algorithm 2: Допоміжні функції для виявлення графів перетинів простих анігіляторів

// Рутина для знаходження усіх анігіляторів графа G

```
1 Function FindAnnihilators( $G$ ):
2    $annihilators \leftarrow \{\}$ ;
3    $distances \leftarrow$  shortest distances between every pair of vertices in  $G$ ;
4   for  $a, b \in V(G), a \neq b$  do
5      $s \leftarrow \{\}$ ;
6     for  $u \in V(G)$  do
7       if  $distances[a, b] + distances[b, u] = distances[a, u]$  then
8         | add  $u$  to  $s$ ;
9       end
10      else if  $distances[b, a] + distances[a, u] \neq distances[b, u]$ 
11        | mark current annihilator as not prime;
12      end
13    end
14    add  $s$  to  $annihilators$ ;
15  end
16  return  $annihilators$ ;
```

// Рутина для перевірки чи є анігілятор перетином простих

```
17 Function IsIntersectionOfPrimes( $a, primes$ ):
18    $ll \leftarrow \{\}$ ;
19   for  $p \in primes$  do
20     | if  $p$  contains  $a$  then
21       | add  $p$  to  $ll$ ;
22     end
23   end
24   if  $a \neq \bigcap ll$  then
25     | return false;
26   end
27   return true;
```

Складність цього алгоритму оцінюється як $\mathcal{O}(n^3m)$ (також $\mathcal{O}(n^5)$), де n - кількість вершин у графі G , а m - кількість його ребер. Це оцінка для найгіршого випадку, хоча вона досяжна, зокрема для повного двочасткового графа $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. Однак для деяких інших графів алгоритм працює суттєво швидше. Наприклад, n^3 для повних графів.

Алгоритм було реалізовано мовою Python з використанням бібліотеки networkx [3]. Реалізація доступна за [посиланням](#). Завдання згенерувати усі (з точністю до ізоморфізму) графи на n вершинах, де n - достатньо велике, нетривіальне, тому було використано базу графів із [6].

3.1 Анігіляторні відображення

Для розмови про анігіляторні відображення слід увести кілька означень.

Означення 3.9. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *лінійним*, якщо $\forall a, b \in V(G) f([a, b]_G) \subset [f(a), f(b)]_H$.

Означення 3.10. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *інваріантним відносно опуклості*, якщо прообразом довільної опуклої множини $A \subset V(H)$ є опукла множина.

Означення 3.11. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *інваріантним відносно зв'язності*, якщо прообразом довільної зв'язної множини $A \subset V(H)$ є зв'язна множина.

Спершу поговоримо про лінійні відображення. Виявляється, їх можна дуже просто охарактеризувати з використанням анагіляторів. Насправді, якщо у означенні замінити метричні відрізки на відповідні анагілятори, то воно описуватиме ту саму класу графів!

Твердження 3.12. *Най $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - відображення між зв'язними графами. Тоді f - лінійне тоді і лише тоді, коли $\forall a, b \in V(G) f([a, b]_G) \subset [f(a), f(b)]_H$.*

Довід. Спершу доведемо необхідність. Най f не задовольняє умову твердження, себто $\exists a, b \in V(G) f([a, b]_G) \not\subset [f(a), f(b)]_H$. Тоді $\exists c \in V(G) c \in [a, b]_G$, але $f(c) \notin [f(a), f(b)]_H$. За означенням анагілятора умови на c рівносильні такому: $b \in [a, c]_G$, але $f(b) \notin [f(a), f(c)]_H$. А звідси видно, що таке відображення f не може бути лінійним. Отже, необхідність доведена.

Тепер покажемо достатність. Най f не задовольняє лінійне. Тоді $\exists a, b \in V(G) f([a, b]_G) \not\subset [f(a), f(b)]_H$. Звідси випливає, що $\exists c \in V(G) c \in [a, b]_G$, але $f(c) \notin [f(a), f(b)]_H$. Знову скористаємося означенням анагілятора. Маємо: $b \in [a, c]_G$, але $f(b) \notin [f(a), f(c)]_H$. Але тоді $f([a, c]_G) \not\subset [f(a), f(c)]_H$. Отже, ця умова є також достатньою, що завершує довід. \square

На сім місці я б хотів описати ще одну цікаву властивість лінійних відображень. Виявляється, їх можна використати для наведення альтернативної характеристики графів бльоків. Але спершу наведу допоміжну лему.

