

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**ДРОБОВЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ У ФІНАНСОВІЙ
МАТЕМАТИЦІ**»

Виконала: студентка 4-го року
навчання,
напряму підготовки
113 Прикладна математика

Зубріцька Дар'я Євгенівна
Керівник Щестюк Н.Ю.,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«____» _____ 20____ р.

Київ – 2023

ЗМІСТ

	Ст.
ВСТУП	4
Розділ 1. Підходи до дробового числення	7
1.1. Історія та інтерпретація дробового числення	7
1.2. Гамма-функція.	8
1.3. Хронологія підходів	10
1.4. Підхід Рімана-Ліувілля.	14
1.5. Ілюстрація підходів дробового числення до деяких функцій	17
1.6. Висновки розділу 1	27
Розділ 2. Використання дробового числення у фінансовій математиці	28
2.1. Сфери використання дробового числення	28
2.2. Використання формули Рімана-Ліувілля для опису субдифузії	30
2.3. Справедливі ціни у субдифузійній моделі Блека-Шоулза . .	35
2.4. Висновки розділу 2	37
Розділ 3. Ілюстрація застосування дробового числення для фінансових даних	39
3.1. Збір даних і обчислення параметрів моделі	39
3.2. Обчислення справедливої ціни опціонів колл	46
3.3. Висновки розділу 3	51
Висновки	52
Список літератури	55

Додаток А. Код програми 57

ВСТУП

Диференціювання та інтегрування є фундаментальними поняттями в математиці, які інтенсивно вивчалися протягом століть. Вони є життєво важливими інструментами в багатьох галузях, включаючи фізику, інженерію, економіку та статистику. У своїй найпростішій формі диференціювання передбачає обчислення нахилу функції в заданій точці, тоді як інтегрування передбачає знаходження площі під кривою. Ці поняття добре відомі і були ретельно вивчені протягом багатьох років, що призвело до чітких і відомих результатів, які широко використовуються в найрізноманітніших галузях. Наприклад, перша похідна функції показує зміну знаку результату функції, що корисно при визначенні критичних точок функції. Аналогічно, перший інтеграл функції дає нам можливість ефективно обчислити площу під лінією графіка, що корисно для знаходження загального значення функції в заданому діапазоні.

Цікавим є питання про існування диференціювання та інтегрування для дробового порядку, так званого дробового числення. Історію дробового числення можна простежити від робіт Ейлера та Лапласа у 18 столітті. Пізніше інші видатні математики, такі як Капуто, Ліувілль та Ріман, також зробили значний внесок у цю галузь. За останні кілька десятиліть цей розділ математичного аналізу привернув до себе увагу завдяки своєму значному потенціалу для застосування в різних галузях включаючи фізику, інженерію, фінанси та біологію. Основна ідея дробового числення полягає в тому, щоб поширити поняття диференціювання та інтегрування на функції з нецілими порядками. Це дозволяє точніше описувати складні явища, такі як аномальна дифузія [11], в'язкопружність [14] та фрактальна поведінка [15].

Незважаючи на потенційні застосування дробового числення, його нечасто викладають у базовій освіті. Тому важливо визначити, чи варто вивчати цей розділ математики, а також зрозуміти методи, які використовуються для його обчислення, їх точність і зручність в обчисленнях. Крім того, яскравий приклад його використання

може допомогти проілюструвати важливість дробового числення і дати уявлення про його потенційні застосування.

Тому метою даної роботи є вивчення підходів до дробового числення, їх ілюстрація шляхом візуалізації результатів мовою програмування Python, дослідження сфер застосування даного розділу математичного аналізу, а також аналіз прикладу використання зі сфери фінансової математики. Досягненням цієї мети дане дослідження покликане заповнити прогалину в існуючій літературі з даної теми та забезпечити краще розуміння потенціалу дробових обчислень у фінансовій математиці.

Мета роботи зумовила наступне наукове завдання:

1. Проілюструвати та візуалізувати підходи до дробового числення Ейлера, Рімана-Ліувілля та Капуто для деяких функцій.
2. Розглянути застосування дробової похідної Рімана-Ліувілля для опису субдифузійних процесів у фінансовій сфері.
3. Зробити висновки щодо цінності дробового числення як окремої сфери дослідження на основі проведеної роботи.

Робота складається з трьох розділів.

Перший розділ присвячено вивченню різних підходів до дробового числення. Зокрема, в цьому розділі розглядається підхід Рімана-Ліувілля який широко використовуються в галузі дробового числення. Крім того, обговорюється гамма-функція як ключовий компонент обчислень, пов'язаних з дробовим численням.

Для кращого засвоєння цих понять наведено приклади розв'язування задач різними методами, а також їх візуалізацію. Зокрема, у цьому розділі висвітлено використання бібліотек та готових формул для обчислення дробових чисел у Python. Також детально розглядається питання правильного вибору підходів, виходячи з характеру поставленої задачі.

У другому розділі статті розглядаються різноманітні застосування дробових обчислень, з особливим акцентом на галузі фінансової математики. Підкреслюється важливість дробового числення в цій галузі, а також його актуальність для розв'язання складних задач у фінансовому моделюванні. Поглиблено досліджено дифузійні та субдифузійні процеси та проаналізовано різницю між їх застосуваннями.

У третьому розділі роботи наведено практичний приклад застосування субдифузійної моделі з застосуванням дробової похідної Рімана-Ліувілля [10] до реальних фінансових даних. Результати цього аналізу порівнюється з дифузійним методом, а код, написаний мовою Python, детально аналізується, щоб забезпечити чітке розуміння основних процесів.

РОЗДІЛ 1. ПІДХОДИ ДО ДРОБОВОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Історія та інтерпретація дробового числення

Загально вважається, що днем народження дробового числення є 30 вересня 1695 року, коли Лопіталь написав листа Лейбніцу, питаючи про запис, що він використовував у своїх публікаціях для n -ої похідної лінійної функції $f(x) = x$. Лопіталь поставив питання: що буде, якщо $n = 1/2$. [12] На той час це питання стало дослідженням, що призначалося для найвидатніших умів того часу. Наприклад, Фур'є, Лаплас, Ейлер – були одними з багатьох математиків, що розробили та записали власне бачення вирішення даного питання. Найвідомішими та найпопулярнішими у світі дробового числення виявилися означення Рімана-Ліувілля та Грюнвальда-Летнікова.

Означення Рімана-Ліувілля перетерпіло вже декілька змін та переформулювань. Так, Капуто переформулював класичне визначення дробової похідної Рімана-Ліувілля для розв'язання диференціальних рівнянь дробового порядку, використовуючи початкові умови цілого порядку.

У 1996 році Колованкар також переформулював дробову похідну Рімана-Ліувілля для використання її у диференціюванні фрактальних функцій.

Дробове числення є розширенням традиційних цілочисельних інтегрування та диференціювання. Таким же чином дробові експоненти є розширенням цілочисельних експонент.

У цілочисельного числення є чіткі та широко відомі фізична та геометрична інтерпретації. Так, наприклад, геометричне значення похідної першого порядку в деякій точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіку функції у точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутівому коефіцієнту цієї дотичної.

У випадку ж диференціювання та інтегрування довільного порядку на протязі майже 300 років не існувало чітких геометричної та фізичної інтерпретацій. З часом все ж таки

інтерпретації було знайдено. У [13] геометричною інтерпретацією є так звані «тіні на стінах», а фізичною – «тіні минулого».

Наведемо пояснення того, у чому саме полягають ці інтерпретації.

Наприклад, геометрична інтерпретація дробового інтегрування полягає у доданні третього виміру до стандартної пари $\tau, f(\tau)$. Якщо τ – час, то доданий вимір можна назвати «деформованим» масштабом часу.

Фізична чи механічна ж інтерпретація дробового числення полягає у використанні двох видів часу у розрахунках: космічного та індивідуального.

Оскільки дана робота присвячена більше математичній стороні питання, то варто розписати трохи детальніше про саме «тіні на стінах».

Геометрична інтерпретація дробового інтегралу полягає у відображенні так званого «паркану» на двох стінах, як зрозуміло з даного речення, дробове числення надає третій вимір для аналізу функції. Разом з «парканом», чия форма міняється відповідно до зміни часу t від 0 до b , змінюються також і його відтінки на стінах, що представляють собою правосторонній дробовий інтеграл Рімана-Ліувілля та класичний інтеграл з рухомою нижньою межею. [13]

Для подальших розуміння та роботи із дробовим численням дуже важливими є такі математичні визначення: Гамма-функція, Бета функція, перетворення Лапласа та функція Міттага-Леффера.

Однак у цій роботі ми розглянемо лише Гамма-функцію.

1.2. Гамма-функція

Гамма-функція дуже тісно пов'язана із дробовим численням і зустрічається у більшій частині різноманітних підходів до даної проблеми. Наприклад, відомий у сфері підхід Рімана-Ліувілля містить як у інтегруванні так і у диференціюванні Гамма-функцію як один з основних елементів при розрахунку.

Оскільки дана робота буде звертатися у своїй більшості саме до визначення Рімана-Ліувілля, необхідно визначити чим саме є Гамма-функція, що вона собою являє та які властивості має.

Найпростішою інтерпретацією даної функції є узагальненням факторіалу усіх дійсних чисел. Означення Гамма-функції наступне:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \text{ для усіх } z \in \mathbb{R}$$

Гамма-функція виділяється більшою частиною завдяки своїм властивостям:

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(z) &= (z - 1)!, \text{ коли } z \in \mathbb{N}_+, \end{aligned} \quad (1)$$

По-перше, значення Гамма-функції від числа $z + 1$, буде рівним добутку z та $\Gamma(z)$. По-друге, коли $z \in \mathbb{N}_+$, то значення Гамма-функції від z буде рівним факторіалу від $(z - 1)$.

Друга властивість виходить із першої властивості та того, що $\Gamma(1) = 1$, за допомогою прямого розрахунку ми і виводимо зв'язок Гамма-функції та факторіалу.

$$\Gamma(n) = (n - 1)\Gamma(n - 1) = (n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) = \dots = (n - 1)!\Gamma(1) = (n - 1)!$$

На малюнку 1.1 графічно зображено графік даної функції у нулі та його околі. Отримати даний графік можливо за допомогою інтегрування частинами. Також варто відмітити, що при від'ємних цілих значеннях Гамма-функція прямує до безкінечності, тоді як при нецілих значеннях вона є визначеною.

