УДК 530.182:517.957

Бернацька Ю. М., Голод П. І.

КАНОНІЧНІ КООРДИНАТИ В СКІНЧЕННОЗОННОМУ СЕКТОРІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ СОЛІТОННОГО ТИПУ

У статті розглянуто скінченнозонний сектор нелінійних інтегровних рівнянь ±МКдФ, sin(sh)-Гордон, КдФ та *Ліувілля. Показано, що ці гамільтонові системи природним чином виникають як системи* на *орбітах афінних алгебр (алгебр* петель). *Подано схему їх скінченнозонного інтегрування. Для рівнянь ±МКдФ та sin(sh)-Гордон досліджено симплектичну структуру скінченнозонного сектора фазового простору і побудовано канонічні координати "дія—ку*

Вступ

Нелінійні рівняння солітонного типу є універсальними рівняннями в тому сенсі, що вони виникають в найрізноманітніших галузях фізики — в гідродинаміці, теорії твердого тіла, фізиці плазмового середовища, біофізиці тощо. Розвиток нових методів їх інтегрування, об'єднаних під збірною назвою "метод оберненої задачі розсіювання", є актуальною проблемою, що протягом трьох десятиліть стимулює розвиток багатьох напрямів сучасної математичної фізики. Один з таких напрямів — теорію інтегровних гамільтонових систем на орбітах груп та алгебр Лі (в тому числі і нескінченновимірних) — представлено в цій праці.

Нелінійні рівняння, про які піде мова, є інтегровними гамільтоновими системами у функціональних фазових просторах. Наявність нескінченної низки інтегралів руху $\mathcal{H}_\alpha[u, u_x, \dots]$, $a = 1, 2, \dots, \infty$, дозволяє визначити скінченновимірний підпростір у фазовому просторі як множину функцій, що є розв'язками варіаційної задачі [1]:

$$\sum_\alpha c_\alpha \frac{\delta \mathcal{H}_\alpha}{\delta u(x)} = 0. \qquad (1)$$

Цей підпростір називатимемо *скінченнозонний сектором* фазового простору інтегровного рівняння. Серед функцій, що задовольняють системі рівнянь (1), містяться солітонні розв'язки (якщо початкове нелінійне рівняння допускає такі розв'язки), а також їх періодичні та квазіперіодичні узагальнення.

Дослідження скінченнозонного сектора є центральною проблемою теорії нелінійних інтегровних рівнянь солітонного типу. Починаючи з фундаментальної праці С. П. Новікова [1], цей напрям досліджень сформувався в окрему науку, яка має назву "теорія скінченнозонного інтегрування" [2-5].

У працях [6,8,9] було показано, що скінченнозонний сектор більшості відомих інтегровних рівнянь можна реалізувати як орбіту коприєднаної дії деякої нескінченновимірної алгебри Лі (градуйованої чи квазіградуйованої), яка є підалгеброю в алгебрі струмів на сфері Рімана або на іншій алгебраїчній кривій. У даній праці ми даємо огляд цього підходу. Зокрема, реалізуємо скінченнозонний сектор двох модифікацій рівнянь Кортевега—де Фриза (±МКдФ), а також рівнянь sin(sh)-Гордон, Кортевега—де Фриза (КдФ) та Ліувілля на орбітах алгебри $\widetilde{\mathrm{sl}}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$, в якій фіксовано *основне* градуювання. Працюючи в основному градуюванні (а не в однорідному, як у працях [6, 7]), ми маємо змогу вкласти скінченнозонний фазовий простір рівнянь КдФ та МКдФ у спільний Пуассонів многовид і виявити тим самим просту геометричну природу перетворення Міури. Далі ми викладаємо традиційну схему скінченнозонного інтегрування в термінах змінних λ_k, які лежать на рімановій поверхні і параметризують комплексний тор Ліувілля (якобіан рімановї поверхні). Ці змінні мають алгебро-геометричну природу і є проміжними між вихідними динамічними змінними і кутовими змінними на торі. В теорії нелінійних гамільтонових систем подібні змінні використовувалися давно. З їх допомогою проінтегровані майже всі відомі нелінійні системи класичної механіки, ними послуговувались при отриманні явних формул для скінченнозонних розв'язків рівнянь КдФ [9], нелінійного рівняння Шредінгера і sin Гордона та інших [10-12]. Спроби побудувати аналогічні координати для рівнянь, що пов'язані з алгебрами рангу, більшого за одиницю, виявилися марними. Мета нашого дослідження — виявити алгебраїчні механізми появи таких зручних замін з метою їх поширення на інші випадки.

Важливим пунктом даної праці є п. 4, в якому ми досліджуємо симплектичну структуру скінченнозонного фазового простору рівнянь солітонного тішу та будуємо змінні "дія".

1. Орбітна інтерпретація скінченнозонного сектора рівнянь ±МКдФ та sin(sh) Гордона

Розглянемо алгебру $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathcal{P}(\lambda,\lambda^{-1})$ поліномів Лорана з коефіцієнтами в простій алгебрі Лі $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ [13]. В цій алгебрі фіксуємо *основне* градуювання [14]. Узгоджений з таким градуюванням базис в $\widetilde{\mathfrak{g}}$ є власним стосовно оператора

$$d = 2\lambda\frac{d}{d\lambda} + \operatorname{ad}H, \qquad (2)$$

і складається з елементів

$$H_{2m}=\lambda^m H,\ \ X_{2m+1}=\lambda^m X,\ \ Y_{2m-1}=\lambda^m Y, \qquad (3)$$

де

$$H=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \ X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \ Y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що нижній індекс базисних елементів (3) є міткою градуювання, тобто власним числом оператора (2). Через $\mathfrak{g}_l$, $l\in\mathbb{Z}$ позначатимемо власні підпростори оператора *d.* Очевидно, що при *l = 2m* вони одновимірні і натягнуті на базисні елементи H_{2m}, а при *І = 2m+1* — двовимірні і є лінійною оболонкою елементів X_{2m+1} та Y_{2m+1}

В алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ означимо дві підалгебри:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_+ = \sum_{l\geqslant 0}\oplus\,\mathfrak{g}_l, \qquad \widetilde{\mathfrak{g}}_- = \sum_{l<0}\oplus\,\mathfrak{g}_l,$$

а також низку ad-інваріантних білінійних форм вигляду:

$$\langle A,B\rangle_k = \operatorname{res}\lambda^{-k-1}\operatorname{Tr}AB,\ \ A,B\in\widetilde{\mathfrak{g}},\ k\in\mathbb{Z}. \qquad (4)$$

Будь-яку з цих форм можна використати для побудови спряжених (дуальних) просторів до підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$ та $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$. Якщо покласти *к — —* 1, то кожен елемент з простору $\widetilde{\mathfrak{g}}_+\oplus\mathfrak{g}_{-1}$ задаватиме ненульовий функціонал на $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$. Якщо ж *к — N,* то елементи з множини $\widetilde{\mathfrak{g}}_-\oplus\sum_{l=0}^{N}\mathfrak{g}_l$ задаватимуть ненульові функціонали на $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$. Ці два випадки спряження будемо використовувати далі.

Виділимо в $(\widetilde{\mathfrak{g}}_-)^* = \widetilde{\mathfrak{g}}_+\oplus\mathfrak{g}_{-1}$ скінченновимірний підпростір

$$M^{N+1} = \left\{\widehat{\mu}(\lambda) = \begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda)\\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda)\end{pmatrix}\right\}, \qquad (5)$$

$$\alpha(\lambda)=\sum_{i=0}^{N}\lambda^i\alpha_{2i},\quad \beta(\lambda)=\sum_{i=0}^{N+1}\lambda^{i-1}\beta_{2i-1},$$

$$\gamma(\lambda)=\sum_{i=0}^{N+1}\lambda^i\gamma_{2i-1}.$$

Очевидно, цей підпростір є ad^*-інваріантним відносно ко приєднаної дії алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$. В просторі $C^\infty(M^{N+1})$ гладких функцій на M^{N+1} означимо дужку Лі—Пуассона:

$$\{f_1,f_2\}_1 = \sum_{i,j=0}^{N}\sum_{a,b=1}^{3}W_{ij}^{ab}(1)\frac{\partial f_1}{\partial\mu_i^a}\frac{\partial f_2}{\partial\mu_j^b}, \qquad (6)$$

$$W_{ij}^{ab}(1) = \langle\widehat{\mu}(\lambda),\,[X_{-i-1}^a,\,X_{-j-1}^b]\rangle_{-1},$$

де ми вжили позначення $\mu_i^a = \{\gamma_{2i-1},\,\beta_{2i-1},\,\alpha_{2i}\}$, $X_{-i-1}^a = \{X_{-2i-1},\,Y_{-2i-1},\,H_{-2i-2}\}$. Легко бачити, що змінні γ_{2N+1} та β_{2N+1} є ануляторами дужки (6). Тому можна покласти $\gamma_{2N+1} = \beta_{2N+1} = \mathrm{const}$ і обмежити дужку (6) на підпростір $M^N\subset M^{N+1}$, координатами якого є змінні $\gamma_{2i-1},\,\beta_{2i-1},\,\alpha_{2i}$, $i = 0,1,\ldots,N$.