Лема 3.13. *Най G, H - зв'язні графи, а $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - відображення між ними. Тоді f - лінійне $\implies f$ - інваріантне відносно опуклості $\implies f$ - інваріантне відносно зв'язності.*

Довід. Див. [8]

□

Тепер розглянемо нову характеристику графів блоків.

Теорема 3.14. *Най G - зв'язний граф. Тоді G - граф блоків $\iff (\forall H, f : V(G) \rightarrow V(H) : f$ - інваріантне відносно зв'язності $\implies f$ - лінійне).*

Довід. Спершу покажемо необхідність. Отже, най G - граф блоків, а $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - інваріантне відносно зв'язності (H вибраний довільним чином). Треба показати, що f - лінійне. Дійсно, зафіксуємо певну пару вершин a, b із графа G . Оскільки метричний відрізок - зв'язна множина, то $f^{-1}([f(a), f(b)]_H)$ - також зв'язна, адже f - інваріантне відносно зв'язності. Очевидно, що $a, b \in f^{-1}([f(a), f(b)]_H)$. Зі зв'язності цієї множини, випливає, що a і b входять у неї разом із певним шляхом між ними. Але оскільки G є графом блоків, то між будь-якими двома вершинами існує єдиний найкоротший шлях, причому усі вершини з нього, окрім можливо самих a і b є точками з'єднання, тому найкоротший шлях є підшляхом довільного іншого шляху між a та b . Тому $[a, b]_G \subset f^{-1}([f(a), f(b)]_H)$, або що $f([a, b]_G) \subset [f(a), f(b)]_H$. Таким чином, необхідність доведено.

Цікавіше буде показати достатність. Для цього слід показати, що якщо G не є графом блоків, то існує граф H та інваріантне відносно зв'язності відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$, яке не є лінійним. Скористаємося характеристикою графів блоків з лемми 3.7: у графі блоків опуклі та зв'язні множини - це одне й те саме. Отже, якщо G - не граф блоків, то у ньому є зв'язна але не опукла множина вершин. Позначимо її A (рис. 13). Най T_A - кістякове дерево підграфа $G[T_A]$. Доповнимо його до кістякового дерева T графа G і розглянемо відображення $\varphi : V(G) \rightarrow V(T)$, яке переводить вершини самих у себе. Тоді легко бачити, що φ інваріантне відносно зв'язності, адже T - кістякове дерево графа G , тому всі його ребра присутні й у G . Однак воно не є лінійним, адже воно не інваріантне відносно опуклості (лема 3.13)! І справді, множина A зв'язна у T за побудовою, бо T_A - кістякове дерево для $G[T_A]$. Однак її прообраз - A у графі G - не є опуклою, адже її саме так вибирали. Отже, φ - інваріантне відносно опуклості, але не лінійне, що й потрібно було продемонструвати. □