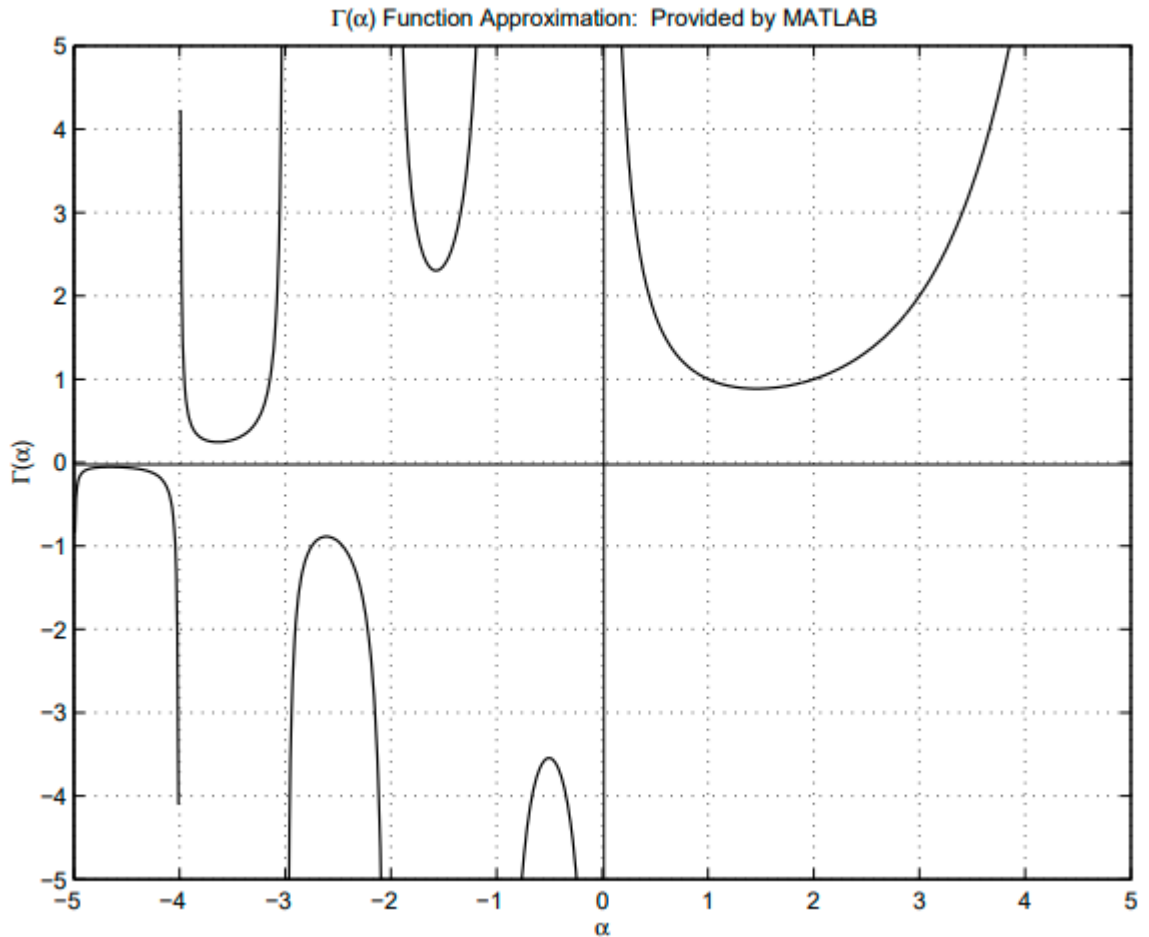


Рисунок 1.1 – Наближення Гамма-функції за допомогою MATLAB.

1.3. Хронологія підходів

У даному підрозділі будуть наведені різноманітні підходи до розв'язання питання дробового числення у порядку хронології їх виникнення.

У 1730 році Ейлер запропонував узагальнення для такої формули:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n}$$

За допомогою властивостей Гамма-функції (1):

$$\Gamma(m+1) = m(m-1) \dots (m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

він отримано наступну формулу:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

Данна формула дуже корисна та легка у використанні для розрахунку дробових диференціалів функцій вигляду $f(x) = x^a$, де $a \in \mathbb{R}$. [12]

У період з 1820 по 1822 роки Фур'є запропонував ще один підхід до вирішення питання дробового числення.

За допомогою інтегральної репрезентації було записано таке означення:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(px - pz + \frac{n\pi}{2}\right) dp$$

У період з 1823 по 1826 з'явився підхід запропонований Абелем. Він вирішив вважати α в інтегралі $\int_0^x \frac{s'(\eta) d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \psi(x)$ довільним [12]:

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \psi(x)}{dx^{-\alpha}}$$

У період з 1832 по 1855 роки Ліувільль запропонував цілих три визначення.

У першому визначенні, використовуючи експоненційну репрезентацію функції

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \text{ він узагальнив формулу } \frac{d^m e^{ax}}{dx^n} = a^m e^{ax}:$$

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}$$

Другим його визначенням є дробовий інтеграл [12]:

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(x + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \Phi(x - \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

Замінивши $x + \alpha$ та $x - \alpha$ на τ у формулах вище було отримано наступні формули:

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} \Phi(\tau) (\tau - x)^{\mu-1} d\tau$$

$$\int^{\mu} \Phi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} \Phi(\tau) (x - \tau)^{\mu-1} d\tau$$

Третім визначенням став дробовий диференціал:

$$\frac{d^{\mu} F(x)}{dx^{\mu}} = \frac{(-1)^{\mu}}{h^{\mu}} \left(F(x) \frac{\mu}{1} F(x+h) + + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x+2h) - \dots \right)$$

$$\frac{d^{\mu} F(x)}{dx^{\mu}} = \frac{1^{\mu}}{h^{\mu}} \left(F(x) \frac{\mu}{1} F(x-h) + + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} F(x-2h) - \dots \right)$$

З 1847 по 1876 роки Ріман запропонував наступне визначення дробового інтеграла:

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(t)$$

Наступне визначення було вигадане та написано декількома математиками: Сонін, Летніков, Лорен, Некрасов, Нішімото. [12]

Вони вирішили узяти за основу інтегральну формулу Коші.

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

І після заміни n на ν формула змінюється на:

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\nu+1}} dt$$

Визначення Рімана-Ліувілля є одним із двох найвідоміших у сфері дробового числення, воно являє собою поєднання попередніх двох визначень: визначення введеного із інтегральної формули Коші та визначення Рімана.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}$$

У даній формулі n є так званою «стелею» числа α , що значить, що n є найменшим цілим числом більшим за число чиєю стелею воно є, в нашому випадку $n-1 \leq \alpha < n$.

[12]

Наступним відомим об'єднаним визначенням є визначення Грюнвальда-Летнікова.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)$$

Також відомим визначенням є визначення Капуто, створене у 1967 році, і як було зазначено раніше воно є удосконаленням визначення Рімана-Ліувілля для розрахунку фрактальних рівнянь. [12]

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n - 1 \leq \alpha < n)$$

Як зрозуміло з кількості визначень наведених вище та кількості відомих математиків, що запропонували свої напрацювання на цю тему – дробове числення не має єдиного підходу, що був би зручним та універсальним у питанні вирішення задач дробових інтегрування та диференціювання.

В даній роботі будуть використані підходи Ейлера та Капуто для наведення прикладів розрахунку, а також Рімана-Ліувілля оскільки він використовується у фінансовій математиці. Саме цей приклад ми і розберемо більш детально, розписавши спосіб вивести його з формули Коші.

1.4. Підхід Рімана-Ліувілля

Підхід Рімана-Ліувілля будується на підході Рімана та за допомогою інтегральної формули Коші.

Використовуючи формулу Коші для повторного інтегрування за параметрами ми можемо декілька разів розрахувати антидериватив α порядку функції, за допомогою чого ми отримаємо наступну формулу:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Як було згадано в іншому підрозділі узагальненням факторіалу є так звана Гамма-функція (1). Отже, для покращення вже отриманої формули ми замінимо даний факторіал на Гамма-функцію, узагальнюючи результат.

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0$$

Дана формула є працюючою формулою для дробового інтегрування. Її називають лівим інтегралом Рімана-Ліувілля. Даний інтеграл вважається однією із найпростіших формул для розуміння у світі дробового числення. Головним зауваженням є те, що α через обмеження Гамма-функції може бути комплексним числом, але обов'язково із цілою більшою за нуль реальною частиною.

Даний інтеграл має наступні важливі залежності:

$$I^\alpha (I^\beta f) = I^{\alpha+\beta} f$$

$$\frac{d}{dx} I^{\alpha+1} f = I^\alpha f$$

На жаль, ми не можемо просто сказати, що диференціал порядку α буде рівним інтегралу порядку $-\alpha$. Через наявність Гамма-функції у формулі лівого інтегралу

Рімана-Ліувілля використання від'ємного порядку є неможливим, а отже це неможливо використати для визначення диференціалу дробового порядку.

Почати перетворення інтеграла у диференціал варто почати з того, що диференціюючи n разів після n разів інтегрування буде рівним самій початковій функції.

$$\frac{d^n}{dt^n} (I^n f(t)) = f(t)$$

Це означає, що похідна є лівооберненою до інтеграла. Однак, інтеграл не є лівооберненим до похідної, тому що інтеграл додає довільну константу. Тобто, в загальному випадку обернена до попередньої властивість є невірною.

За цієї умови нам все ще хотілося б мати можливість визначити диференціювання через операції, що зрозумілі та є можливими. Подібною операцією, що має бажані нами властивості, буде:

$$D^\alpha f = \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} (I^{[\alpha]-\alpha} f)$$

Тут $[\alpha]$ є «стелею» числа α , результат округлення числа до наступного найменшого цілого числа, що є більшим за дане. Розписуючи даний запис більш детально отримаємо:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}},$$

де n – стеля α .

Це ліва дробова похідна Рімана-Ліувілля. Більшість обчислень у дробовому численні є довгими та складними, якщо не зовсім нерозв'язними, якщо їх виконувати вручну без допомоги комп'ютера. Окремий же випадок $\alpha = 1/2$ називається напівпохідною. Її

використання буде проілюстроване в наступному підрозділі та вона буде застосована у розділі про використання у фінансовій математиці.

1.5. Ілюстрація підходів дробового числення до деяких функцій

У даному підрозділі буде проілюстровано та візуалізовано підходи до дробового числення Ейлера, Рімана-Ліувілля та Капуто для деяких функцій.

а) Підхід Ейлера.

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad (2)$$

Найпростішим прикладом є така функція:

$$f(x) = 1$$

для якої:

$$\frac{d^\alpha 1}{dx^\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

В даному випадку ми підставляємо $m = 0$, $n = \alpha$, де α – порядок диференціювання, до формули (2).

За допомогою Python візуалізуємо графіки диференціалів функції $f(x) = 1$ для таких порядків: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$.

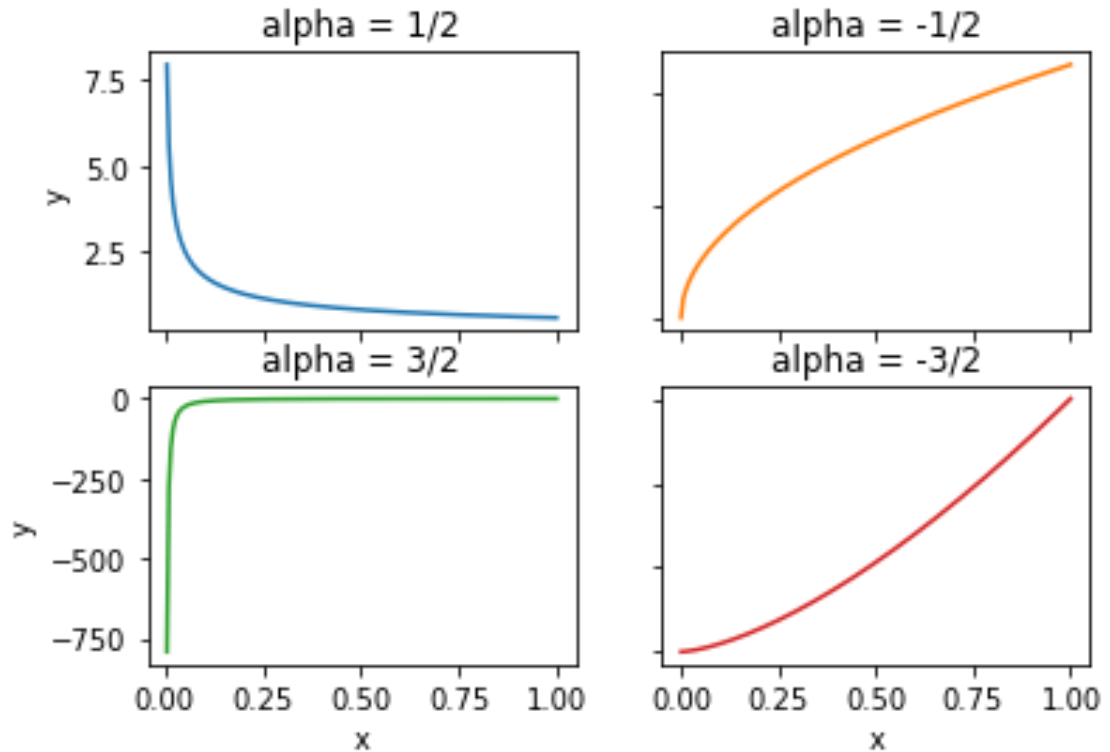


Рисунок 1.2 – Графічне зображення дробових диференціалів функції $f(x) = 1$, використовуючи формулу (2), на Python.