Оскільки $M^N\subset\widetilde{\mathfrak{g}}_-\oplus\sum_{l=0}^{N}\mathfrak{g}_l = (\widetilde{\mathfrak{g}}_+)^*$, то в просторі M^N означена також коприєднана дія підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$. Легко бачити, що ефективно на M^N діє фактор-алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_+/\sum_{l>N+1}\oplus\,\mathfrak{g}_l$. Дужка Лі—Пуассона, що їй відповідає, має вигляд:

$$\{f_1,f_2\}_2 = \sum_{i,j=0}^{N}\sum_{a,b=1}^{3}W_{ij}^{ab}(2)\frac{\partial f_1}{\partial\mu_i^a}\frac{\partial f_2}{\partial\mu_j^b}, \qquad (7)$$

$$W_{ij}^{ab}(2) = \langle\widehat{\mu}(\lambda),\,[X_{-i+N}^a,\,X_{-j+N}^b]\rangle_N,$$

$$X_{-i+N}^a = \{X_{-2i+2N+1},\,Y_{-2i+2N+1},\,H_{-2i+2N}\}.$$

Розглянемо ad-інваріантну функцію:

$$I(\lambda) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\widehat{\mu}^2(\lambda) = \alpha^2(\lambda)+\beta(\lambda)\gamma(\lambda) = \\ = h_{-1}\lambda^{-1}+h_0+\cdots+h_{2N+1}\lambda^{2N+1}. \qquad (8)$$

Коефіцієнти h_ν, $\nu=\overline{-1,\,2N+1}$ в розкладі (8) мають вигляд:

$$h_\nu = \sum_{i+j=\nu}\alpha_{2i}\alpha_{2j} + \sum_{i+j=\nu}\beta_{2i-1}\gamma_{2i-1}. \qquad (9)$$

Функції h_ν, $\nu=\overline{-1,\,2N+1}$ попарно комутують (перебувають в інволюції) стосовно обох дужок

(6) та (7). (Доведення цього факту див. у [9]). Окрім того, функції $h_N, h_{N+1}, \ldots, h_{2N}$ є ануляторами дужки (6). Очевидно, анулятором є також і функція $h_{2N+1} = \beta_{2N+1}\gamma_{2N+1}$, але оскільки ми поклали $\gamma_{2N+1} = \beta_{2N+1} = \mathrm{const}$, то h_{2N+1} вже фіксовано і виключаємо її з розгляду. Решта функцій $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N-1}$ породжують нетривіальні гамільтонові потоки:

$$\frac{\partial \mu_i^a}{\partial \tau_\nu} = \{\mu_i^a, h_\nu\}_1, \quad \nu = \overline{-1, N-1}.$$

Функції $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N-1}$ в свою чергу є ануляторами дужки (7), а "гамільтоніани" $h_N, h_{N+1}, \ldots, h_{2N}$ породжують нетривіальні потоки. При цьому має місце рівняння:

$$\{\mu_i^a, h_\nu\}_1 = -\{\mu_i^a, h_{\nu+N+1}\}_2. \tag{10}$$

Нехай $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ — дійсна підалгебра в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (в ролі $\mathfrak{g}$ може виступити будь-яка інша дійсна форма, зокрема підалгебра su(2) або ,$\mathfrak{su}(1,1) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$). Алгебраїчний многовид, що заданий рівняннями

$$h_\nu(\gamma_{2i-1}, \beta_{2i-1}, \alpha_{2i}) = c_\nu, \quad \nu \in \overline{N, 2N},$$

є орбітою коприєднаної дії алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$. Позначатимемо її через $\mathcal{O}_1$, $\dim \mathcal{O} = 2(N+1)$. Набір інтегралів $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N-1}$ в кількості $N+1$, які попарно комутують і функціонально незалежні майже всюди, забезпечує виконання умов теореми Ліувілля про інтегровність. Якщо одну з функцій h_ν, $\nu = \overline{-1, N-1}$ взяти на роль гамільтоніана, то система рівнянь

$$\frac{d\alpha_{2i}}{d\tau_\nu} = \{\alpha_{2i}, h_\nu\}_1, \quad \frac{d\gamma_{2i-1}}{d\tau_\nu} = \{\gamma_{2i-1}, h_\nu\}_1,$$
$$\frac{d\beta_{2i-1}}{d\tau_\nu} = \{\beta_{2i-1}, h_\nu\}_1$$

буде інтегровною на орбіті $\mathcal{O}_1$

Виберемо функцію h_{N-1} на роль гамільтоніана "стаціонарного" потоку, а функцію h_{N-2} на роль "еволюційного" гамільтоніана і розглянемо більш детально відповідні системи рівнянь на орбіті $\mathcal{O}_1$. Позначатимемо через χ параметр вздовж траєкторії гамільтоніана h_{N-1}, тобто покладатимемо $\tau_{N-1} \equiv x$, а літерою t — параметр вздовж траєкторії гамільтоніана h_{N-2}, тобто $\tau_{N-2} \equiv t$. Система рівнянь, що відповідає гамільтоніанові h_{N-1}, має вигляд:

$$\frac{\partial \gamma_{2i-1}}{\partial x} = 2\alpha_{2N}\gamma_{2i-1} - 2\alpha_{2i-2}\gamma_{2N+1}, \tag{11а}$$

$$\frac{\partial \beta_{2i-1}}{\partial x} = -2\alpha_{2N}\beta_{2i-1} + 2\alpha_{2i-2}\beta_{2N+1}, \tag{11б}$$

$$\frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x} = \beta_{2N+1}(\beta_{2i-1} - \gamma_{2i-1}), \quad i = \overline{1, N}. \tag{11в}$$

В згорнутому вигляді ці рівняння записуються у формі рівняння Ейлера — Арнольда:

$$\frac{\partial \widehat{\mu}(\lambda)}{\partial x} = [\widehat{\mu}(\lambda), \nabla_1 h_{N-1}] =$$
$$= -[\widehat{\mu}(\lambda), \nabla_2 h_{2N}], \tag{12}$$

де

$$\nabla_1 h = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha_{2i}} H_{-2i-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h}{\partial \beta_{2i-1}} Y_{-2i-1} + \frac{\partial h}{\partial \gamma_{2i-1}} X_{-2i-1} \right),$$

$$\nabla_2 h = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha_{2i}} H_{-2i+2N} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h}{\partial \beta_{2i-1}} Y_{-2i+2N+1} + \frac{\partial h}{\partial \gamma_{2i-1}} X_{-2i+2N+1} \right).$$

Система еволюційних рівнянь має вигляд:

$$\frac{\partial \gamma_{2i-1}}{\partial t} = 2\alpha_{2N}\gamma_{2i-3} - 2\alpha_{2i-4}\gamma_{2N+1}$$
$$+ 2\alpha_{2N-2}\gamma_{2j-1} - 2\alpha_{2j-2}\gamma_{2N-1},$$

$$\frac{\partial \beta_{2i-1}}{\partial t} = -2\alpha_{2N}\beta_{2i-3} + 2\alpha_{2i-4}\beta_{2N+1}$$
$$- 2\alpha_{2N-2}\beta_{2j-1} + 2\alpha_{2j-2}\beta_{2N-1}, \tag{13б}$$

$$\frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial t} = \beta_{2N+1}(\beta_{2i-3} - \gamma_{2i-3})$$
$$+ \gamma_{2N-1}\beta_{2j-1} - \beta_{2N-1}\beta_{2j-1}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{13в}$$