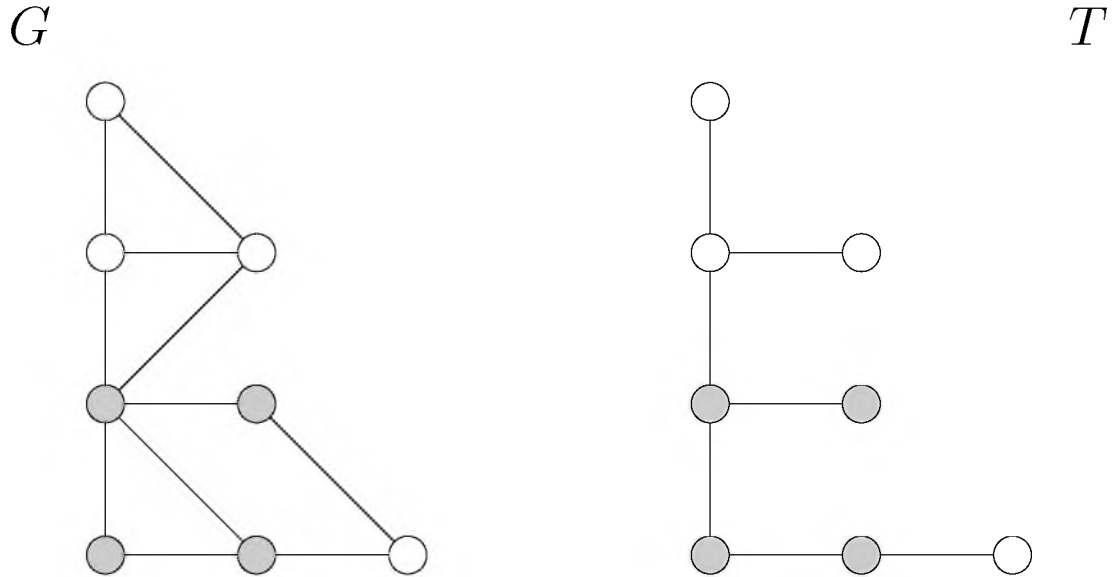


Рис. 13: Алгоритм побудови відображення: вибираємо зв'язну неопуклу множину A (чорний колір), потім будуємо кістякове дерево сієї множини та доповнюємо до кістякового дерева усього графа G . Так отримується граф T

Наслідок 3.15. *Най G - зв'язний граф. Тоді G - граф бльоків $\iff (\forall H, f : V(G) \rightarrow V(H) : f$ - інваріантне відносно зв'язности $\implies f$ - інваріантне відносно опуклости).*

Довід. Дійсно, достатність уже доведена у попередній теоремі. А необхідність випливає з досить простих міркувань: якщо G є графом бльоків і відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є інваріантним відносно зв'язности, то з попередньої теореми воно має бути лінійним. Однак тоді, за лемою 3.13, воно також повинно бути інваріантним відносно опуклости, що завершує довід. \square

У метричній теорії графів існує дуальна концепція щодо лінійности, а саме - неперервність.

Означення 3.16. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *неперервним*, якщо $\forall a, b \in V(G) f([a, b]_G) \supset [f(a), f(b)]_H$.

Як бачимо, означення вельми подібне, однак на сей раз $f([a, b]_G)$ є надмножиною $[f(a), f(b)]_H$.

Означення 3.17. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *анігіляторно-неперервним*, якщо $\forall a, b \in V(G) f([a, b]_G) \supset [f(a), f(b)]_H$.

Пізніше, нам також знадобиться означення гомоморфізму, певно найвідомішої класи відображень між графами, та означення метричного відображення.

Означення 3.18. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *гомоморфізмом*, якщо $\forall ab \in E(G) : f(a)f(b) \in E(H)$, себто f зберігає ребра.

Означення 3.19. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається *метричним*, якщо $\forall ab \in E(G) : d_H(a, b) \leq 1$, себто для кожного ребра з G f або переводить його у ребро, або стискає у вершину.

Зауваження 3.20. Клясичне означення метричних відображень звучить трохи не так. У такому разі, означення наведне вище подається як характеристикація. Однак мені воно буде потрібне саме у такій формі, тому для простоти викладу я подаю його саме таким чином.

Природньо було б очікувати чогось на кшталт *твердження 3.12*. Однак, у сім випадку нічого подібного не спостерігається. Навпаки, досить нескладно показати, що анігіляторно-неперервні відображення - се окрема кляса відображень. Се впливає з наступного результату.

Твердження 3.21. *Кожне анігіляторно-неперервне відображення є сюр'єктивним.*

Довід. Най G, H - графи, а $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - анігіляторно-неперервне відображення між ними. Тоді для всіх $a, b \in V(G)$ виконується $f([a, b]_G) \supset [f(a), f(b)]_H$. Покладемо $b \stackrel{\text{def}}{=} a$. Матимемо наступне:

$$f([a, a]_G) \supset [f(a), f(a)]_H$$

абощо

$$f(V(G)) \supset V(H)$$

А отже f - сюр'єкція. □

Тепер легко навести приклад неперервного, але не анігіляторно-неперервного відображення. Наприклад, постійне відображення у граф H із $|V(H)| > 1$. Утім, можна виділити класу відображень, у межах якої неперервність та анігіляторна неперервність дійсно еквівалентні. Мова іде про бієктивні відображення.