Для того, щоб отримати рисунок 1.2 було використано бібліотеку `matplotlib`, для обчислення результату Гамма-функції було використано метод `gamma()`, що повертає значення функції в залежності від вхідного x .

Вирішимо ще один приклад для формули Ейлера, в даному випадку функція має такий вигляд:

$$f(x) = x$$

Повторимо кроки описані вище. У формулі (2) ми зробимо такі заміни: $m = 1, n = \alpha$, де α , знову ж таки, порядок диференціювання.

Після виконання даних кроків ми отримаємо таку функцію:

$$\frac{d^\alpha x}{dx^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

Знову використовуючи Python та його бібліотеку matplotlib та метод gamma() обрахуємо та виведемо графіки диференціалів даної функції порядків: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

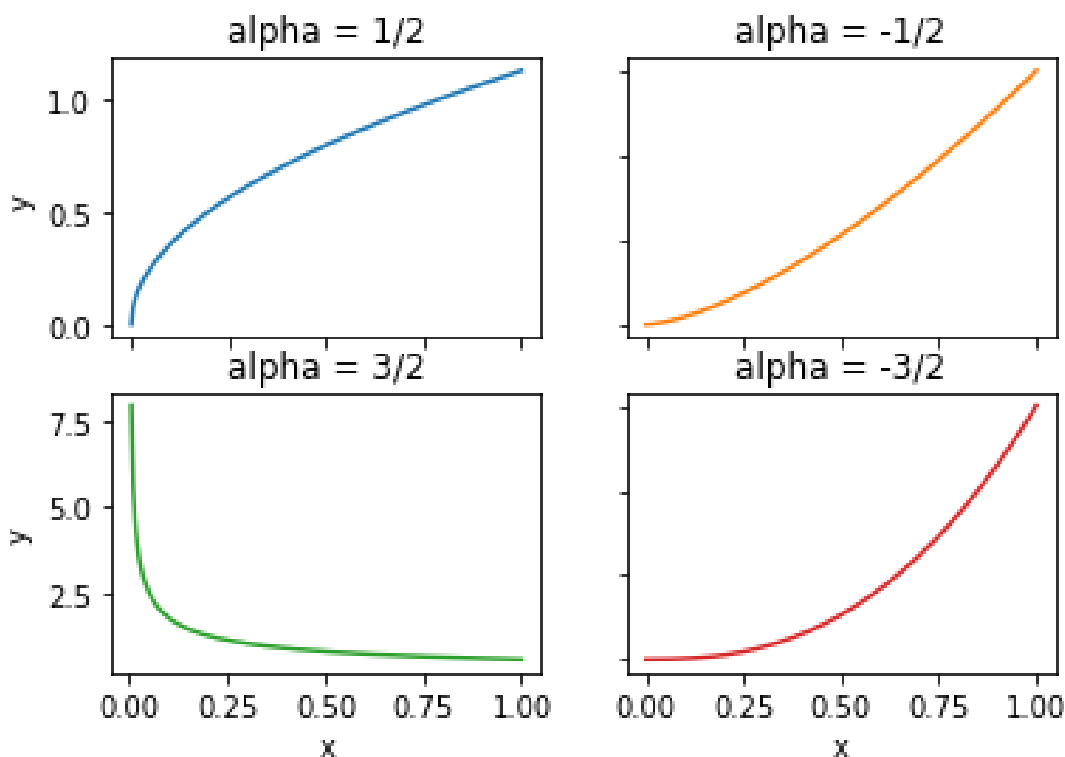


Рисунок 1.3 – Графічне зображення дробових диференціалів функції $f(x) = x$, використовуючи формулу (2), на Python.

Як видно із попередніх прикладів, підхід Ейлера дуже зручно використовувати для розрахунку дробових диференціалів від функцій виду:

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Q}$$

Аналізуючи графіки похідних функцій наведених на малюнках 1.2 та 1.3 можна зробити наступний висновок: немає єдиного закону за яким будуються дані функції. Так

можна відмітити, що для $\alpha = 3/2$ $f(x) = 1$ буде монотонною та строго зростаючою, а для $f(x) = x$ дробовий диференціал дасть нам монотонну строго спадаючу функцію. І так само для $\alpha = 1/2$ для $f(x) = 1$ функція є строго спадною, а для $f(x) = x$ – строго спадаючою. Тоді як для інших двох α подібної динаміки не спостерігається.

б) Підхід Капуто

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n - 1 \leq \alpha < n)$$

На перший погляд подібний підхід є надмірно складним та вимагає забагато розрахунків. Але відповідно до теорії 5 Марії Іштева [8] диференціал експоненційної функції вигляду:

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

Після ряду перетворень має наступний вигляд:

$$\frac{d^\alpha e^{\lambda x}}{dx^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \lambda^n x^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}, \quad (3)$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $n - 1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведення даної теореми наведене нижче будується на узагальненій функції Мітгага-Лефлера для двох параметрів:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

теоремі 2 з [8]:

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0), \quad t > 0, \alpha \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n$$

та одному відомому факті:

$$D^\alpha e^{\lambda t} = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$$

Доведення теореми виглядає так:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha e^{\lambda t} &= D^\alpha e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (e^{\lambda t})^{(k)}(0) = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \lambda^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+2-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n+1-\alpha)} = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1} \end{aligned}$$

Тим самим ми отримуємо формулу (3).

Вже за допомогою даної формули ми можемо розписати рішення для декількох прикладів.

Почнемо з функції вигляду:

$$f(x) = e^x$$

Використаємо формулу (3) та отримаємо:

$$\frac{d^\alpha e^x}{dx^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n+1-\alpha)}$$

За допомогою WolframAlpha візуалізуємо графіки диференціалів порядків:

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}.$$

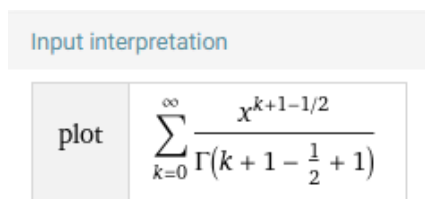


Рисунок 1.4 – Інтерпретація одного з введів функції у WolframAlpha.

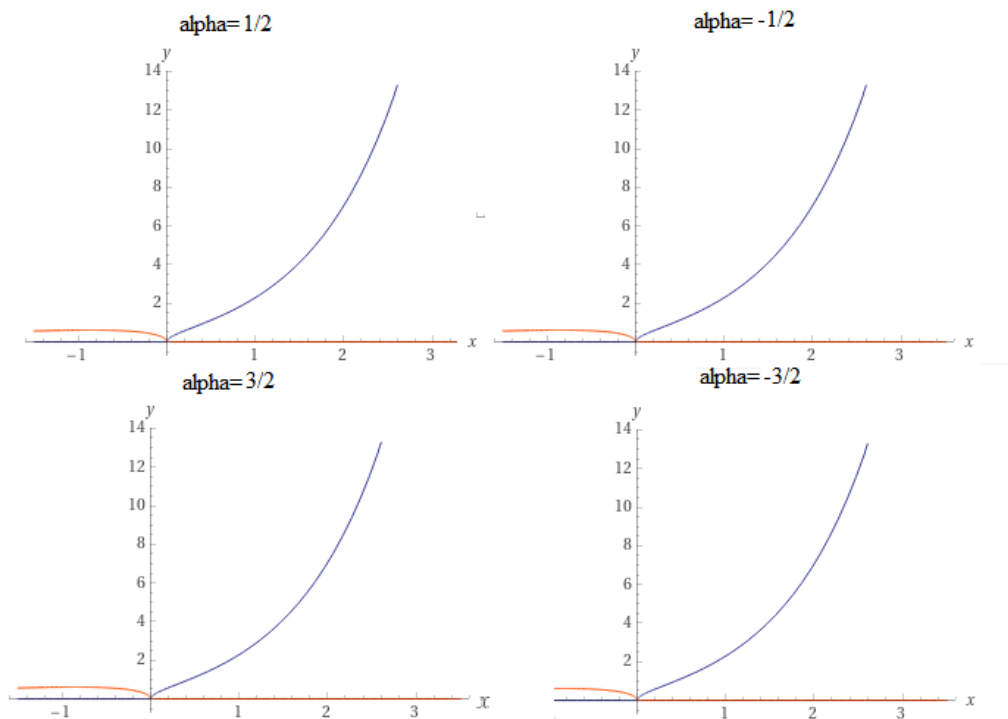


Рисунок 1.5 – Графічне зображення дробових диференціалів функції $f(x) = e^x$, використовуючи формулу (3), за допомогою WolframAlpha.

Наступним прикладом розглянемо функцію:

$$f(x) = e^{2x}$$

Використавши формулу (3) ми отримаємо таку функцію диференціала:

$$\frac{d^\alpha e^{2x}}{dx^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+n} x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n+1-\alpha)}$$

За допомогою WolframAlpha візуалізуємо графіки диференціалів порядків:

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}.$$

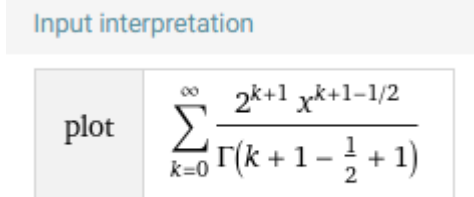


Рисунок 1.6 – Інтерпретація одного з введів функції у WolframAlpha.