або у згорнутому вигляді:

$$\frac{\partial \widehat{\mu}(\lambda)}{\partial t} = [\widehat{\mu}(\lambda), \nabla_1 h_{N-2}] =$$
$$= -[\widehat{\mu}(\lambda), \nabla_2 h_{2N-1}]. \tag{14}$$

Звуження рівнянь (11) на орбіту $\mathcal{O}_1$ означає вилучення змінних $\beta_{2i+1} + \gamma_{2i+1}$, $i = \overline{1, N}$. Це випливає з явного вигляду алгебраїчних рівнянь, які задають орбіту. Справді, якщо $\gamma_{2N+1} = \beta_{2N+1} = \mathrm{const}$, то

$$h_{2N} = \beta_{2N+1}(\beta_{2N-1} + \gamma_{2N-1}) + \alpha_{2N}^2,$$
$$h_{2N-1} = \beta_{2N+1}(\beta_{2N-3} + \gamma_{2N-3}) +$$
$$+ \beta_{2N-1}\gamma_{2N-1} + 2\alpha_{2N}\alpha_{2N-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_N = \beta_{2N+1}(\beta_{-1} + \gamma_{-1}) + \cdots,$$

звідки видно, що змінні $\beta_{2i+1}+\gamma_{2i+1}$ виражаються через сталі h_ν та решту змінних α_{2i} і,$\beta_{2i+1}-\gamma_{2i+1}$; останні можна вважати незалежними координатами на орбіті.

Система рівнянь (11) має рекурсивну структуру і її легко звести до одного рівняння 2(iV+l)-го порядку на змінну α_{2N}. При цьому

$$\beta_{2N-1}-\gamma_{2N-1}=\frac{1}{\beta_{2N+1}}\,\alpha'_{2N},$$
$$\alpha_{2N-2}=\frac{(\beta_{2N-1}-\gamma_{2N-1})'}{4\beta_{2N+1}}+ \\ +\frac{\alpha_{2N}}{2\beta^2_{2N+1}}(h_{2N}-\alpha^2_{2N}) \tag{15}$$

і т. д. (Тут і далі "штрих" означає похідну за змінною *x.)*

Система рівнянь (11), звужена на орбіту 0\ і редукована до рівняння 2{N+l)-zo порядку, тотожна вищим стаціонарним рівнянням —МКдФ [6]. Змінну α_{2N}, стосовно якої записується вище стаціонарне рівняння, будемо називати *базовою змінною.*

Розглянемо еволюційний потік (13) на траєкторіях системи (11). Оскільки всі змінні на орбіті виражаються через базову змінну α_{2N} та її похідні, то еволюційне рівняння достатньо розглянути тільки для цієї змінної:

$$\frac{\partial\alpha_{2N}}{\partial t}=\beta_{2N+1}(\beta_{2N-3}-\gamma_{2N-3}).$$

Але із системи (11) випливає, що

$$\frac{\partial\alpha_{2N-2}}{\partial x}=\beta_{2N+1}(\beta_{2N-3}-\gamma_{2N-3}),$$

тому еволюційне рівняння з урахуванням формули (15) набуває вигляду (покладемо $h_{2N+1}=1$)

$$4\frac{\partial\alpha_{2N}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha''_{2N}-2\alpha_{2N}(\alpha^2_{2N}-h_{2N})\right). \tag{16}$$

Це рівняння при $h_{2N}=0$ тотожне рівнянню -МКдФ. Традиційне представлення нульової кривизни для рівняння (15) можна отримати як умову сумісності (комутативності) гамільтонових рівняннь (12) та (14). Справді, умова сумісності

$$\frac{\partial^2\widehat{\mu}(\lambda)}{\partial t\partial x}=\frac{\partial^2\widehat{\mu}(\lambda)}{\partial x\partial t}$$

веде до рівняння

$$\frac{\partial\nabla_2h_{2N}}{\partial t}-\frac{\partial\nabla_2h_{2N-1}}{\partial x}+ \\ +[\nabla_2h_{2N},\nabla_2h_{2N+1}]=0. \tag{17}$$

Перетворення подібності $\nabla h\ \to\ T^{-1}\nabla hT$, $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \frac{1}{-\sqrt{\lambda}}\end{pmatrix}$, яке діагоналізує матриці $\begin{pmatrix}0&1\\ \lambda&0\end{pmatrix}$, приводить рівняння (17) до симетричного вигляду [15].

Іншу гамільтонову систему отримаємо з рівнянь (10), якщо обмежимо її на орбіту $\mathcal{O}_2$. Алгебраїчні рівняння (квадрики), які задають цю орбіту, менш тривіальні, ніж у попередньому випадку. Геометрично многовид $\mathcal{O}_2$ являє собою векторне розшарування над одновимірними орбітами групи SO(1, 1) $=\exp\mathfrak{g}_0$ в просторі $\mathfrak{g}_{-1}$. Група SO(1, 1) розшаровує простір $\mathfrak{g}_-\simeq\mathbb{R}^2$ на гіперболи (які при $h_{-1}=0$ вироджуються в прямі). Якщо $h_{-1}>0$,то $\gamma_{-1}=\pm\sqrt{h_{-1}}\,e^u$, $\beta_{-1}=\pm\sqrt{h_{-1}}\,e^{-u}$, $u\in\mathbb{R}^1$. Якщо $h_{-1}<0$,то $\gamma_{-1}=\pm\sqrt{|h_{-1}|}\,e^u$, $\beta_{-1}=\mp\sqrt{|h_{-1}|}\,e^{-u}$

Покладемо $\gamma_{-1}=re^u$. Тоді з першого рівняння системи (10) при $i=0$ випливає

$$\alpha_{2N}=\tfrac12\,u_x. \tag{18}$$

Еволюційний потік, породжений гамільтоніаном h_N, веде до рівняння (покладемо $\beta_{2N+1}=\beta$)

$$\frac{\partial\alpha_{2N}}{\partial t}=\beta(\gamma_{-1}-\beta_{-1}),$$

звідки, беручи до уваги параметризацію $\gamma_{-1}=re^u$, $\beta_{-1}=re^{-u}$, а також співвідношення (18), отримуємо рівняння sh-Гордон:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}=4r\beta\,\mathrm{sh}\,u. \tag{19}$$

У випадку $h_{-1}=0$, як зазначалося вище, орбіта $\mathcal{O}_2$ вироджується і тоді $\beta_{-1}=0$, $\gamma_{-1}=re^u$, де r — довільна стала. Аналогом рівняння (19) буде рівняння Л іу в Ілля

$$\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}=2r\beta e^u.$$

Якщо на роль дійсної підалгебри в si (2, $\mathbb{C}$) взяти алгебру su(2), то у всіх попередніх формулах слід покласти

$$\alpha_{2i}=\mathrm{i}\,a_{2i},\ a_{2i}\in\mathbb{R}^1,\quad \gamma_{2i-1}=-\overline{\beta}_{2i-1}.$$

Зокрема $\beta=ib$ — const, $h_{2N+1}=-b^2$. У цьому випадку замість рівняння (16) отримаємо рівняння

$$4\frac{\partial a_{2N}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(a''_{2N}+2a_{2N}(a^2_{2N}+h_{2N})\right), \tag{20}$$

де покладено $h_{2N+1}=-1$. Ми отримали рівняння +МКдФ [15].