Твердження 3.22. *Най $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - бієкція між зв'язними графами G та H . Тоді f - неперервна тоді і лише тоді, коли f - анігіляторно-неперервна.*

Довід. Почнемо із необхідності, як завжди. Отже най $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - неперервна бієкція між G та H . Зафіксуємо $a, b \in V(G)$ та розглянемо анігілятори $[a, b]_G$ та $[f(a), f(b)]_H$. Най $c' \in [f(a), f(b)] \iff f(b) \in [f(a), c']$. Оскільки f - бієкція, то $\exists! c \in V(G) f(c) = c'$. З неперервності $f : f([a, c]_G) \supset [f(a), f(c)]_H \ni f(b) \implies [a, c]_G \ni b$, адже f - ін'єкція. Тоді за означенням анігілятора $c \in [a, b] \implies f([a, b]) \ni f(c) = c'$. Оскільки c' було обрано довільним чином, то звідси випливає, що $f([a, b]) \supset [f(a), f(b)]$, а внаслідок цього f - анігіляторно-неперервне.

Як щодо достатності? Насправді, спрацює вельми подібний аргумент. Дійсно, фіксуємо анігіляторно-неперервне бієктивне відображення f . Най $a, b \in V(G)$, а $c' \in [f(a), f(b)]_H$, або що $f(b) \in [f(a), c']$. Знову ж таки, $\exists! c \in V(G) f(c) = c'$, що випливає з бієктивності f . Тоді $f([a, b]_G) \supset [f(a), f(b)]_H \ni f(b)$, адже f - анігіляторно-неперервне. З ін'єктивності f робимо висновок, що $b \in [a, c]_G$, або що $c \in [a, b]_G$. Тому $f([a, b]_G) \ni f(c) = c'$, звідки випливає, що f - неперервне. \square

Наслідок 3.23. *Будь-яке бієктивне анігіляторно-неперервне відображення є гомоморфізмом.*

Довід. З попередньої теореми бієктивне анігіляторно-неперервне відображення є неперервним. У [5] доведено, що кожне неперервне відображення є метричним. Нагадаю, що метричне відображення може переводити ребра у інші ребра, або у точки. Однак з бієктивності f жадні дві точки не можуть мати спільний образ, тому ребра мають переходити у ребра $\implies f$ - гомоморфізм. \square

Зауважу, що існують сюр'єктивні неперервні відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$, які втім не є анігіляторно-неперервними (рис. 14). Однак знайти приклад анігіляторно-неперервного відображення, яке не було б неперервним, ніяк не вдавалось. Тому виникла наступна гіпотеза.

Припущення 3.24. *Кожне анігіляторно-неперервне відображення є неперервним.*

Зауважу, що довести се припущення покищо не вдалося, але се є перспективним напрямом для подальшої роботи.

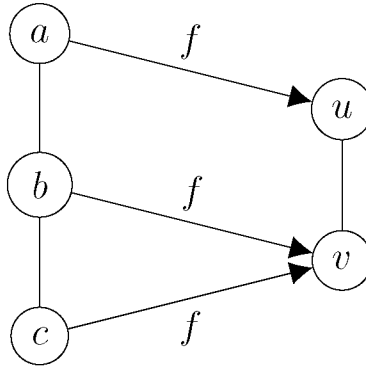


Рис. 14: Легко бачити, що задане f - сюр'єктивно неперервне. Однак воно не анігіляторно-неперервне, адже $\{v\} = f([b, c]) \not\supseteq [f(b), f(c)] = \{u, v\}$

Цікаво розглянути дію анігіляторно-неперервних відображень на конкретних графах. Природньо запитати, як саме вони можуть відображати дерева. Часткову відповідь на се питання дає отака теорема.

Теорема 3.25. *Най G - дерево, а $H \neq K_1$ - зв'язний граф. Тоді будь-яке анігіляторно-неперервне відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є ін'єктивним.*

Довід. Отже, най f - анігіляторно-неперервне відображення між деревом G та зв'язним графом H із $|V(H)| > 1$. Підемо від супротивного. Най f - не ін'єктивне. Тоді розглянемо $u, v \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{f(u)=f(v)} d(u, v)$, себто таку пару

$u, v \in V(G)$, що їхні образи при відображенні f збігаються, і при цьому вони знаходяться на максимальній відстані серед усіх таких пар. Враховуючи що f - не ін'єкція, маємо: $d(u, v) > 0$. З анігіляторної неперервности нашого відображення випливає, що $f([u, v]_G) \supseteq [f(u), f(v)]_H = [f(u), f(u)]_H = V(H)$. Тому $f([u, v]_G) = V(H)$. Дуально, $f([v, u]_G) = V(H)$. Зафіксуємо певну вершину $h \in V(H)$ таку, що $h \neq f(u)$. Оскільки $H \neq K_1$, то така обов'язково знайдеться. А оскільки $f([u, v]_G) = V(H)$, то $\exists v_h \in [u, v] : f(v_h) = h$. Аналогічно $\exists u_h \in [v, u] : f(u_h) = h$. Ідея доводу полягає у тому, щоби показати, що $d(u_h, v_h) > d(u, v)$, що суперечило б вибору u, v як точок зо спільним образом на максимальній відстані одна від одної.