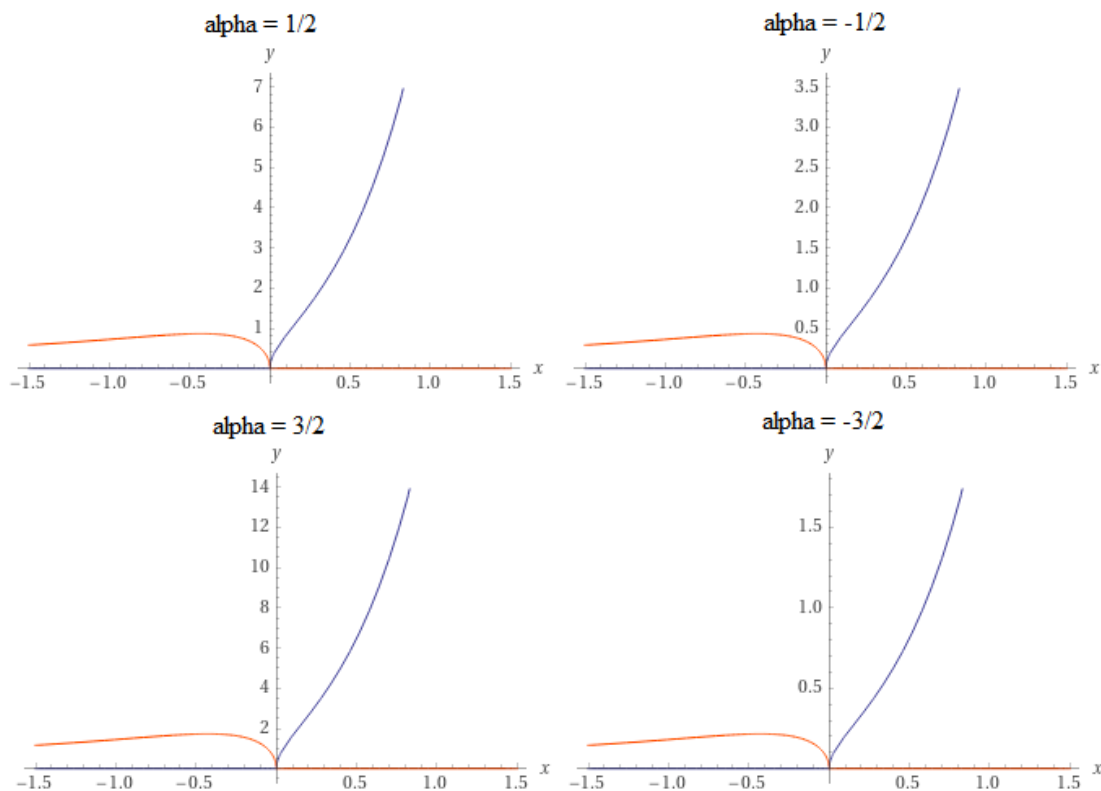


Рисунок 1.7 – Графічне зображення дробових диференціалів функції $f(x) = e^{2x}$, використовуючи формулу (3), на WolframAlpha.

Аналізуючи графіки похідних функцій наведених на малюнках 1.5 та 1.7 можна зробити наступний висновок: дані функції мають чітку закономірність. Можна відмітити, що на обох малюнках графіки за своєю поведінкою відповідають поведінці цілого диференціалу для функцій виду $f(x) = e^{nx}$. Так ми бачимо, що від зміни α змінюється значення у точки перетину графіків із віссю ординат. Сама динаміка зростання графіків також має єдину закономірність, що відповідає цілому численню.

в) Підхід Рімана-Ліувілля.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} \quad (4)$$

Застосування формули Рімана-Ліувілля вимагає методів наближеного обчислення які є окремою складною задачею, тому для ілюстрації буде використана бібліотека `differint` на Python. Важливо також відмітити, що дана бібліотека має дуже великі обмеження.

Дана бібліотека містить у собі методи для розрахунку двох підходів: Рімана-Ліувілля та Грюнвальда-Летнікова.

Main Function	Usage
GLpoint	Computes the GL differintegral at a point
GL	Computes the GL differintegral over an entire array of function values using the Fast Fourier Transform
GLI	Computes the improved GL differintegral over an entire array of function values
RLpoint	Computes the RL differintegral at a point
RL	Computes the RL differintegral over an entire array of function values using matrix methods

Рисунок 1.8 – Набір функцій та їх функціонал бібліотеки `differint`.

Використовуючи дану бібліотеку наведемо приклад для тригонометричної функції:

$$f(x) = \sin(x)$$

Використаємо функцію `RL()` для розрахунку диференціалів порядків: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$. Та візуалізуємо результати за допомогою бібліотеки `matplotlib`:

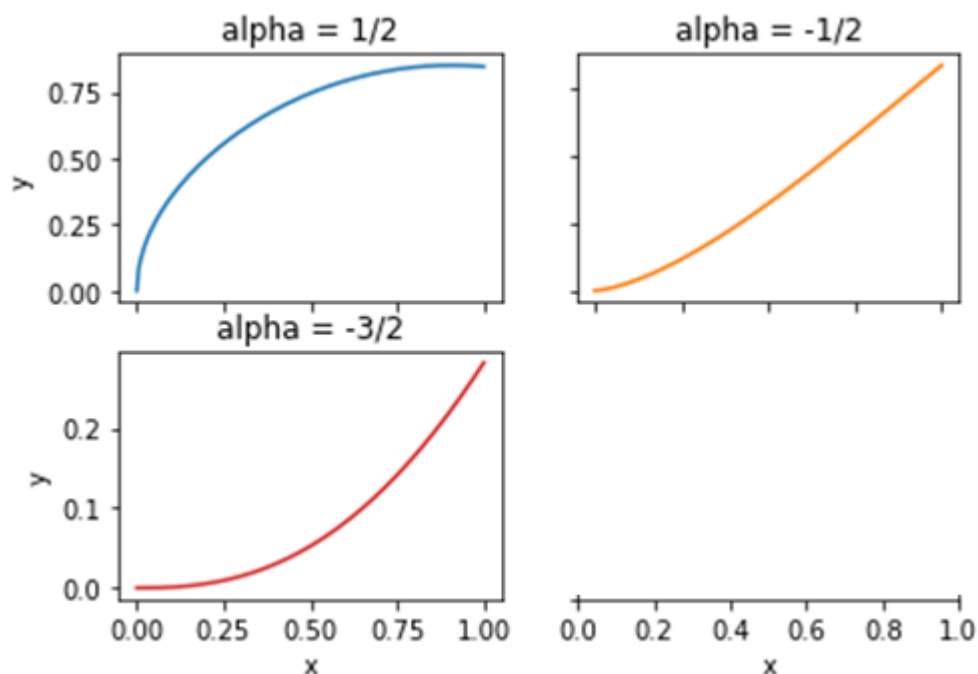


Рисунок 1.9 – Графічне зображення дробових диференціалів функції $f(x) = \sin(x)$, використовуючи підхід (4), за допомогою бібліотеки `differint` на Python.

Аналізуючи графіки на малюнку 1.9 можна відмітити лише монотонність кожної з отриманих функцій, що на ньому зображені. Так для усіх трьох використаних значень α функції є зростаючими. Але не можна відмітити якоїсь єдиної поведінки, що була б залежна від порядку диференціювання та відповідала б поведінці функції $f(x) = \sin(x)$ за цілого числення.

1.6. Висновки розділу 1

У першому розділі було розглянуто багато інформації щодо дробового числення: його історію та суть, підходи до вирішення його задач, було наведено декілька прикладів на простих функціях. Також був більш детально розглянутий підхід Рімана-Ліувілля через його цінність для другого розділу. Історія дробового числення є достатньо давньою. А її інтерпретації полягають більшістю у дослідженні так званого

«деформованого часу». Дробове числення додає третій вимір, що дозволяє висліджувати індивідуальний час на рівні з космічним або, як його ще називають, календарним часом. За таку довгу історію очевидно, що виникла неймовірна кількість підходів, кожен з яких має своє використання та цінність. Але варто виділити найперший підхід – підхід Ейлера, найвідоміший підхід – об'єднане визначення Рімана-Ліувілля та його удосконалення у вигляді підходу Капуто.

За допомогою цих підходів були проілюстровані приклади того як різні підходи використовуються для роботи із різними видами функцій. Наприклад, для деяких ситуацій є можливим підставляти конкретні значення у функції і отримувати аналітичні вирази для степеневих функцій, поведінку яких було проілюстровано за допомогою Python.

Підхід Капуто вимагає методів наближеного обчислення і за допомогою статті [8] це було проілюстровано на прикладі експоненційної функції. Підхід Рімана-Ліувілля також вимагає методів наближеного обчислення і за допомогою вбудованих методів Python було проілюстровано функцію $f(x) = \sin(x)$.

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ ДРОБОВОГО ЧИСЛЕННЯ У ФІНАНСОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

2.1. Сфери використання

Хоча тема дробового числення не є дуже популярною або достатньо легкою для розуміння та розрахунку, але у наш час вже має достатньо багато сфер використання та дослідження.

Ці сфери є дуже глибокими та спеціалізованими. Тому у даному підрозділі буде наведено декілька таких прикладів.

1. Таутохронна задача.

Першим прикладом використання дробового числення в математиці стало рішення інтегрального рівняння, яке було виведено Абелем у ході вирішення таутохронної задачі. Ця задача присвячена визначенню форми плоскої кривої без тертя, що проходить через початок координат у вертикальній площині, по якій може впасти частинка масою m за час, що не залежить від початкового положення.

У ході рішення Абель прийшов до формули наступного виду:

$$\sqrt{2g}T = \int_0^{\eta} (\eta - y)^{-\frac{1}{2}} f'(y) dy,$$

де g – гравітаційне прискорення, (ξ, η) – початкова позиція та $f(y)$ – рівняння кривої спуску. Як виявилось дана формула еквівалентна до наступної:

$$T\sqrt{2g} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_0D_{\eta}^{-\frac{1}{2}} f'(\eta)$$

Де, як ми бачимо присутній дробовий диференціал.

2. Поширення ультразвукових хвиль у губчастій кістці людини.

У медицині дробове числення використовується для опису в'язкої взаємодії між рідинами та твердими тілами. За допомогою дробового числення вчені отримують теоретичні дані, які потім можуть використовувати для порівняння із даними отриманими з практичних дослідів.[2]

3. Моделювання голосових сигналів.

У цій сфері використання дробового числення було представлено як новітній підхід у протиставленні до дуже популярного Лінійного Предиктивного Кодування(LPC). Було продемонстровано декількома симуляціями, що, використовуючи декілька інтегралів дробового порядку як базисних функцій, можна отримати дуже точну модель мовних сигналів.[3]

4. Поширення звукових хвиль у жорстких пористих матеріалах.

Спостереження, що асимптотичні вирази жорсткості та демпфування в пористих матеріалах пропорційні дробовим степеням частоти. Це вказує на те, що дробові диференціали за часом можуть описувати поведінку звукових хвиль у таких матеріалах.[5]

5. Теорія в'язкопружності.

У теорії в'язкопружності перевага використання дробового числення полягає у можливості отримати визначальні рівняння для пружного комплексного модуля в'язкопружних матеріалів з кількома експериментально визначеними параметрами.[14]

6. Виявлення країв.

При обробці зображень, щоб знайти краї, дуже часто використовують похідні цілочисельного порядку, наприклад, 1-го та 2-го. Однак введення крайового детектора на основі дробового диференціювання може покращити критерій тонкого виявлення, або селективності виявлення у випадку параболічних переходів яскравості, а також критерій завадостійкості, який можна інтерпретувати в термінах завадостійкості до шуму в загальному випадку.[6]

7. Механіки рідини.

Застосування дробового числення до класичного рівняння в'язкої дифузії в напівнескінченному просторі дає явні аналітичні розв'язки для зсувного напруження і швидкості рідини в будь-якій точці області. Дослідники порівнюючи дробові результати для граничного напруження зсуву та швидкості рідини з вже існуючими аналітичними результатами для першої та другої задач Стокса, отримали підтвердження, що використання дробового числення є набагато простішим та потужнішим методом, ніж вже існуючі.[9]

8. Фінансова математика

Останньою у нашому списку, але не останньою по важливості сферою використання дробового числення є фінансова математика. Саме про неї буде розказано більше детально у наступних підрозділах.