У випадку алгебри su(2), $\exp \mathfrak{g}_0 \simeq U(1) \simeq SO(2)$ Орбітами цієї групи в просторі $\mathfrak{g}_{-1} \simeq \mathbb{C}$ є кола, а орбіта $\mathcal{O}_2$ матиме структуру векторного розшарування над колом. У цьому випадку покладемо $\gamma_{-1} = -ire^{iu}, \beta_{-1} = -ire^{-iu}$ Тоді

$$a_{2N} = \frac{1}{2} u_x, \quad \frac{\partial a_{2N}}{\partial t} = b(\gamma_{-1} - \beta_{-1}),$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 4rb \sin u. \tag{21}$$

2. Скінченнозонні рівняння КдФ як гамільтонові системи на орбіті

В попередньому розділі було показано, що звуження системи рівнянь (11) на вироджену орбіту ($h_{-1} = 0$) алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ веде до рівняння Ліувілля. З точки зору алгебри β„ та породженої нею дужки Лі—Пуассона (6) функція h_{-1} є гамільтоніаном. Звуження системи (11) на поверхню рівня $h_{-1} = 0$ є гамільтоновою редукцією. Редукований фазовий підпростір буде мати розмірність *2(N+l)* — 2. Цікаво, що він знову буде орбітою деякої підалгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_-^{KdV} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_-$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_-^{KdV} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_{-1}+Y_{-1}, H_{-2}, X_{-3}, Y_{-3}, \dots\}.$$

Редукований пуассонів підпростір в M^N, на якому означено коприєднану дію алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_-^{KdV}$, визначається умовами:

$$\beta_{-1} = 0, \quad \alpha_{2N} = \mathrm{const}.$$

Стосовно редукованої дужки Лі—Пуассона функції $h_0, h_1, \dots, h_{N-1}$ залишаються незалежними комутативними гамільтоніанами. Виберемо, як і раніше, функцію h_{N-1} на роль гамільтоніана стаціонарної задачі. Потік, породжений цим гамільтоніаном, задається системою рівнянь:

$$\frac{\partial \gamma_{2i-1}}{\partial x} = 2\alpha_{2i}(\beta_{2N-1} - \gamma_{2N-1}) + \\ + 2\alpha_{2N}\gamma_{2i-1} - 2\alpha_{2i-2}\gamma_{2N+1}, \tag{22а}$$

$$\frac{\partial \beta_{2i-1}}{\partial x} = -2\alpha_{2N}\beta_{2i-1} + 2\alpha_{2i-2}\beta_{2N+1}, \tag{226}$$

$$\frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x} = \beta_{2i+1}(\beta_{2N-1} - \gamma_{2N-1}) + \\ + \beta_{2N+1}(\beta_{2i-1} - \gamma_{2i-1}), \quad i = \overline{1, N}. \tag{22в}$$

Базовою змінною в редукованому фазовому просторі можна вибрати змінну β_{2N-1}. Тоді система рівнянь (22) зводиться до одного рівняння порядку *2N* стосовно цієї змінної. *Отримане рівняння співпадає з вищим стаціонарним рівнянням КдФ,* тобто воно може бути подано у вигляді:

$$\frac{\delta}{\delta u} \sum_{\alpha=0}^{N+1} c_\alpha \mathcal{H}_\alpha = 0,$$

де $c_{N+1} = 1$, а решта сталих виражаються через $h_N, h_{N+1}, \dots, h_{2N}$

На траєкторіях системи (22) означимо "еволюційний" гамільтонів потік, породжений гамільтоніаном h_{N-2}. Еволюція з м і н β_{2N-1} у д е підпорядкована рівнянню:

$$\frac{\partial \beta_{2N-1}}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta_{2N-3}}{\partial x}. \tag{23}$$

Змінну β_{2N-3} у правій частині рівняння (23) виразимо через β_{2N-1} та її похідні, використавши стаціонарні рівняння (22) та алгебраїчні рівняння h_α = const, α = *N, N + 1, ..., 2N,* що фіксують орбіту. Зокрема, з останнього рівняння системи (22) при $j = N - 1$ випливає, що

$$\beta_{2N+1}(\beta_{2N-3} - \gamma_{2N-3}) = \\ = \frac{\partial \alpha_{2N-2}}{\partial x} - \beta_{2N-1}\gamma_{2N-1} + \beta_{2N-1}^2,$$

а рівняння h_{2N-1} = const еквівалентне співвідношенню:

$$\beta_{2N+1}(\beta_{2N-3} + \gamma_{2N-3}) = \\ = h_{2N-1} + 2\alpha_{2N}\alpha_{2N-2} - \beta_{2N-1}\gamma_{2N-1}.$$

Звідки знаходимо:

$$2\beta_{2N+1}\beta_{2N-3} = \frac{\partial \alpha_{2N-2}}{\partial x} - 2\beta_{2N-1}\gamma_{2N-1} + \\ + \beta_{2N-1}^2 - 2\alpha_{2N}\alpha_{2N-2} + h_{2N-1}. \tag{24}$$

З рівняння (226) отримаємо:

$$\alpha_{2N-2} = \frac{1}{2\beta_{2N+1}} \left(\frac{\partial \beta_{2N-1}}{\partial x} + 2\alpha_{2N}\beta_{2N-1} \right)$$

Підставляючи цей вираз у (24) і враховуючи, що

$$\gamma_{2N-1} = \frac{1}{2\beta_{2N+1}} \left(h_{2N} - \alpha_{2N}^2 \right) - \beta_{2N-1},$$

отримуємо при $h_{2N+1} = 1$:

$$4\frac{\partial \beta_{2N-1}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \Big(\beta_{2N-1}'' - 4\beta_{2N-1}h_{2N} + \\ + 2\beta_{2N+1}(3\beta_{2N-1}^2 + h_{2N-1}) \Big). \tag{25}$$

Це рівняння при $h_{2N} = 0$ тотожне рівнянню КдФ.

3. Скінченнозонне інтегрування рівнянь ± МКдФ та sin(sn)-Гордон: комплексні кутові змінні

Гамільтонові системи, означені в попередньому пункті, інтегровні в квадратурах. Згідно з теоремою Ліувілля про інтегровність це означає, що спільна поверхня рівня інтегралів руху h_α — const, α = -1, 0, ..., *2N* є тором. Очевидно, що цей тор інваріантний для всіх потоків, які генеруються гамільтоніанами h_a, а отже, є спільним для рівнянь ± МКдФ та sin(sh)-Гордон. Кутові змінні на інваріантному торі виражаються через вихідні динамічні змінні квадратурами. Для того, щоб написати ці квадратури явно, перейдемо від змінних γ_{2i-1}, β_{2i-1}, α_{2i}, i = 0, 1, ..., *N,* до нових змінних h_α та λ_k, k = 1, 2, ..., *N* + 1. Комплексні змінні λ_k — це нулі полінома $\gamma(\lambda)$:

$$\gamma(\lambda) = \gamma_{2N+1} \prod_{k=1}^{N+1} (\lambda - \lambda_k). \qquad (26)$$

Як буде показано далі, змінні λ_k параметризують комплексний тор Ліувілля і їх легко зв'язати з кутовими змінними (комплексними).

Історія появи змінних λ_k досить давня. Вперше вони виникли в дослідженнях Якобі при інтегруванні геодезичного потоку на еліпсоїді. Аналогічні змінні використав К. Нейман, розв'язуючи задачу про рух частинки на поверхні сфери під дією анізотропної пружної сили, та С. Ковалевська, досліджуючи динаміку несиметричної дзиги в полі тяжіння. В теорії скінченнозонного інтегрування змінні λ_k відіграли вирішальну роль при отриманні явних формул для періодичних та квазіперіодичних розв'язків рівнянь солітонного типу (нелінійного рівняння Шредінгера [10], рівняння sin-Гордон [11] та інших [12]). Звичайно, сам факт інтегровності та теорема Ліувілля не дають ніяких вказівок стосовно існування змінних λ_k. Очевидно, їх поява обумовлена деякими додатковими алгебро-геометричними властивостями комплексного тора, що задаються рівняннями h_α = const.

З рівнянь (12) та (13) знайдемо рівняння на змінні λ_k. З рівняння (12) маємо:

$$\frac{d}{dx} \ln \gamma(\lambda) = -\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\lambda_j'}{\lambda - \lambda_j} = \frac{2\alpha_{2N}\gamma(\lambda) - 2\lambda\gamma_{2N+1}\alpha(\lambda)}{\gamma(\lambda)}. \qquad (27)$$

Домножимо праву та ліву частини рівності (27) на $(\lambda - \lambda_k)$ і спрямуємо λ до λ_k. Отримаємо:

$$\frac{d\lambda_k}{dx} = \frac{2\lambda_k\gamma_{2N+1}\alpha(\lambda_k)}{\gamma(\lambda_k)} = \frac{2\sqrt{\lambda_k(h_{-1} + h_0\lambda_k + \cdots + h_{2N+1}\lambda_k^{2N+2})}}{\prod\limits_{j\neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}. \qquad (28)$$

Аналогічним способом з рівнянь (13) отримаємо:

$$\frac{d\lambda_k}{d\tau} = \frac{2\left(-\sum\limits_{j=1}^{N+1} \lambda_j + \lambda_k\right)}{\prod\limits_{j\neq k} (\lambda_k - \lambda_j)} \times \sqrt{\lambda_k(h_{-1} + h_0\lambda_k + \cdots + h_{2N+1}\lambda_k^{2N+2})}. \qquad (29)$$

Рівняння (28) та (29) слід розглядати на гіпереліптичній рімановій поверхні $\mathfrak{R}$ (алгебраїчній кривій), яка задана рівнянням:

$$w^2 = h_{2N+1}\lambda \prod_{r=1}^{2N+2} (\lambda - E_r). \qquad \textbf{(30)}$$

Крива (ЗО) має *2N* + 3 точки галуження E_r у скінченній області комплексної площини і одну — при $\lambda = \infty$. Рід *g* відповідної ріманової поверхні $\mathfrak{R}$ дорівнює *N+1.*

Якщо врахувати умови дійсності ($h_\alpha \in \mathbb{R}$), то нулі многочлена в правій частині (30) мають бути або дійсними, або попарно комплексно спряженими. Одну з можливих ситуацій при *N* — 1 зобразимо на рис. 1.