Технічно се показати може бути не так і просто, але сей факт насправді досить природньо випливає із того, що G - дерево (рис. 15). Але покажемо се строго. Розглянемо найкоротший шлях між u_h та v , який містить точку u (насправді кожен містить точку u , адже G - дерево). Підшлях між точками u_h та u очевидним чином буде найкоротшим шляхом між сими точками; і крім того, він також лежатиме у анігліяторі $[v, u]$. Аналогічно, певний найкоротший шлях між v_h та v лежатиме у анігліяторі $[u, v]$. Тому ці шляхи не перетинатимуться. Вони також не перетинатимуть жадний найкоротший шлях між u та v , адже всі такі шляхи не перетинають анігліятори $[u, v]$, $[u, v]$ та $[v, u]$ (за винятком власне u та v). Тому конкатенація простих шляхів $u_h - u$, $u - v$ та $v - v_h$ буде простим шляхом. А у дереві кожен простий шлях є найкоротшим. Тому, $d(u_h, v_h) = d(u_h, u) + d(u, v) + d(v, v_h) > d(u, v)$, що суперечить вибору u, v . Отже, початкове припущення було неправильним і f мусить бути ін'єктивним. \square

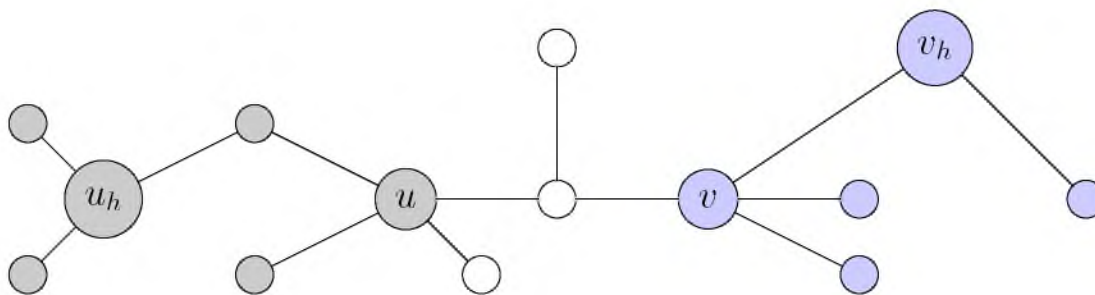


Рис. 15: Як бачимо, точки анігліяторів $[u, v]$ (синій колір) та $[v, u]$ (чорний колір) розташовані на більшій відстані, ніж u та v , адже існування альтернативного коротшого шляху означало б існування циклу

Зауважу, що з *твердження 3.21* випливає, що будь-яке ін'єктивне анігліяторно-неперервне відображення є бієктивним. Тому у теоремі 3.25 ін'єктивність насправді можна замінити на бієктивність.

Наслідок 3.26. *Най G, H - дерева, $f : V(G) \rightarrow V(H)$ - анігліяторно-неперервне відображення між ними. Тоді або $H \simeq K_1$, або f - ізоморфізм.*

Довід. Най $H \not\simeq K_1$. Тоді за *теоремою 3.25* f - бієктивне. Тепер скористаємося *наслідком 3.23*: бієктивне анігліяторно-неперервне відображення є гомоморфізмом. Але будь-який гомоморфізм між деревами є ізоморфізмом! Дійсно, гомоморфізм зберігає ребра, тому усі ребра G присутні й у H . Проте оскільки G та H - дерева, то у них фіксована відносно кількості

вершин кількість ребер (власне, $n - 1$, де n - кількість вершин). Отже у G та H однакова кількість ребер, а це значить, що обернене відображення до f також буде гомоморфізмом, що й потрібно було довести. \square

Зауважу, що сей наслідок насправді стверджує, що усі анігіляторно-неперервні відображення між деревами є у певному сенсі тривіальними. Дійсно, анігіляторно-неперервне відображення або не міняє структуру графа G (ізоморфізм), або максимально спрощує її (стискаючи його в точку). Виникає бажання усе ж розглянути, які бувають нетривіальні анігіляторно-неперервні відображення. Оскільки ін'єктивні анігіляторно-неперервні відображення уже досліджено (се неперервні бієкції), то хотілося б розглянути неін'єктивні анігіляторно-неперервні відображення. Наприклад, у яких випадках вони існують? Досить розгорнуту відповідь на се питання дає наступне твердження.