2.2. Використання формули Рімана-Ліувілля для опису субдифузії

Перше ніж описувати субдифузійну модель зупинимося на класичній дифузійній.

Звичайна дифузійна модель побудована на так званому Броунівському русі. Даний взаємозв'язок був встановлений у 1900 році, коли Башельє запропонував його модель ціни активів, що будувалася на саме арифметичному Броунівському русі, також відомому як АВМ(Arithmetic Brownian Motion). Згодом же вона була удосконалена у відомій та дуже розповсюдженій моделі Блека-Шоулза. У ній вже був використаний геометричний Броунівський рух, GBM(Geometric Brownian Motion).

$$Z(t) = Z_0 e^{\sigma B(t) + \mu t}, \quad Z_0 > 0$$

де $B(t)$ – Броунівський рух, $\sigma > 0$ – волатильність, а $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр дрефту.

Дана формула є розв'язком наступного стохастичного рівняння:

$$dZ(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Z(t)dt + \sigma Z(t)dB(t), \quad Z(0) = Z_0$$

Альтернативним описом є рівняння Фокера-Планка, яке описує ймовірнісну щільність процесу $Z(t)$:

$$\frac{df(x, \tau)}{d\tau} = - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 f(x, \tau), \quad (5)$$

Тут f – Probability Density Function(PDF) для процесу $Z(t)$, $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ – часткові похідні.

Причиною популярності даної моделі є її продвинутий математичний апарат, який дозволяє досліджувати найрізноманітніші її параметри. Але все-таки є одна конкретна сфера у якій дана модель стала майже незамінною – Європейський ринок опціонів.

За допомогою моделі Блека-Шоулза розраховуються ціни опціонів та стратегії хеджування. А найголовнішою частиною даної моделі є відповідна формула, що дозволяє розрахувати вартість Європейських опціонів колл та пут.

Європейські опціони описують фінансовий контракт між покупцем та продавцем. Колл описує контракт за яким покупець має право, але не є зобов'язаним, придбати опціон $Z(t)$ за вказаною страйковою ціною K за певний час виконання T . Покупець сплачує невеликий зalog, який і надає йому описане вище право. Опціон пут у свою чергу працює протилежно, він надає тримачу акцій можливість продавати їх.

Відносини між цінами опціону пут P та опціону колл C , коли обидва мають однакові страйкову ціну та час виконання задається наступною формулою:

$$C - P = Z_0 - Ke^{-rT}.$$

Тут r – безризикова процентна ставка, що рахується наступним чином:

$$r = \bar{h} + \frac{\sigma^2}{2}$$

Де \bar{h} – середнє арифметичне від h_n .

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \quad S_n = Z_n$$

$$\sigma = \tilde{\sigma} \sqrt{252}$$

Де $\tilde{\sigma}$ – середнє квадратичне відхилення для h_n .

А отже справедливу ціну для Європейського опціону колл можна розрахувати за наступною формулою:

$$C_{BS}(S_0, K, T, \sigma, r) = S_0 \Phi(d_+) - Ke^{-rT} \Phi(d_-),$$

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_0}{K} \pm \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}},$$

Тут T – час до виконання, K – страйкова ціна, а $\Phi(x)$ – кумулятивна функція розподілу нормального стандартного розподілу.

Модель Блека-Шоулза безсумнівно має безліч переваг і саме тому і використовується майже усюди де є Європейський фінансовий ринок. Але в неї все-одно є один доволі серйозний недолік.

У світлі деяких емпіричних фактів стало очевидно, що дана модель, наскільки б зручною вона не була, не може описати деякі характерні для цін особливості. І однією з таких особливостей є періоди стабільності, або, як їх ще називають, періоди постійних цін. Подібну тенденцію у реальному житті можна спостерігати на ринках, що активно розвиваються та мають малу кількість транзакцій.

А отже з'являється нова проблема: як вдосконалити модель так, щоб вона могла враховувати моменти стабільності цін опціонів?

Відповіддю на дане питання стала субдифузія. Оскільки моменти стабільності ціни подібні у своїй природі до знерухомлення субдифузійної частинки. А отже, ми можемо генералізувати модель Блека-Шоулза наступним чином:

$$Z_{\alpha}(t) = Z(S_{\alpha}(t))t$$

Даний процес називається субдифузійним геометричним Броунівським рухом. $S_{\alpha}(t)$ – інвертований α -стабільний субординатор, який інтерпретує моменти сталості.

$$S_\alpha(t) = \inf \{ \tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t \}$$

Тут $U_\alpha(t)$ – чистий стрибкоподібний процес, який, за допомогою перетворення Лапласа, задається наступною формулою:

$$E(e^{-uU_\alpha(t)}) = e^{-tu^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Для кожного стрибка $U_\alpha(t)$ існує відповідний плоский період для $S_\alpha(t)$. Подібні періоди плоскості представляють собою довгий час очікування за якого субдифузійна частка іммобілізована у «пастці». Відповідно, з наближенням α до 1, $S_\alpha(t)$ буде все сильніше наближатися до так званого «об’єктивного» часу t .

Звідси можна зробити висновок, що за допомогою процесу $Z_\alpha(t)$ відповідно можна утворювати таку модель, що буде відстежувати моменти сталості цін опціонів. На малюнку нижче можна помітити чим відрізняються дифузійний та субдифузійний геометричні Броунівські рухи.

PDF для субдифузійного процесу $Z_\alpha(t)$, який ми можемо описати за допомогою фрактального рівняння Фоккера-Планка.

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} \left[- \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} xw(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 w(x, t) \right], \quad (6)$$

де $w(x, t) = \delta_{Z_0}(x)$, а оператор ${}_0D_t^{1-\alpha}$ є дробовим диференціалом Рімана-Ліувілля (4):

$${}_0D_t^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad 0 < \alpha < 1$$

Ілюстрація застосування даної формули була у розділі 1.

2.3. Справедливі ціни у субдифузійній моделі Блека-Шоулза

Для розрахунку справедливої ціни колл та пут у субдифузійній моделі Блека-Шоулза припустимо на основі теорем 2 та 3 з [10], що ринкова модель побудована на субдифузійному процесі $Z_\alpha(t)$ має наступні дві властивості:

1. Якщо Q – міра ймовірності, визначена наступним чином:

$$Q(A) = \int_A e^{-\gamma B(S_\alpha(T)) - \frac{\gamma^2}{2} S_\alpha(T)} d\mathbb{P}, \quad (7)$$

де $\gamma = \frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$, а $A \in \mathcal{F}$. Тоді процес $(Z_\alpha(t))_{t \in [0, T]}$ є мартингалом відносно Q .

Тоді ринкова модель, що будується на субдифузійному геометричному Броунівському русі, $Z_\alpha(t)$ є безарбітражною. [10]

2. Еквівалентний мартингал Q , визначений в (7), не є єдиним.

Тоді ринкова модель, що будується на субдифузійному геометричному Броунівському русі, $Z_\alpha(t)$ є неповною. [10]

Використовуючи дані властивості тепер можливо утворити формулу для справедливих цін опціонів колл та пут.

Якщо ціна залежить від субдифузійного геометричного Броунівського руху, тоді формула Блека-Шоулза для ціни опціону колл буде наступною:

$$\begin{aligned} C_{BS}^{Sub}(Z_0, K, T, \sigma, \alpha, r) &= E(C_{BS}(Z_0, K, T, \sigma, \alpha, r)) \\ &= \int_0^\infty C_{BS}(Z_0, K, x, \sigma, r) T^{-\alpha} g_\alpha(x/T^\alpha) dx \end{aligned}$$

У даній формулі $g_\alpha(z)$ функція задана в термінах функції Фокса, яка також відповідає нашій субдифузійній PDF у формулі (6).

$$g_\alpha(z) = H_{1,1}^{1,0} \left(z \middle|_{(0,1)}^{(1-\alpha,\alpha)} \right), \quad (8)$$

А функція C_{BS} відповідно формула ціни опціону колл за дифузійною моделлю Блека-Шоулза.

Формула ціни опціону пут для субдифузійної моделі Блека-Шоулза відповідно до відношення між цінами колл та пут наступна:

$$P_{BS}^{Sub}(Z_0, K, T, \sigma, \alpha, r) = C_{BS}^{Sub}(Z_0, K, T, \sigma, \alpha, r) + K - Z_0.$$

Для знаходження справедливих цін у субдифузійній моделі Блека-Шоулза за допомогою описаних вище формул можна оцінити очікувані значення за допомогою методів Монте Карло. Для цього необхідно змоделювати траєкторії оберненого α -стабільного підпорядкованого $S_\alpha(t)$.

Але також для значення $\alpha = 1/2$ можливе апроксимування формули (8) у вигляді:

$$g_{0.5}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

Використовуючи дане наближення ми отримаємо наступну формулу для знаходження субдифузійної справедливої ціни опціону колл:

$$\int_0^\infty C(Z_0, K, x, \sigma) T^{-0.5} g_{0.5}(x/T^{0.5}) dx = \int_0^\infty C(Z_0, K, x, \sigma) T^{-0.5} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4T}} dx$$

2.4. Висновки розділу 2

У цьому розділі було розглянуто використання дробового числення у субдифузійній моделі Блека-Шоулза.

Субдифузія необхідна для відображення динаміки сталої ціни, яка відповідає процесу застрягання субдифузійної частки у «пастці». Через це на графіку змін ціни для субдифузійного процесу можна спостерігати плато на деяких проміжках коли звичайна дифузійна модель зображує на них постійну зміну ціни.

Також, оскільки субдифузійна модель ринку за дифузійну, ми розглянули варіанти методів для розрахунку справедливої ціни опціонів. Основними є методи Монте Карло, але більш детально було розглянуто метод, який підходить для конкретного значення α (в нашому випадку $1/2$). В такому разі ми можемо апроксимувати функцію $g_\alpha(z)$. Що дозволить у наступному розділі навести приклад, маючи не надто складні, вибагливі та часозатратні розрахунки.

РОЗДІЛ 3. ІЛЮСТРАЦІЯ ЗАСТОСУВАННЯ ДРОБОВОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ФІНАНСОВИХ ДАНИХ

3.1. Збір даних і обчислення параметрів моделі

Для розрахунку субдифузійних та дифузійних цін опціонів необхідні наступні дані: кількість днів до кінця строку виконання опціону, страйкова ціна, ціна базового активу, волатильність та процентна ставка.

Більшість цих даних можливо отримати на спеціалізованих онлайн ресурсах. Для наших цілей ми використаємо сайт, що містить та відстежує ринки опціонів різноманітних компаній, Nasdaq.com. Для усіх інших необхідних даних ми використаємо формули та розрахуємо їх на основі сирих історичних даних.

Для аналізу будемо використовувати ринок опціонів NVIDIA Corporation Common Stock (NVDA). Ми візьмемо десять різних проміжків часу для відстеження змін на аналізу впливу введення субдифузії до розрахунку цін опціонів. Для цього дані збиралися на протязі одинадцяти днів, один з яких припадає на неділю, коли ринок не має змін та залишається стабільно рівним.

Для отримання страйкових цін та цін базового активу перейдемо до необхідної сторінки за допомогою меню.