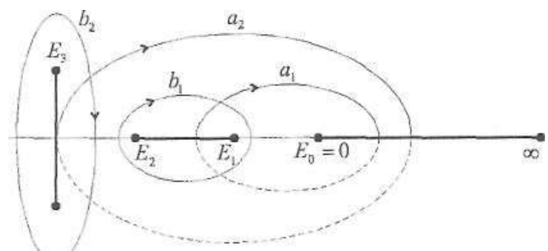

Рис. 1

На рисунку зображені також *a*- та *b*-цикли, що складають базис групи гомології $H_1(\mathfrak{R})$ ріманової поверхні $\mathfrak{R}$. Дуальний до нього базис голоморфних диференціалів має вигляд $(j = \overline{1, N+1})$

$$\omega_j = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} \lambda^i c_j^i}{\sqrt{h_{2N+1}\lambda \prod\limits_{r=1}^{2N+1} (\lambda - E_r)}} d\lambda. \qquad (31)$$

Умови дуальності (нормування)

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \quad (32)$$

однозначно визначають сталі c_i^j у формулі (31).

Тепер у нас є все необхідне для визначення *кутових змінних.* Покладемо:

$$\varphi_j(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N+1}) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_k} \omega_j, \quad (33)$$

де λ_0 — деяка фіксована точка на рімановій поверхні. Легко бачити, що інтеграли в (33) визначені з точністю до m-кратного обходу циклів a_i та n-кратного обходу циклів b_s, тобто

$$\varphi_j(\{\lambda_k\}) \sim \varphi_j(\{\lambda_k\}) + \sum m_i\delta_{ij} + \sum n_s B_{js},$$

де $B_{js} = \oint_{b_s} \omega_j$. Це означає, що φ_j є комплексними кутовими змінними на торі $T^g = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g \oplus B\,\mathbb{Z}^g$, який називають Якобіаном кривої $\mathfrak{R}$ і позначають $J(\mathfrak{R})$

Для спрощення обрахунків будемо вважати, що жодна зі змінних λ_k не співпадає з точками галуження E_r і що вони попарно різні. Тоді легко довести невиродженість відображення $\{\lambda_k\} \to \{\varphi_k\}$ (відображення Абеля [4]). Справді,

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_k} = \frac{\sum_{i=0}^{N} (\lambda_k)^i c_j^i}{w(\lambda_k)}.$$

Тоді, використовуючи визначник Вандермонда, знайдемо:

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_k}\right) = \frac{\det(c_j^i) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)}{\prod_{k=1}^{N+1} w(\lambda_k)}.$$

Оскільки диференціали ω_j незалежні, то $\det(c_j^i) \neq 0$, отже при наших припущеннях $\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_k}\right) \neq 0$.

Легко показати, що підстановка (33) лінеаризує рівняння (28) та (29). Зокрема:

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} = 2c_j^N, \quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial\tau} = 2c_j^{N-1},$$

звідки $\varphi_j(x,\tau) = c_j^{N-1}\tau + c_j^N x + \varphi_j(0,0)$.

Після того, як кутові змінні знайдено, задача скінченнозонного інтегрування зводиться до проблеми обернення відображення Абеля, яке задане формулою (32). В теорії абелевих функцій та ріманових поверхонь ця проблема відома як *проблема обернення Якобі.* її класичне вирішення дається в термінах тета-функцій, а саме: будь-яка симетрична функція від змінних λ_k виражається через тета-функцію багатьох змінних. Наприклад, [4,16]:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{N+1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\theta(\varphi) + C, \quad (34)$$

де $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N+1}\}$,

$$\theta(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}} \exp\{\pi\,\mathrm{i}(\mathbf{n}, B\mathbf{n}) + 2\pi\,\mathrm{i}(\mathbf{n}, \mathbf{z})\}$$

— функція багатьох змінних, що визначається матрицею b-періодів $B=(B_{js})$. Інші симетричні функції від λ_k виражаються через θ-функції з характеристиками. Зокрема,

$$\prod_{k=1}^{N+1} \lambda_k = \frac{\theta^2(\mathbf{z}+\Delta+\delta)}{\theta^2(\mathbf{z}+\Delta)},$$

де Δ — вектор ріманових констант, $\delta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$. Очевидно, обернене відображення Абеля визначено на множині $J(\mathfrak{R}) - \Theta$, де $\Theta = \{\mathbf{z} \in J(\mathfrak{R}) \,|\, \theta(\mathbf{z}) = 0\}$

Інший підхід, який базується на гіпереліптичних узагальненнях $\wp$-функції Веєрштрасса і дозволяє безпосередньо зв'язати кутові змінні на абелевому торі з координатами $\gamma_{2i-1}, \beta_{2i-1}, \alpha_{2i}$, розвивається в роботах [18,19].

Проблема дійсності. Як зазначалось вище, формула (33) дає "майже всюди" невироджене відображення *N+1* екземплярів ріманової поверхні $\mathfrak{R}$ в комплексний тор $J(\mathfrak{R}) \sim \mathbb{C}^{N+1} / \mathbb{Z}^{N+1} \oplus B\,\mathbb{Z}^{N+1}$ Частиною комплексного тора $J(\mathfrak{R})$ є *дійсний* тор, дифеоморфний тору Ліувілля інтегровної системи. Виділення цього дійсного тора і побудова відображення з нього у скінченнозонний фазовий простір є важливою і в багатьох випадках нетривіальною задачею теорії скінченнозонного інтегрування. У випадку рівнянь КдФ, —МКдФ та sh-Гордон проблема дійсності розв'язується доволі просто. Проблеми виникають при аналізі скінченнозонного сектора рівняння sin-Гордон (а також рівнянь Ландау—Ліфшица, афінної системи рівнянь Тоди та інших рівнянь, для яких скінченнозонний фазовий простір має нетривіальну топологію). Проблема дійсності скінченнозонних розв'язків рівняння sin-Гордон, поданих у термінах тета-функцій, досліджувалась в роботах [20-22]. її розв'язання, згідно з [20-22], включає вибір допустимої ріманової поверхні (наявність на ній інволюції $\tau(z,w) \to (\mathbf{z}^*, \mathbf{w}^*)$), а також опис овалів

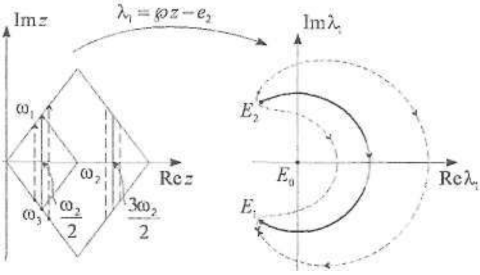

Рис. 2. $-2\sqrt{h_1 h_{-1}} < h_0 < 0$

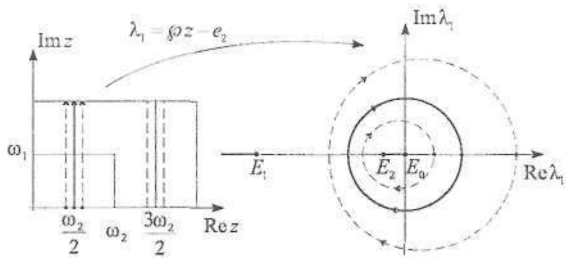

Рис. 3. $h_0 < -2\sqrt{h_1 h_{-1}}$

(циклів) на ній, де набувають своїх значень змінні λ_k, $\kappa = 1, \ldots, N+1$. Симетризований прямий добуток цих овалів дає дійсний тор Ліувілля. Ми не будемо наводити тут конкретних умов дійсності для загального випадку, оскільки це вимагає заглиблення в теорію тета-функцій (необхідні деталі можна знайти у працях [21,22]). Натомість розглянемо найпростіший випадок $N = 0$ і з цього прикладу побачимо, в чому полягає проблема описання дійсних розв'язків.