Твердження 3.27. *Для кожного зв'язного графа G існує зв'язний граф G' та анігіляторно-неперервне відображення $f : V(G') \rightarrow V(G)$, яке не є ін'єктивним.*

Довід. Для того, щоби довести се твердження достатньо за заданим графом G побудувати граф G' , що задовольняє умову твердження (рис. 16). Зробімо се у декілька кроків.

- 1 Виберемо граф H , який є зв'язним кістяковим підграфом G , причому він анігіляторно неперервно у нього вкладається (позначимо се відображення φ). Такий H обов'язково знайдеться. Наприклад, підійде $H \simeq G$.
- 2 Візьмемо граф $H' \simeq H$ - ізоморфну копію H із заданим ізоморфізмом $u \leftrightarrow u'$.
- 3 Побудуємо граф G' таким чином:

$$V(G') = V(H) \sqcup V(H'), \quad E(G') = E(H) \cup E(H') \cup \{uu' : u \in V(H)\}.$$

Нескадно здогадатися, як виглядатиме відображення f : якщо $u \in V(H)$, то $f(u) = \varphi(u)$, а якщо $u' \in V(H')$, то $f(u') = \varphi(u)$.

Лишається показати, що отримане відображення f - анігіляторно-неперервне (воно очевидно не ін'єктивне, адже $\forall u \in V(H) : f(u) = f(u') = \varphi(u)$). Для сього подивимося, як можуть виглядати анігілятори у сьому графі. Є два принципові випадки.

- 1 Якщо $u, v \in V(H)$, то $[u, v]_{G'} = [u, v]_H \cup [u', v']_{H'}$ (переконайтеся!).
Тоді $f([u, v]_{G'}) = f([u, v]_H \cup [u', v']_{H'}) = f([u, v]_H) = \varphi([u, v]_H) \supseteq [\varphi(u), \varphi(v)] = [f(u), f(v)]$, адже φ – анігліяторно-неперервне.
- 2 Якщо ж $u \in V(H)$, а $v' \in V(H')$, то $[u, v']_{G'} = [u', v']_{H'}$, і анігліяторна неперервність f слідує аналогічно до попереднього випадку.

Отже, f – неін'єктивне анігліяторно-неперервне відображення, що завершує довід. □

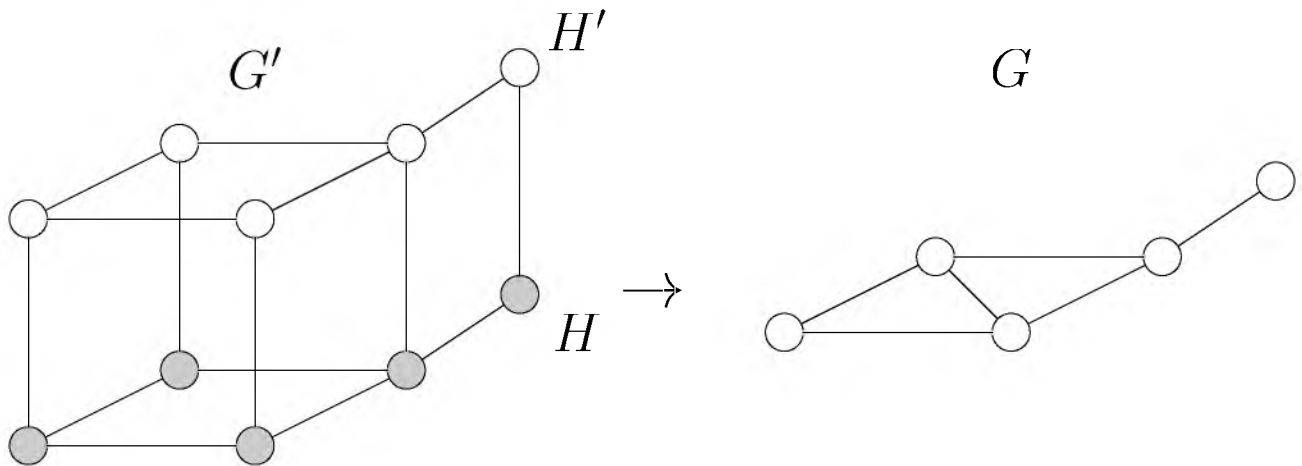


Рис. 16: Шукане відображення зручно уявляти собі як циліндр із основами, що неперервно вкладаються у граф G

Се твердження показує, що анігліяторно-неперервні відображення – се насправді досить широка кляса відображень, тому їх дійсно варто досліджувати.