- Dividend History
- Historical Quotes
- Historical NOCP
- Financials
- Earnings
- P/E & PEG Ratios
- Option Chain**
- Short Interest
- Institutional Holdings
- Insider Activity
- SEC Filings
- Revenue EPS

Рисунок 3.1 – Меню з сайту Nasdaq.com, за допомогою якого можна досягнути до необхідних даних з обраним пунктом для доступу до даних про ціни опціонів на кожен день.

На отриманій сторінці ми можемо побачити наступні необхідні нам дані: страйкові ціни (рисунок 3.3), ціна базового активу на сьогоднішній день (рисунок 3.2) та дату виконання опціону (рисунок 3.3).

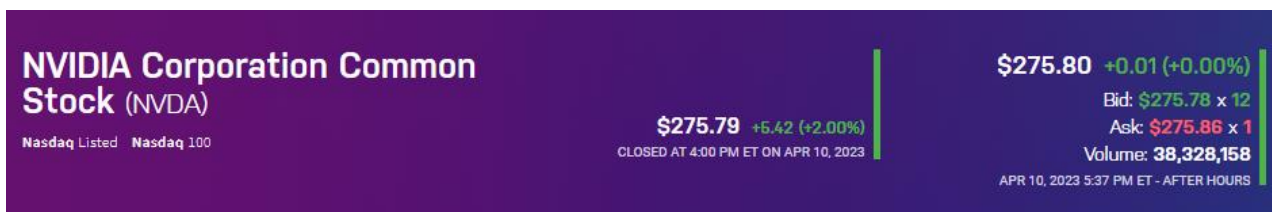


Рисунок 3.2 – Місцезнаходження інформації про ціну базового активу на сьогоднішній день на сайті Nasdaq.com.

Exp. Date	Calls						Puts							
	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.	Strike	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.	
April 6, 2023														
Apr 6	25.29	+1.49 ▲	24.80	26.05	152	631	245.00	0.01	-0.01 ▼	--	0.01	346	2422	
Apr 6	22.57	+3.21 ▲	22.65	23.55	79	277	247.50	0.01	-0.03 ▼	--	0.01	970	5591	
Apr 6	20.25	+1.26 ▲	20.15	21.10	386	1317	250.00	0.01	-0.02 ▼	--	0.01	1139	8403	
Apr 6	18.09	+3.34 ▲	17.65	18.60	223	748	252.50	0.01	-0.03 ▼	--	0.01	576	3526	
Apr 6	15.42	+3.50 ▲	15.15	16.10	376	1208	255.00	0.01	-0.06 ▼	--	0.01	2639	7878	
Apr 6	12.73	+1.93 ▲	12.65	13.60	603	1044	257.50	0.01	-0.13 ▼	--	0.01	7073	4869	
Apr 6	10.46	+1.53 ▲	10.15	11.10	2860	2019	260.00	0.01	-0.22 ▼	--	0.01	24031	13481	
Apr 6	7.95	+1.30 ▲	7.65	8.55	3407	2565	262.50	0.01	-0.46 ▼	--	0.01	19334	9361	
Apr 6	5.30	+0.60 ▲	5.20	5.70	14789	4286	265.00	0.01	-0.89 ▼	--	0.01	48067	12779	
Apr 6	2.90	-0.07 ▼	2.67	3.10	34018	3339	267.50	0.02	-1.70 ▼	--	0.01	43773	6445	
Apr 6	0.32	-1.29 ▼	0.30	0.35	88254	11978	270.00	0.02	-2.83 ▼	0.01	0.04	39218	12229	
Apr 6	0.01	-0.74 ▼	--	0.01	52500	11340	272.50	2.15	-2.25 ▼	1.90	2.90	4764	6149	
Apr 6	0.01	-0.34 ▼	--	0.01	13866	6825	275.00	4.71	-1.96 ▼	4.00	4.85	3324	6723	
Apr 6	0.01	-0.15 ▼	--	0.01	3100	6435	277.50	7.10	-1.82 ▼	6.40	7.35	901	3073	
Apr 6	0.01	-0.07 ▼	--	0.01	4337	13683	280.00	9.65	-1.65 ▼	8.90	9.85	668	2810	
Apr 6	0.01	-0.04 ▼	--	0.01	579	6805	282.50	12.52	-3.33 ▼	11.40	12.35	95	573	
Apr 6	0.01	-0.01 ▼	--	0.01	505	6240	285.00	14.70	-2.00 ▼	13.90	14.85	149	466	
Apr 6	0.01	-0.01 ▼	--	0.01	167	8298	287.50	17.07	-3.83 ▼	16.70	17.35	12	212	
Apr 6	0.01	-0.01 ▼	--	0.01	334	6500	290.00	19.71	-1.29 ▼	18.90	19.85	121	76	
Apr 6	0.01	-0.01 ▼	--	0.01	140	2134	292.50	24.20	+8.95 ▲	21.40	22.35	10	3	
Apr 6	0.02	+0.01 ▲	--	0.01	179	2925	295.00	25.30	-1.65 ▼	23.90	24.85	20	8	

Рисунок 3.3 – Приклад того як виглядає таблиця з даними про страйкові ціни, дату виконання та ціни опціонів колл та пут на сайті Nasdaq.com.

Звідси на протязі одинадцяти днів отримаємо наступну, одну із двох необхідних, таблицю із даними про вартість опціону колл залежно від страйкової ціни та кількості днів до виконання опціону:

K	T=11	T=10	T=9	T=8	T=7	T=5	T=4	T=3	T=2	T=1
240	9.08	9.37	10.2	19.95	20.05	20.05	20.61	22.65	22.65	25.7
242.5	7.8	8.09	8.55	18.32	18.37	18.37	18.6	19.9	19.9	23.33
245	6.73	7	7.45	15.9	15.8	15.8	16.51	18.1	18.1	20.78
247.5	5.75	5.6	6.35	14.93	14.55	14.55	14.45	16.33	16.33	18.71
250	4.85	5	5.32	12.5	12.42	12.42	12.74	13.4	13.4	15.36
252.5	4	4.14	4.35	11.2	10.92	10.92	10.8	12.27	12.27	13.7
255	3.3	3.25	3.35	9.67	9.35	9.35	9.5	9.84	9.84	11.62
257.5	2.71	2.74	2.96	8.2	8	8	8	8	8	9
260	2.21	2.15	2.33	6.78	6.84	6.84	6.7	6.42	6.42	7.18
262.5	1.74	1.74	1.86	5.75	5.8	5.8	5.5	5	5	5.39

Таблиця 3.1 – Таблиця вартості опціонів колл залежно від страйкової ціни та часу до виконання узятих із сайту Nasdaq.com

Другою з необхідних таблиць є таблиця зміни ціни базового активу в залежності від часу. Її також було зібрано на протязі одинадцяти днів і виглядає вона наступним чином:

T	S
11	240.14
10	237.27
9	234.74
8	258
7	257.25
5	259.17
4	260
3	261.3
2	271.09
1	272.81

Таблиця 3.2 – Таблиця, що містить у собі дані щодо змін ціни базового активу в залежності від кількості днів до виконання опціону

Окрім вище описаних даних також необхідно розрахувати річну волатильність та процентну ставку.

Для цього перейдемо до іншої вкладки меню під назвою Historical quotes. Тут ми можемо побачити дані по змінам цін базового активу, відповідні дати та можливість обрати вибірку даних за різні строки. Для нашого дослідження ми обираємо дані за один рік. З них далі у коді буде розрахована процентна ставка та волатильність.

- Dividend History
- Historical Quotes**
- Historical NOCP
- Financials
- Earnings
- P/E & PEG Ratios
- Option Chain
- Short Interest
- Institutional Holdings
- Insider Activity
- SEC Filings
- Revenue EPS

Рисунок 3.4 – Меню з сайту Nasdaq.com, за допомогою якого можна доступитися до необхідних даних з обраним пунктом для доступу до історичних даних.

Розрахунки будуть проводитися за допомогою Python та його статистичних та математичних бібліотек. У даному проєкті буде використано наступні бібліотеки: matplotlib для виведення графіків, math стандартна математична бібліотека, sympy більш складна математична бібліотека, що дозволить виконувати інтегральні обчислення, numpy та statistics статистичні бібліотеки, які будуть використані для статистичних обрахунків та pandas для роботи із таблицями даних.

Першим кроком буде внесення даних до програми, їх зчитування та обробка. Наступний уривок із коду демонструє імплементацію читання таблиць з файлів розширення .csv за допомогою бібліотеки pandas. Дана бібліотека дозволяє зручно працювати із таблицями, пропонуючи для використання методи та функції, що дозволяють не витрачати час на розрахунки базових показників та обробку кожної клітинки, що містить дані.

```
mData = pd.read_csv('HistoricalData_NVidia_Y.csv')
mData.astype(float)

data = pd.read_csv('data.csv')
```

```
data.astype(float)

dataS = pd.read_csv('S change.csv')
dataS.astype(float)
```

Результатом даного коду стануть таблиці 3.1., 3.2 та таблиця історичних даних змін цін базового активу, якими тепер буде можливо користуватися при розрахунках.

Наступним кроком стануть розрахунки річної волатильності та річної процентної ставки. Їх буде розраховано за формулами згаданими у другому розділі даної праці.

$$r = \bar{h} + \frac{\sigma^2}{2},$$

де \bar{h} – середнє арифметичне від h_n .

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \quad S_n = Z_n$$

$$\sigma = \tilde{\sigma} \sqrt{252},$$

де $\tilde{\sigma}$ – середнє квадратичне відхилення для h_n .

Тепер необхідно імплементувати дані формули у Python та розрахувати ці значення.

```
hni = []

for i in range(mData.shape[0]):
    if i == 0:
        continue

    hn = math.log(mData.iat[i,0]/mData.iat[i-1,0])
```

```

hni.append(hn)

hn_av = sum(hni)/len(hni)
st_dev = statistics.stdev(hni)

print('Середнє з hn: ')
print(hn_av)
print('Стандартне квадратичне відхилення: ')
print(st_dev)

```

Звідси ми отримуємо, що для наших даних середнє значення $h_n = -0.0007097534982380977$, а стандартне квадратичне відхилення $\tilde{\sigma} = 0.037989991595059586$. Маючи ці результати можемо розрахувати і процентну ставку разом з волатильністю.

```

vol = st_dev * math.sqrt(252)
vol_per = vol*100
print("Річна волатильність у процентах: ")
print(vol_per)
r = (hn_av + math.pow(vol,2)/2)
print("Процентна ставка: ")
print(r)

```

Використовуючи код вище ми отримуємо наступні значення: річна волатильність у процентах $\sigma = 60.31\%$, а річна процентна ставка $r = 0.18113841863724184\%$.

На даному етапі отримано усі дані, що знадобляться при розрахунку цін опціонів колл у дифузійній та субдифузійній моделях Блека-Шоулза.

3.2. Обчислення справедливої ціни опціонів колл

Для розрахунку справедливої ціни опціону колл у дифузійній та субдифузійній моделях Блека-Шоулза буде використано математичну бібліотеку `sympy` за допомогою

якої можливо побудувати формули моделі та використовувати їх для усіх отриманих раніше даних.