Якщо $N = 0$, то маємо тільки одну змінну λ_1, для якої рівняння (28) і (29) мають вигляд:

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = 2\sqrt{\lambda_1(h_{-1} + h_0\lambda_1 + h_1\lambda_1^2)}, \quad \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0,$$

Крива $w^2 = 4h_1\lambda(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)$ є еліптичною кривою $(\partial = 1)$. Вводячи позначення $z = \sqrt{h_1}x$, розв'язок запишемо у вигляді:

$$\lambda_1 = \wp(z) - \frac{h_0}{3h_1}, \tag{35}$$

де $\wp(z)$ — функція Веєрштрасса, аргумент якої пробігає паралелограм періодів, що визначається розташуванням нулів E_1 та E_2.

У випадку алгебри $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ $h_1 > 0$ і змінна λ_1 є дійсною. Розв'язки зручно подати через еліптичні функції Якобі. Якщо $h_0^2 - 4h_1h_{-1} > 0$, то при $h_0 > 0$ маємо:

$$\lambda_1 = -E_2\frac{\mathrm{cn}^2\left(\beta\sqrt{-E_2}\,x\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\beta\sqrt{-E_2}\,x\right)}, \qquad k^2 = 1 - \frac{E_1}{E_2}.$$

При $h_0 < 0$ маємо

$$\lambda_1 = \frac{E_2}{\mathrm{sn}^2\left(\beta\sqrt{E_2}\,x\right)}, \qquad k^2 = \frac{E_1}{E_2}.$$

Якщо ж $h_0^2 - 4h_1h_{-1} < 0$, то

$$\lambda_1 = \frac{r}{\beta}\,\frac{\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{r\beta}\,x\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{r\beta}\,x\right)\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{r\beta}\,x\right)},$$

де модуль $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{h_0}{4r\beta}$.

Розглянемо випадок алгебри su(2). На рис. 2, 3 показано конформне відображення, яке здійснює функція $\wp(z) - \frac{h_0}{3h_1}$. Параметризуемо орбіту $\mathcal{O}_2$ так, як і в попередньому пункті, поклавши $\gamma_{-1} = -ire^{iu}$, $\beta_{-1} = -ire^{-iu}$, $\gamma_1 = \beta_1 = ib$. Тоді $h_1 = -b^2$, $h_{-1} = -r^2$, $\lambda_1 = -\frac{\gamma_{-1}}{\gamma_1} = \frac{r}{b}\ e^{iu}$. Стаціонарні рівняння (11) в цьому випадку тотожні гамільтоновим рівнянням руху нелінійного маятника:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -4rb\sin u. \tag{36}$$

Орбіта $\mathcal{O}_2$ при $N = 0$ є циліндром радіуса r. Траєкторії системи (36) лежать на перетині $\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_1$

Якщо через $\mathcal{E}$ позначити енергію системи (36), $\mathcal{E} = \frac{1}{2}u_x^2 - 4rb\cos u$, то $h_0 = -\frac{\mathcal{E}}{2}$. Оскільки для дійсних розв'язків $\mathcal{E} \geqslant -4rb$, то $h_0 \leqslant 2rb$. Значенню $h_0 = 2rb$ відповідає положення рівноваги. Якщо $-4rb < \mathcal{E} < 4rb$, то система здійснює нелінійні коливання навколо положення рівноваги. Розв'язок при $\mathcal{E} = 4rb$ відповідає сепаратрисі і відповідна траєкторія у фазовому просторі складається з двох компонент. Як було показано в попередньому пункті, на орбітах алгебри su(2) реалізуються рівняння sin-Гордон та +МКдФ. Стаціонарна хвиля, яка асоціюється з розв'язками на сепаратрисі, відповідає кінковому та антикінковому розв'язкам рівняння sin-Гордон. Надсепаратрисні розв'язки також складаються з двох компонент, як це добре видно на рис. 4.

Умова дійсності для змінної λ_1 означає, що вона лежить на колі радіуса $\frac{r}{b}$. Для забезпечення цієї умови слід покласти $z = \frac{\omega_2}{2} + ibx$ або $z = \frac{3\omega_2}{2} + ibx$ (рис. 4), де при від'ємному дискримінанті основними періодами функції Веєрштрасса є $2\omega_1$, $2\omega_3$, а $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$, при додатньому — $2\omega_1$ та $2\omega_2$.

Якщо $h_0^2 - 4h_1h_{-1} < 0$, розв'язок рівняння (36) можна подати через еліптичні функції Якобі у вигляді:

$$e^{-\mathrm{i}\frac{u}{2}} = \pm\,\mathrm{dn}\left(2\sqrt{rb}\,x\right) + \mathrm{i}\,k\,\mathrm{sn}\left(2\sqrt{rb}\,x\right), \quad (37)$$

де модуль $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{h_0}{4rb}$, а знак " + " перед dn відповідає траєкторії $z = \frac{\omega_2}{2} + \mathrm{i}\,bx$, знак " - " — траєкторії $z = \frac{3\omega_2}{2} + i\,bx$.

Розв'язок рівняння +МКдФ під сепаратрисою має вигляд:

$$a_0 = \pm 2k\sqrt{rb}\;\mathrm{cn}\left(2\sqrt{rb}\,x\right), \quad \mathbf{(38)}$$

де модуль $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{h_0}{4rb}$. Знак "—" відповідає траєкторії $z = \frac{\omega_2}{2} + \mathrm{i}\,bx$, а знак "+" — траєкторії $z = \frac{3\omega_2}{2} + \mathrm{i}\,bx$

Над сепаратрисою розв'язки рівнянь (36) та -f МКдФ відповідно мають вигляд:

$$e^{\mathrm{i}\frac{u}{2}} = \frac{k\sqrt{\frac{r}{b}}}{\sqrt{-E_2}}\left[\pm\,\mathrm{cn}\left(2b(\sqrt{-E_1} + \sqrt{-E_2})\,x\right) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{i}\,\mathrm{sn}\left(2b(\sqrt{-E_1} + \sqrt{-E_2})\,x\right)\right],$$

де модуль $k = 2\frac{\sqrt[4]{E_1E_2}}{\sqrt{-E_1}+\sqrt{-E_2}}$,

$$a_0 = \pm b\sqrt{-E_1}\left[\mathrm{dn}\left(2b\sqrt{-E_1}\,x\right) + \right.$$
$$\left. + k\,\mathrm{cn}\left(2b\sqrt{-E_1}\,x\right)\right], \quad k^2 = \frac{E_2}{E_1}.$$

Знаки + та - відповідають двом компонентам, на які розпадається дійсний тор.

На сепаратрисі розв'язки мають вигляд:

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\,\exp\left(\pm 2\sqrt{rb}\,x\right) - \pi,$$

що відповідає кінковому та антикінковому розв'язку рівняння sin-Гордон. Відповідні розв'язки для рівняння +МКдФ мають вигляд:

$$a_0 = \pm 2\sqrt{rb}\;\mathrm{sech}\left(2\sqrt{rb}\,x\right).$$

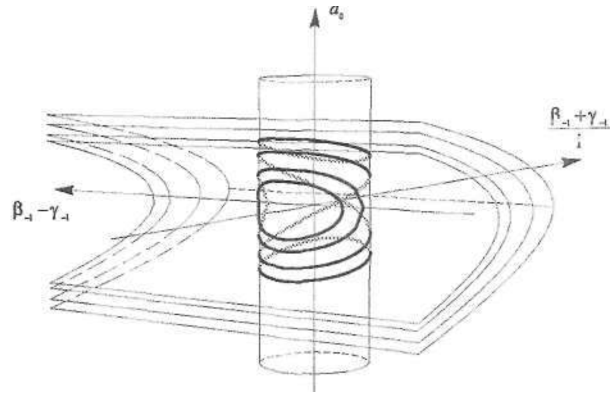

Рис. 4

4. Канонічні координати на орбітах

Як відомо [23], Лі—Пуассонові структури, означені формулами (6) та (7), невироджені на орбітах $\mathcal{O}_1$ та $\mathcal{O}_2$ і визначають там симплектичні форми $\omega(1)$ та $\omega(2)$ (форми Кірілова—Костанта). Згідно з теоремою Дарбу кожну з цих форм локально можна привести до канонічного вигляду $\omega = \sum dp_k \wedge dq_k$ [23]. Локальні координати $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ називають канонічними координатами. Очевидно, що вони не єдині і визначаються з точністю до канонічного перетворення.