4 Висновки

Ся робота присвячена анігіляторам у графах. Розглянуто їхні загальні властивості, але основну увагу приділено похідним поняттям. У першу чергу хотів би виділити графи перетинів простих анігіляторів. Наведено повну характеристику таких графів, якщо вони мають не більше десяти вершин, а для більших графів наведено часткову характеристику. Оскільки для сього дуже потрібними виявилися прості опуклі множини у графі, зокрема графи перетинів простих опуклих множин, то було проведене невелике дослідження властивостей цих понять. Зокрема, було охарактеризовано графи, у яких кожне ребро є простою опуклою множиною, а також було знайдено оригінальні доводи уже відомих фактів про те, що такі визначні кляси графів як медіанні графи та графи блоків є графами перетинів простих опуклих множин.

Особливої уваги заслуговують анігіляторні відображення. Вони вводяться як аналоги лінійних та неперервних відображень, тільки замість метричних відрізків у них фігурують анігілятори. Вдалося показати, що анігіляторно-лінійні відображення насправді еквівалентні лінійним. Принагідно, було наведено цікаві властивості лінійних відображень, наприклад, було наведено оригінальну характеристику графів блоків, що використовує лінійні відображення. Анігіляторно-неперервні ж відображення виявилися еквівалентними неперервним лише у межах бієкцій. У загальному випадку, се незалежна кляса відображень між графами, що не збігається з жадною відомою авторові клясою відображень. Тому ці відображення було досліджено окремо. Зокрема, було наведено характеристику анігіляторно-неперервних відображень між деревами. Хоча се й виявилось досить вузьке коло відображень, анігіляторно-неперервні відображення аж ніяк не є тривіальними. На підтвердження цих слів було сконструйовано анігіляторно-неперервні відображення у довільний наперед заданий граф з додатковою умовою, що ці відображення не повинні бути ін'єкціями.

Література

- [1] H.-J. Bandelt and J. Hedlikova, “Median Algebras”, *Discrete Math.*, Vol. 24, pp. 1–30, 1983.
- [2] H.-J. Bandelt and H. M. Mulder, “Distance-Hereditary Graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 41(2), pp. 182–208, 1986, doi:10.1016/0095-8956(86)90043-2
- [3] Aric A. Hagberg, Daniel A. Schult and Pieter J. Swart, “Exploring network structure, dynamics, and function using Networkx”, in Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008), Gael Varoquaux, Travis Vaught, and Jarrod Millman (Eds), (Pasadena, CA USA), pp. 11–15, Aug 2008
- [4] F. Harary, “Graph Theory,” *Addison-Wesley Series in Mathematics*, May 1970.
- [5] S. Kozerenko, “Linear and metric maps on trees via Markov graphs”, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **59** (2018), pp. 173–187.
- [6] B. D. McKay and A. Piperno, “Practical Graph Isomorphism”, II, *J. Symbolic Computation* (2013) 60 94–112. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>
- [7] H. M. Mulder, “The structure of median graphs”, *Discrete Mathematics*, 24, 1978, pp. 197–204.
- [8] B. Nica, “Cubulating spaces with walls”, *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), pp. 297–309.
- [9] J. Nieminen, “Annihilators in Graphs”, *Results in Mathematics*, Vol. 13, no. 1–2, pp. 140–146, Mar. 1988, doi: 10.1007/bf03323401.
- [10] J. Nieminen, “Chordal Graphs and Join Spaces”, *Journal of Geometry*, 34(1-2), pp. 146-151, 1989, Nieminen, J. (1989). Chordal graphs and join spaces. *Journal of Geometry*, 34(1-2), pp. 146–151, doi:10.1007/bf01224240
- [11] J. Nieminen, “Join Space Graphs”, *Journal of Geometry*, 33(1-2), 1988, pp. 99–103, doi:10.1007/bf01230609