Для початку потрібно перенести у вигляд коду стандартну формулу для розрахунку справедливої ціни колл у дифузійній моделі Блека-Шоулза:

$$C_{BS}(S_0, K, T, \sigma, r) = S_0 \Phi(d_+) - Ke^{-rT} \Phi(d_-),$$

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_0}{K} \pm \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}}$$

У вигляді коду формули вище набудуть такого вигляду:

```
def dp(x, x0, k, sigma, r):
    return ((ln(x0/k) + (r + (1/2)*sigma**2)*x)/(sigma*sqrt(x)))

def dm(x, x0, k, sigma, r):
    return (dp(x, x0, k, sigma, r) - sigma*sqrt(x))

def cBS(x0, k, r, x, sigma):
    sr = r/100
    svol = sigma/100
    return (x0*cdf(N)(dp(x, x0, k, svol, sr)) - k*exp(-sr*x)*cdf(N)(dm(x, x0, k, svol, sr)))
```

Тут варто відмітити, що N є нормальним розподілом з показниками 0 та 1.

Перевіримо код за допомогою відомої бібліотеки `mibian`. Дана бібліотека використовуючи все ті ж дані дозволяє отримати волатильність, ціну колл та ціну пут.

Перевіримо написану з нуля модель, порівнявши її результати із результатами бібліотеки `mibian` для наступних даних: ціна базового активу $S_0 = 240.14$, $K = 240.00$, $\sigma = 60.307\%$, $r = 0.181\%$, $T = 11$.

Результат бібліотеки `mibian`: $call = 10.10$. Отже необхідно отримати таке ж значення за допомогою написаних з нуля методів.

Розрахуємо значення ціни опціону колл, викликавши функцію `cBS`.

```
c = cBS(x0, k, r, x, sigma)
c.evalf(subs={x: T})
```

На вихід отримаємо, що $call = 10.10$, отже можна із впевненістю переходити до розрахунку усіх справедливих цін колл за дифузійною моделлю Блека-Шоулза для наших даних. Отримаємо наступну таблицю значень:

K\T	11	10	9	8	7	5	4	3	2	1
240	10.1	8.2	6.58	20.63	19.62	20.41	20.77	21.66	31.1	32.81
242.5	8.94	7.17	5.66	18.73	17.7	18.32	18.58	19.35	28.62	30.31
245	7.89	6.23	4.84	16.92	15.88	16.32	16.49	17.11	26.14	27.81
247.5	6.92	5.39	4.11	15.21	14.17	14.44	14.5	14.98	23.68	25.31
250	6.05	4.63	3.48	13.61	12.57	12.67	12.63	12.96	21.25	22.82
252.5	5.27	3.97	2.92	12.11	11.08	11.03	10.89	11.07	18.87	20.33
255	4.56	3.38	2.44	10.72	9.71	9.52	9.29	9.33	16.55	17.86
257.5	3.93	2.86	2.03	9.43	8.45	8.14	7.84	7.76	14.32	15.42
260	3.38	2.42	1.67	8.26	7.31	6.9	6.55	6.36	12.21	13.04
262.5	2.89	2.03	1.37	7.19	6.29	5.8	5.41	5.13	10.23	10.77

Таблиця 3.3 – Результати розрахунку справедливих цін опціонів колл за допомогою написаної у Python формули з моделі Блека-Шоулза.

Пригадаємо, що основною метою даних розрахунків є порівняння дифузійної та субдифузійної моделей ринку на основі реальних даних.

Тому наступним кроком стане програмування формули для розрахунку справедливої ціни колл у субдифузійній моделі Блека-Шоулза. Як було вже розписано у другому розділі для окремого випадку α -стабільне рівне $1/2$ ми отримаємо наступну формулу:

$$\int_0^{\infty} C(Z_0, K, x, \sigma) T^{-0.5} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4T}} dx$$

Використовуючи можливості бібліотеки `sympy` запишемо її у вигляді коду, що дозволить розрахувати справедливу субдифузійну ціну для наших даних.

```
def subcBS(x0, k, r, x, sigma, T):
    return Integral(cBS(x0, k, r, x, sigma)*T**(-0.5)*(1/sqrt(pi))*exp(-
x**2/(T*4)), (x, 0, oo))
```

За допомогою об'єкту `Integral` з бібліотеки `sympy` ми отримуємо символічний запис, який потім за допомогою функції `evalf()` можливо прорахувати та отримати необхідні нам значення.

А отже ми отримаємо наступну таблицю цін:

K\T	11	10	9	8	7	5	4	3	2	1
240	23.55	21.46	19.59	32.96	31.75	31.47	31.08	30.86	37.13	36.74
242.5	22.44	20.42	18.61	31.45	30.24	29.89	29.46	29.18	35.22	34.7
245	21.4	19.44	17.68	30	28.79	28.37	27.89	27.55	33.35	32.7
247.5	20.4	18.51	16.8	28.6	27.39	26.9	26.38	25.98	31.54	30.76
250	19.46	17.62	15.97	27.25	26.05	25.48	24.93	24.48	29.77	28.87
252.5	18.57	16.79	15.19	25.96	24.76	24.13	23.54	23.03	28.06	27.03
255	17.72	15.99	14.44	24.72	23.53	22.84	22.22	21.65	26.41	25.25
257.5	16.91	15.24	13.74	23.54	22.37	21.61	20.96	20.34	24.81	23.54
260	16.14	14.52	13.07	22.42	21.26	20.45	19.77	19.11	23.28	21.89
262.5	15.41	13.85	12.44	21.35	20.22	19.36	18.65	17.94	21.82	20.32

Таблиця 3.4 – Результати розрахунку справедливих цін опціонів колл за допомогою написаної у Python формули з субдифузійної моделі Блека-Шоулза.

Наступним кроком стане порівняння моделей, зробимо це, вивівши графіки змін цін опціону колл від часу.

Для цього використаємо бібліотеку `matplotlib`. Дана бібліотека дозволяє вивести графіки та модифікувати їх під конкретні потреби.

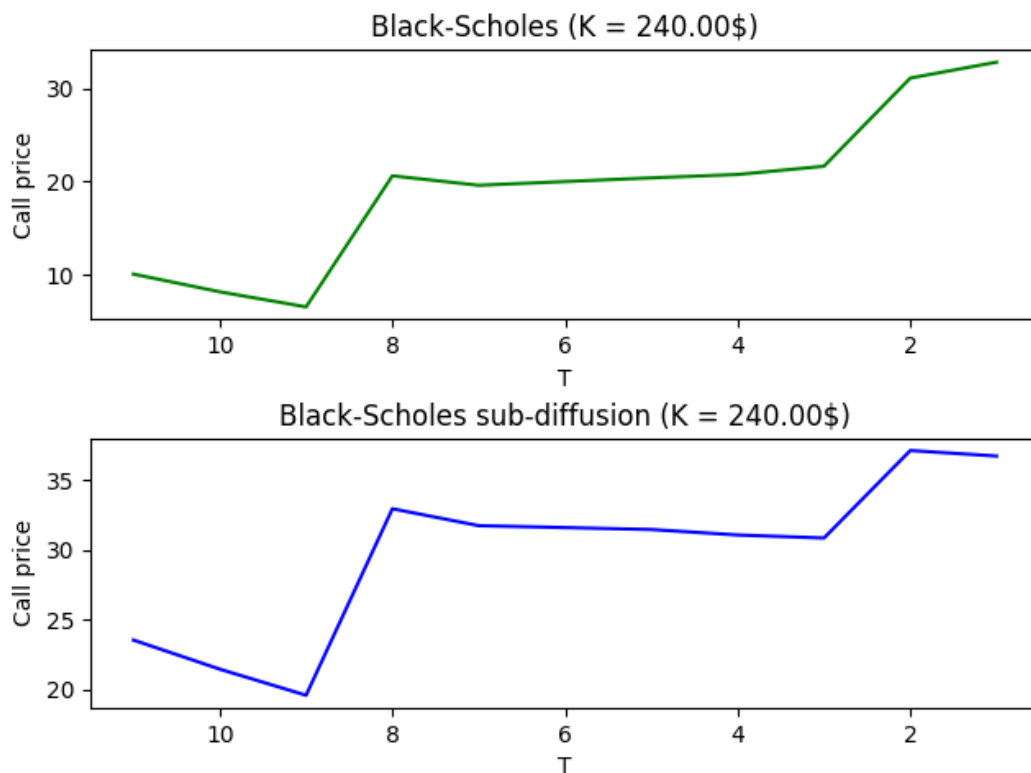


Рисунок 3.5 – Графіки залежності ціни опціону колл від часу у дифузійній та субдифузійній моделі Блека-Шоулза

Як видно з малюнку 3.5. загальна динаміка зміни ціни зберіглася за виключенням деяких відмінностей. Так, наприклад, ціна від $T = 1$ відносно ціни, що була на $T = 2$ зростає у дифузійній моделі, а ціна у субдифузійній моделі йде на спадання. Також ми можемо побачити на проміжку $T \in [3; 7]$ таку ж динаміку. До цього усього також варто

виділити більш різке та відчутні зростання та спадання ціни на початку графіку у субдифузійній моделі ніж у дифузійній.

Але, на жаль, як можна було ще помітити з таблиці 3.4. ціни розраховані за допомогою субдифузійної моделі Блека-Шоулза відчутно зросли відносно своїх дифузійних аналогів.

Причиною тому стало використання $\alpha = 1/2$. Для точного розрахунку субдифузійної моделі необхідно обирати відповідне α , яке, як видно з результатів, не є навіть близьким до $1/2$. Тоді постає наступне питання: чому було обрано саме таке значення даного коефіцієнту. І чому тоді не використовувати напряму розрахунок дробового диференціалу Рімана-Ліувілля у даному прикладі.

Щоб відповісти на нього звернемося знову до коду у Python. Розрахунки дифузійної ринкової моделі є доволі швидкими і майже ніколи не перевищують однієї хвилини. З іншого ж боку розрахунки нашої відносно невеликої вибірки зі ста рівнянь зайняли дві години часу з використанням відносно простого математично окремого випадку. Враховуючи це і той факт, що дробове числення, як це вже було продемонстровано у першому розділі на прикладі бібліотеки `differint`, до часоємності ще й дуже складне в імплементуванні, стає очевидним чому у даній роботі було використане саме $\alpha = 1/2$.

Звідси ж можна відповісти і на наступне питання: чому, якщо теоретично субдифузійна модель ринку є більш точною, її не використовують сайти по типу `Nasdaq.com` у своїх розрахунках справедливих цін опціонів. Для субдифузійної моделі потрібні велика кількість часу і ресурсу, що стає великою проблемою, якщо необхідно відстежувати ціни у живому часі, постійно оновлюючи їх.

3.3. Висновки розділу 3

У цьому розділі було детально розглянуто шлях збору даних та їх розрахунку для отримання необхідних для аналізу результатів.

На прикладі ринку опціонів NVIDIA Corporation Common Stock (NVDA) було розглянуто як зібрати за допомогою декількох бібліотек повністю функціональний метод розрахунку справедливої ціни опціону колл у дифузійній моделі Блека-Шоулза, а також як зібрати метод розрахунку для окремого випадку $\alpha = 1/2$ субдифузійної моделі Блека-Шоулза.

З отриманих результатів було зроблено декілька висновків: субдифузійна модель більш чуттєва до отриманих даних, але є також занадто ресурсоємною та часоємною. Це є величезним недоліком, якщо використовувати її для щоденного розрахунку для відстеження цін у живому часі. Так ціни за дифузійною моделлю Блека-Шоулза рахувалися усього декілька хвилин, тоді як за окремим випадком субдифузійної моделі час розрахунку перевищує дві години.