У цьому пункті ми побудуємо деякі спеціальні канонічні координати на орбітах $\mathcal{O}_1$ та $\mathcal{O}_2$ і спробуємо їх "глобалізувати". Роль "координатних" змінних q_k будуть виконувати змінні λ_k, означені в попередньому пункті.

Розглянемо спочатку орбіту $\mathcal{O}_1$. Використовуючи рівняння $h_\nu = c_\nu$, $\nu = \overline{N, 2N}$, вилучимо з розгляду змінні β_{2i-1}, виразивши їх через γ_{2i-1} та α_{2i} $i = \overline{0, N}$. В локальних координатах γ_{2i-1}, α_{2i} форма $\omega(1)$ має вигляд:

$$\omega(1) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i}\widetilde{\gamma}_{2(N-j)+1}\,d\alpha_{2(N-i+j)} \wedge d\gamma_{2i-1}, \quad (39)$$

де коефіцієнти $\widetilde{\gamma}_{2i+1}$ виражаються через змінні γ_{2i-1} рекурентними формулами:

$$\widetilde{\gamma}_{2N+1} = -\frac{1}{\gamma_{2N+1}},$$
$$\widetilde{\gamma}_{2i+1} = -\frac{1}{\gamma_{2N+1}}\sum_{k=0}^{N-i-1}\widetilde{\gamma}_{2(N-k)+1}\gamma_{2(k+i)+1}, \quad \mathbf{(40)}$$

$i = \overline{0, N-1}$.

Оскільки $\widetilde{\gamma}_{2i+1}$ залежать тільки від змінних γ_{2i-1}, то 2-форму $\omega(1)$ можна подати як зовнішній диференціал від деякої лінійної форми η: $\omega(1)=d\eta$, де

$$\eta=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i}\widetilde{\gamma}_{2(N-j)+1}\alpha_{2(N-i+j)}d\gamma_{2i-1}=$$
$$=\sum_{s=0}^{N}\alpha_{2s}\left(\sum_{j=0}^{s}\widetilde{\gamma}_{2(N-s+j)+1}d\gamma_{2(N-j)-1}\right).$$

Оскільки многовид $\mathcal{O}_1$ є топологічно тривіальним ($\mathcal{O}_1\simeq\mathbb{R}^{2(N+1)}$), то згідно з лемою Пуанкаре, кожна замкнута форма на ньому є точною. Тому представлення (41) є глобальним.

Запишемо форму η в координатах λ_k. При цьому залежність змінних α_{2i} від λ_k можна обрахувати, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\alpha(\lambda_k)=\sum_{i}A_{ki}\alpha_{2(i-1)}=\sqrt{I(\lambda_k)},\qquad\textbf{(42)}$$

де

$$(A_{ki})=\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\dots&\lambda_1^{i-1}&\dots&\lambda_1^N\\1&\lambda_2&\dots&\lambda_2^{i-1}&\dots&\lambda_2^N\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&\lambda_{N+1}&\dots&\lambda_{N+1}^{i-1}&\dots&\lambda_{N+1}^N\end{pmatrix},$$

$i,k=\overline{1,N+1}$. Покладемо $P_k=\sqrt{I(\lambda_k)}$. Тоді розв'язок системи (42) можна подати у вигляді:

$$\alpha_{2(i-1)}=\frac{\det A_i}{\det A},\qquad\textbf{(43)}$$

де

$$A_i(\mathbf{P})=\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\dots&P_1&\dots&\lambda_1^N\\1&\lambda_2&\dots&P_2&\dots&\lambda_2^N\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&\lambda_{N+1}&\dots&P_{N+1}&\dots&\lambda_{N+1}^N\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Лінійна форма η в координатах λ_1, λ_2 ..., λ_{N+1}, h_{-1}, h_0, $\dots$, h_{2N+1} має вигляд:*

$$\eta=\sum_{k=1}^{N+1}P_k d\lambda_k,\quad P_k=P(\lambda_k),\qquad\textbf{(44)}$$

де $P(\lambda)d\lambda=\lambda^{-1}\sqrt{h_{2N+1}\lambda\prod_{r=1}^{2N+2}(\lambda-E_r)}\,d\lambda$ *— мероморфний диференціал на рімановій поверхні $\mathfrak{R}$ роду g = N+1 з полюсом порядку* 2(iV+1)+2 *в точці* $\lambda=\infty$

Доведення. Твердження теореми легко перевірити при $N=0$. В цьому випадку $\eta=\alpha_0\widetilde{\gamma}_1 d\gamma_{-1}=$ $=\alpha_0 d\lambda_1$, $\alpha_0=\sqrt{I(\lambda_1)}$. Доведення формули (44) в загальному випадку проведемо за індукцією.

Позначимо через $\gamma^*(\lambda)$ поліном ступеня N:

$$\gamma^*(\lambda)=\gamma_{2N+1}\prod_{k=1}^{N}(\lambda-\lambda_{N+1})=\sum_{i=0}^{N}\gamma^*_{2i-1}\lambda^i.$$

Очевидно, що $\gamma(\lambda)=\gamma^*(\lambda)(\lambda-\lambda_{N+1})$. При цьому:

$$\gamma_{2N+1}=\gamma^*_{2N-1},$$
$$\gamma_{2i+1}=\gamma^*_{2i-1}-\lambda_{N+1}\gamma^*_{2i+1},\ i=\overline{N-1,0},$$
$$\gamma_{-1}=-\lambda_{N+1}\gamma^*_{-1}.$$

Нехай $\widetilde{\gamma}^*_{2i+1}$ — коефіцієнти форми $\omega(1)$ на орбіті $\mathcal{O}_1^{2N}$ розмірності $2N$: $\mathcal{O}_1^{2N}\subset\mathcal{O}_1^{2(N+1)}$. Легко перевірити, що

$$\widetilde{\gamma}_{2i+1}=\sum_{k=0}^{N-i}\lambda_{N+1}^k\widetilde{\gamma}^*_{2(i+k)-1},\quad i=\overline{0,N}$$

і за індукцією довести рівність:

$$\sum_{j=0}^{i}\widetilde{\gamma}_{2(N-i+j)+1}d\gamma_{2(N-j)-1}=\sum_{k=1}^{N+1}\lambda_k^i d\lambda_k.$$

Підставивши отриманий вираз у формулу (41), матимем:

$$\eta=\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\alpha_{2(i-1)}\lambda_k^{i-1}d\lambda_k.\qquad\textbf{(45)}$$

Комбінуючи формулу (45) з формулою (43), отримаємо (44).

Диференціал $P(\lambda)d\lambda$, що фігурує у формулі (44), не має особливостей у скінченній частині комплексної площини [15]. Для дослідження його поведінки при $\lambda=\infty$ необхідно зробити заміну $\lambda\to\frac{1}{z^2}$. При цьому враховуємо, що точка $\lambda=\infty$ є точкою галуження. Прості обчислення показують, що диференціал .$P(\lambda)d\lambda$ має полюс порядку 2(N + + 1) + 2.

Теорему доведено.

