ВЛАСТИВОСТІ ОНК ПАРАМЕТРІВ КВАЗІЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. ГЛАДУН, О.В. ІВАНОВ, А.М. КРУГОЛ

У доповіді ми розглядаємо неперервний у часі сигнал, що є сумою гармонічного коливання та елементарного чирпованого сигналу (англ. *chirp signal*). У англомовній літературі модель такого сигналу називають *chirp-like model* (див. [1]), а ми будемо називати такий сигнал квазічирпованим. У доповіді досліджується модель квазічирпованого сигналу, що спостерігається на фоні адитивного сильно або слабко залежного випадкового шуму. Отримано властивості консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів цього сигналу.

Нехай спостерігається стохастичний процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \text{де}$$

$$g(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t) + C^0 \cos(\psi^0 t^2) + D^0 \sin(\psi^0 t^2), \qquad (1)$$

$$\theta^0 = \left(A^0, B^0, \phi^0, C^0, D^0 \psi^0\right)^*, \qquad (2)$$

$\left(A^0\right)^2 + \left(B^0\right)^2 > 0$, $\left(C^0\right)^2 + \left(D^0\right)^2 > 0$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом, що задовольняє наступним вимогам.

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

A2.

(i) Процес ε, що задовольняє умову **A1(*i*)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \widetilde{L}\,(1/|\lambda|)\,|\lambda|^{\alpha-1}, \lambda \in \mathbb{R}$, де $\widetilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.

(ii) Спектральна щільність процесу ε, що задовольняє умову **A1(*ii*)**, має четвертий спектральний момент.

Припустимо також, що істинні значення амплітуд (A^0, B^0, C^0, D^0) є різними числами, а істинні значення кутової частоти та темпу частоти

(ϕ^0, ϕ^0) є різними додатними числами. Для деяких фіксованих чисел

$$0 < \underline{\phi} < \overline{\phi} < +\infty, \qquad 0 < \underline{\psi} < \overline{\psi} < +\infty$$

нехай $\phi^0 \in (\underline{\phi}, \overline{\phi})$, $\psi^0 \in (\underline{\psi}, \overline{\psi})$.

Означення. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_T, B_T, \phi_T, C_T, D_T, \psi_T),$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = \frac{1}{T}\int_0^T [X(t) - g(t,\theta)]^2\, dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^6$, де амплітуди (A, B, C, D), приймають будь-які значення, а параметри (ϕ, ψ) приймають значення у множині $[\underline{\phi}, \overline{\phi}] \times [\underline{\psi}, \overline{\psi}]$, називається ОНК параметра θ^0.

Сформулюємо теорему про консистентність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. Доведення цієї теореми використовує схему роботи [2]. Зокрема, в даній роботі доведено рівномірний закон великих чисел для заданого випадкового процесу ε, зваженого тригонометричними функціями (1), що є важливим результатом для доведення наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* ***A1****. Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 у тому сенсі, що $A_T \to A^0$, $B_T \to B^0$, $T(\phi_T - \phi^0) \to 0$, $C_T \to C^0$, $D_T \to D^0$, $T^2(\psi_T - \psi^0) \to 0$ м.н. при $T \to \infty$.*

Далі, спираючись на результат теореми 1, отримуємо теорему про асимптотичну нормальність ОНК θ_T.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***A1*** *та* ***A2****. Тоді нормована ОНК $T^{1/2}(A_T - A^0), T^{1/2}(B_T - B^0), T^{3/2}(\phi_T - \phi^0), T(C_T - C^0), T(C_T - C^0), T^3(\psi_T - \psi^0)$ є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma)$ при $T \to \infty$, де матриця Σ є матрицею 6 порядку, що залежить від параметрів (2).*

Зазначимо, що коваріаційна матриця Σ є виродженою, і $rank(\Sigma) = 5$.

Література

[1] Grover, R., Kundu, D. and Mitra, A. (2018). Chirp-like model and its parameters estimation. *Int. Conf. on Computing, Power and Communication Technologies, India*, pp. 1095-1100. https://doi.org/10.1109/GUCON.2018.8674970.

[2] Ivanov, A., Hladun, V. (2023). Consistency of the LSE for Chirp Signal Parameters in the Models with Strongly and Weakly Dependent Noise. *Austrian Journal of Statistics*, 52(SI), 107–126. https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1762

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: victor.gladun2000@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexntuu@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: anya.krugol2001@gmail.com