ВИСНОВКИ

Дробове числення – це розділ математики, який займається узагальненням класичного числення на нецілі порядки диференціювання та інтегрування.

У даній роботі:

- Було проілюстровано та візуалізовано підходи до дробового числення Ейлера, Рімана-Ліувілля та Капуто для функцій x^n , e^{nx} , $\sin(x)$ для порядків диференціювання $1/2$, $-1/2$, $3/2$, $-3/2$.

За допомогою підходу Ейлера було знайдено аналітичні розв'язки дробового диференціювання для функцій $f(x) = 1$ та $f(x) = x$. А для використання підходу Рімана-Ліувілля для функції $f(x) = \sin(x)$ в свою чергу були застосовані вбудовані методи Python з бібліотеки `differint`.

Після аналізу отриманих результуючих функцій та їх графіків були зроблені наступні спостереження: для диференціалів функцій $f(x) = 1$, $f(x) = x$ та $f(x) = \sin(x)$ не було знайдено єдиного закону, за яким дані диференціали поведуться. Їх графіки показують монотонність та строге зростання чи спадання на досліджуваному проміжку. Подібні відмінності відповідають тому, як отримані за допомогою цілочисельного диференціювання результати для тих самих функцій також не мають спільної поведінки для різних порядків диференціювання.

Для використання підходу Капуто для функцій $f(x) = e^x$ та $f(x) = e^{2x}$ було використано наближений метод описаний у [8].

На відміну від результатів диференціювання вищеописаних функцій, для отриманих дробових диференціалів функцій $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{2x}$ існує єдина закономірність. Так, поведінка графіків є однаковою, а від зміни порядку диференціювання змінюється точка перетину з віссю ординат. Подібну динаміку можна помітити і за цілочисельного

диференціювання, коли від порядку диференціювання та від значення початкової функції змінюється не поведінка результуючої функції, а її точка перетину із віссю ординат.

- Було розглянуте застосування дробової похідної Рімана-Ліувілля для опису субдифузійних процесів у фінансовій сфері.

Використовуючи принцип того, що сталість цін опціонів протягом деякого часу дуже схожа на застрягання субдифузійної частки у так званій «пастці», існує субдифузійна ринкова модель. Вона повинна виправляти проблему неврахування деяких особливостей реального ринку, що, на жаль, не можуть бути відображенні звичайними дифузійними моделями ринку. Так, було наведено приклад утворення субдифузійної моделі ринку на відомій моделі Блека-Шоулза.

В процесі було розглянуто та проаналізовано те, як саме в даній моделі використовується дробове числення, а саме дробовий диференціал Рімана-Ліувілля. Розглянуто було також і те, що існує окремий випадок $\alpha = 1/2$, розрахунок якого не потребує занадто великих ресурсів на відміну від аналогу із дробовим численням.

У третьому розділі детально показана процедура збору даних для нашої задачі. На основі описаної вище теорії було детально розглянуто приклад побудований та розрахований за допомогою Python на основі реальних даних отриманих із спеціалізованого сайту Nasdaq.com. Також наведений розбір бібліотек, які використовувалися та фрагментів коду, з яких і були отримані таблиці результатів, що дозволили провести порівняння та аналіз за допомогою графіків залежності справедливих цін колл від часу у дифузійній та субдифузійній моделях Блека-Шоулза.

- Були зроблені висновки щодо ефективності субдифузійної моделі та використання дробового числення.

Субдифузійна модель є більш чутливою, але й значно вибагливішою до ресурсів у порівнянні зі стандартною дифузійною моделлю. Таким чином можна зазначити, що дана модель є потужним теоретичним інструментом, який можна використовувати для дослідження тенденцій ринку із урахуванням такої важливої властивості як періоди сталості ціни. У той же час, для аналізу ринку в живому часі дана модель є надто повільною та потужною для потреб звичайного інвестора.

Так само і дробове числення є потужним інструментом для моделювання складних процесів, таких як моделювання поведінки рідини та фракталів, але також потребує значних витрат по часу та ресурсах. Дана сфера математики до цього часу залишається дуже корисною для конкретних питань моделювання, не будучи необхідною у загальному використанні, а підходи та наближені методи на їх основі досі є активною сферою дослідження.

Список літератури:

1. Alshammari S., Iqbal N., Yar M. Fractional-View analysis of space-time fractional fokker-planck equations within caputo operator. *Journal of function spaces*. 2022. Vol. 2022. P. 1—12. URL: <https://doi.org/10.1155/2022/4471757> (date of access: 01.04.2023).
2. Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone / N. Sebaa et al. *Signal processing*. 2006. Vol. 86, no. 10. P. 2668—2677. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.02.015> (date of access: 01.04.2023).
3. Assaleh K., Ahmad W. M. Modeling of speech signals using fractional calculus. *2007 9th international symposium on signal processing and its applications (ISSPA)*, Sharjah, United Arab Emirates, 12—15 February 2007. 2007. P. 1—4. URL: <https://doi.org/10.1109/isspa.2007.4555563> (date of access: 01.04.2023).
4. Black-Scholes formula. *Encyclopedia of finance*. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Black-Scholes_formula&oldid=50024 (date of access: 01.04.2023).
5. Fellah M., Fellah Z. E. A., Depollier C. Transient wave propagation in inhomogeneous porous materials: application of fractional derivatives. *Signal processing*. 2006. Vol. 86, no. 10. P. 2658—2667. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.02.014> (date of access: 01.04.2023).
6. Fractional differentiation for edge detection / B. Mathieu et al. *Signal processing*. 2003. Vol. 83, no. 11. P. 2421—2432. URL: [https://doi.org/10.1016/s0165-1684\(03\)00194-4](https://doi.org/10.1016/s0165-1684(03)00194-4) (date of access: 01.04.2023).
7. Hayes A. What Is the Black-Scholes Model?. *Investopedia*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/b/blackscholes.asp> (date of access: 27.03.2023).
8. Ishteva M., Scherer R., Boyadjiev L. On the Caputo operator of fractional calculus and C-Laguerre functions. *Mathematical sciences research journal*. 2005. Vol. 9, no. 6. P. 5—7. URL: https://www.researchgate.net/publication/265875174_On_the_Caputo_operator_of_fractional_calculus_and_C-Laguerre_functions (date of access: 01.04.2023).
9. Kulish V. V., Lage J. L. Application of fractional calculus to fluid mechanics. *Journal of fluids engineering*. 2002. Vol. 124, no. 3. P. 803—806. URL: <https://doi.org/10.1115/1.1478062> (date of access: 01.04.2023).

10. Magdziarz M. Black-Scholes formula in subdiffusive regime. *Journal of statistical physics*. 2009. Vol. 136, no. 3. P. 553—564. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9791-4> (date of access: 01.04.2023).
11. Magdziarz M., Orzeł S., Weron A. Option pricing in subdiffusive bachelier model. *Journal of statistical physics*. 2011. Vol. 145, no. 1. P. 187—203. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-011-0310-z> (date of access: 01.04.2023).
12. Mehdi D., Majid B. Applications of fractional calculus. *Applied mathematical sciences*. 2010. Vol. 4, no. 21. P. 1—4. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Applications-of-Fractional-Calculus-Dalir-Bashour/b9f3cebf62c66c7bc06eab009aa1d60d70a19312#references> (date of access: 26.03.2023).
13. Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional calculus and applied analysis*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 367—386. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0110241> (date of access: 20.03.2023).
14. Soczkiewicz E. Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity. *Molecular and Quantum Acoustics*. 2002. Vol. 23, P. 397—404. (date of access: 01.04.2023).
15. Tatom F. B. The relationship between fractional calculus and fractals. *Fractals*. 1995. Vol. 03, no. 01. P. 217—229. URL: <https://doi.org/10.1142/s0218348x95000175> (date of access: 20.03.2023).

Додаток А. Код програми

```

import matplotlib.pyplot as plt
import math
from sympy import *
import numpy as np
import scipy as sc
import pandas as pd
import statistics
from sympy.stats import cdf, Normal

N = Normal('N', 0.0, 1.0)

def dp(x, x0, k, sigma, r):
    return ((ln(x0/k) + (r + (1/2)*sigma**2)*x)/(sigma*sqrt(x)))

def dm(x, x0, k, sigma, r):
    return (dp(x, x0, k, sigma, r) - sigma*sqrt(x))

def cBS(x0, k, r, x, sigma):
    sr = r/100
    svol = sigma/100
    return (x0*cdf(N)(dp(x, x0, k, svol, sr)) - k*exp(-
sr*x)*cdf(N)(dm(x, x0, k, svol, sr)))

def subcBS(x0, k, r, x, sigma, T):
    return Integral(cBS(x0, k, r, x, sigma)*T**(-0.5)*(1/sqrt(pi))*exp(-
x**2/(T*4)), (x, 0, oo))

mData = pd.read_csv('HistoricalData_NVIDIA_Y.csv')
mData.astype(float)

mData

hni = []

for i in range(mData.shape[0]):
    if i == 0:
        continue

    hn = math.log(mData.iat[i,0]/mData.iat[i-1,0])
    hni.append(hn)

hn_av = sum(hni)/len(hni)
st_dev = statistics.stdev(hni)

print('Середнє з hn: ')

```

```

print(hn_av)
print('Стандартне квадратичне відхилення: ')
print(st_dev)

vol = st_dev * math.sqrt(252)
vol_per = vol*100
print("Річна волатильність у процентах: ")
print(vol_per)
r = (hn_av + math.pow(vol,2)/2)
print("Процентна ставка: ")
print(r)

data = pd.read_csv('data.csv')
data.astype(float)

data

dataS = pd.read_csv('S change.csv')
dataS.astype(float)

dataS

sigma = vol_per

x = Symbol('x')

allCallsBS = []
allCallsSubBS = []

for j in range(data.shape[0]):
    K = data.iat[j,0]

    callsBS = []
    callsSubBS = []

    for i in range(dataS.shape[0]):
        T = dataS.iat[i,0]/365

        cB = cBS(dataS.iat[i,1], K, r, x, sigma)
        callsBS.append(cB.evalf(subs = {x: T}))

        subcB = subcBS(dataS.iat[i,1], K, r, x, sigma, T)
        callsSubBS.append(subcB.evalf())

    allCallsBS.append(callsBS)
    allCallsSubBS.append(callsSubBS)

```

```
dataCallsBS = pd.DataFrame(list(map(np.ravel, allCallsBS)))
dataCallsSubBS = pd.DataFrame(list(map(np.ravel, allCallsSubBS)))

dataCallsBS.astype(float).round(2)

dataCallsSubBS.astype(float).round(2)

figure, axes = plt.subplots(2, 1)

axes[0].plot(dataS['T'].to_numpy(), dataCallsBS.iloc[0].to_numpy(), color = "g")
axes[0].set_title("Black-Scholes (K = 240.00$)")
axes[0].set_xlabel("T")
axes[0].set_ylabel("Call price")
axes[0].invert_xaxis()

axes[1].plot(dataS['T'].to_numpy(), dataCallsSubBS.iloc[0].to_numpy(), color = "b")
axes[1].set_title("Black-Scholes sub-diffusion (K = 240.00$)")
axes[1].set_xlabel("T")
axes[1].set_ylabel("Call price")
axes[1].invert_xaxis()

figure.tight_layout(pad=0.5)
plt.show()
```