Розглянемо звуження форми $\omega(2)$ на орбіту $\mathcal{O}_2$ В локальних координатах γ_{2i-1}, α_{2i} форма $\omega(2)$ має вигляд:

$$\omega(2)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\omega_{2(N-i-j)-1}d\alpha_{2j}\wedge d\gamma_{2i-1},\qquad(46)$$

де коефіцієнти $\omega_{2(N-i-j)-1}$ визначаються з рекурентних співвідношень:

$$\omega_{-1} = -\frac{1}{\gamma_{-1}}, \; \omega_{2i+1} = -\frac{1}{\gamma_{-1}}\sum_{k=0}^{i}\omega_{2k-1}\gamma_{2(i-k)+1}$$

Форма $\omega(2)$, взагалі кажучи, не є точною. Але на торі Ліувілля $\omega(2) = 0$, тому в околі тора її можна представити як диференціал лінійної форми ξ, $\omega(2) = d\xi$, де

$$\xi = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\omega_{2(N-i-j)-1}\alpha_{2j}d\gamma_{2i-1},$$

або після пере сумування

$$\xi = \sum_{j=0}^{N}\alpha_{2j}\sum_{i=0}^{N-j}\omega_{2(N-i-j)-1}d\gamma_{2i-1}. \quad (47)$$

Виразимо у формі ξ змінні α_{2j} та γ_{2i-1} через комплексні параметри λ_k. Аналогічно до попереднього випадку методом математичної індукції доведемо рівність:

$$\sum\omega_{2(N-i-j)-1}d\gamma_{2i-1} = -\sum_{k=1}^{N+1}\lambda_k^{-N+j-1}d\lambda_k$$

Підставивши отримане співвідношення, а також вираз (43) у формулу (47), будемо мати:

$$\xi = -\sum\lambda^{-(N+1)}\sqrt{I(\lambda_k)}d\lambda_k$$

Покладемо $Q_k = -\lambda_k^{-(N+1)}\sqrt{I(\lambda_k)}$ і сформулюємо остаточний результат у вигляді теореми.

Теорема 2. *Лінійна форма ξ в координатах λ_1, λ_2 ..., λ_{N+1}, h_{-1}, h_0, ..., h_{2N+1} має вигляд:*

$$\xi = \sum_{k=1}^{N+1}Q_k d\lambda_k, \quad Q_k = Q(\lambda_k), \quad (48)$$

де $Q(\lambda)d\lambda = -\lambda^{-(N+2)}\sqrt{h_{2N+1}\lambda\prod_{r=1}^{2N+2}(\lambda - E_r)}\,d\lambda$ *мероморфний диференціал на рімановій поверхні з полюсом порядку* 2(/V+1) *при* $\lambda = 0$.

У випадку рівнянь $\pm$МКдФ, sin-Гордон тор Ліувілля компактний (за виключенням сепаратриси). Якщо для цього випадку у формулах (44) та (48) зробити заміну $\lambda_k \to \varphi_k$ згідно формули (33), то лінійні форми η і ξ будуть мати вигляд:

$$\eta = \sum_{k=1}^{N+1}J_k^{+MKdV}d\varphi_k, \quad \xi = \sum_{k=1}^{N+1}J_k^{SG}d\varphi_k$$

Оскільки довжина a-циклів нормована, то

$$J_k^{+MKdV} = \oint_{a_k}P(\lambda)d\lambda, \quad J_k^{SG} = \oint_{a_k}Q(\lambda)d\lambda.$$

Ці формули дають вирази для змінних "дія" в скінченнозонному секторі рівнянь +МКдФ та sin-Гордон відповідно.

5. *Висновки*

Викладена вище схема скінченнозонного інтегрування та побудови змінних "дія" відрізняється від інших відомих схем [1-5,10,11,25] тим, що дозволяє розглядати рівняння sin-Гордон, $\pm$МКдФ, КдФ та Ліувілля одночасно, встановлюючи при цьому різноманітні зв'язки між ними. Це важливо для розвитку змістовної теорії збурень та інтегрування рівнянь зі змінними параметрами.

Побудовані канонічні координати λ_k, P_k (або λ_k, Q_k) дозволяють канонічно проквашувати скінченнозонний сектор нелінійного рівняння в частинних похідних. Окрім того, оскільки скінченнозонний фазовий простір є орбітою і на ньому однорідно діє скінченновимірна група Лі, то можна розвивати теорію геометричного квантування. Якщо бодай один з гамільтоніанів h_ν, $\nu = -1, 0, \ldots,$ 2iV + 1 , має фізичний сенс (а це так для $N = 0, 1, 2$), то квантова теорія в скінченнозонному секторі є цікавою з фізичної точки зору.

Ця робота підтримана грантами CRDF-UPI-2115 та INTAS-97-1312. Автори висловлюють подяку грантодавцям.

1. Новиков *С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза. I // Функ. ан. и его прил.— 1974.— Т. 8, N 3.- С. 54.
2. *Дубровин Б. А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега // Функ. ан. и его прил.— 1975.— Т. 9, N 3.— С. 41.
3. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега—де Фриза, конечнозонные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук.— 1976.-Т. 31,вып 1.-С. 55.
4. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук.— 1981,— Т. 36, вып 2.— С. 11.
5. *Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B.* Algebra-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations, Springer, Berlin, 1994.

6. *Голод П. И.* Гамильтоновы системы на орбитах аффинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения // Физика многочастичных систем.— 1985.— N 7.— С. 30.
7. *Голод П. И.* Канонические координаты и лагранжианы на орбитах аффинных групп Ли.— Киев, 1983. (Препринт Ин-та теор. физики АН УССР. ИТФ-83-40Р).
8. Голод *П. И.* Скрытая симметрия уравнений Ландау—Лифшица, иерархия высших уравнений и двойственное уравнение для асимметричного кирального поля // Теор. и мат. физ.- 19S7.- Т. 90, N 1.- С. 18.
9. *Holod P., Kisilevich O., Kondratyuk S.* On the Orbit Structure for Intergable Equation of Homogeneous and Principal Hierarchies // Preceeding of the Second Integnational Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — Kiev.- 1997.-P. 343.
10. *Итс А. Р., Котляров В. П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР.— 1976.-N П.-С. 965.
11. *Козел В. А., Котляров В. П.* Почти периодические решения уравнения *utt* — u_{xx} + sin *u* = 0 // Докл. АН УССР— 1976.-N 10.-С. 878.
12. *Голод П. И., Прикарпатский А. К.* Классические решения двумерной модели Тирринга с периодическими начальными условиями // Препринт ИТФ-78-18Р.— Киев.— 1978.
13. *Прессли* Э., *Сигал Г.* Группы петель.— М.: Мир, 1990.
14. *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли.— М.: Мир, 1993.
15. Теория солитонов: Метод обратной задачи // *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Под ред. Новикова С. П.- М.: Наука, 1980.
16. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях.— М.: Мир, 1988.
17. Веселов *А. П., Новиков С. П.* Скобки Пуассона и комплексные торы // Тр. Мат. ин-та АН *СССР.- 1984.*- Т. 165.- С. 49.
18. *McKean Ή. P., van Moerbeke P. The* spectrum of Hill's equation // Inv. Math., 1975, Vol. 30, N 3, P. 217.
19. *Бухштабер В. М., Лейкин Д. В., Энольский В. 3.* Рациональные аналоги абелевых функций // Функ. ан. и его прил.— 1999.- Т. 33, вып 2.- С. 1.
20. *Белоколос Е. Д., Энольский В. 3.* Классификация нелинейных волн в Джозефсоновских контактах // Физика многочастичных систем.— 1982.— N 2.— С. 3.
21. *Дубровин Б. А.,* Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения Sine-Gordon // Функ. ан. и его прил.— 1982.- Т. 16, вып 1.- С. 27.
22. *Ercolani N., Forest M.* The geometry of real sine-Gordon Wavetrains // Comm. Math. Phys, 1985, Vol. 99, N 1, P. 1.
23. Арнольд *И. В.* Математические методы классической механики.— М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит-ры, 1979.
24. *Flaschka H., McLaughlin D. W.* Canonically Conjugate Variables for the Korteweg-de Vries Equation and the Toda Lattice with Periodic Boundary Conditions // Prog. Theor. Phys., 1976, Vol. 55, N 2, P. 438.
25. *Alber M. S., Marsden J. E, On* Geometric Phases for Soliton Equations // Commun. Math. Phys., 1992, Vol. 149, P. 217.

Bernatska J. N., Holod P. I.

CANONIC COORDINATES OF SOLITON TYPE NONLINEAR EQUATIONS IN FINITE GAP SECTOR

We consider finite gap sector of nonlinear integrable equations: ±MKdV, sin(sh)-Gordon, KdV and Liouville. The hamiltonian systems are shown to appear naturally as systems on affine algebras (loop algebras) orbits. The integrating scheme for them is presented. MKdV and sin-Gordon equations fase space simplectic structure is explored and caconic coordinates "action—angle" are built.