СИМЕТРІЙНІ РОЗВ'ЯЗКИ БЕЗДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ НИЖНИКА

О.О. ВІННІЧЕНКО

Для оптимального виконання ліївських редукцій корозмірності один і два необхідно класифікувати одно- та двовимірні підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності досліджуваної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Перший крок процедури ліївської редукції бездисперсійного рівняння Нижника

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y \tag{1}$$

реалізовано в [1], де обчислено, зокрема, максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ цього рівняння, а також, використовуючи оригінальну мегаідеальну версію алгебраїчного методу [2], її псевдогрупу точкових симетрій G.

У статті [3] виконано кожен подальший крок оптимізованої процедури ліївської редукції для рівняння (1). У результаті побудовано широкі сім'ї нових інваріантних розв'язків рівняння (1) в явній формі в термінах елементарних та гіпергеометричних функцій, функцій Ламберта, а також у параметричній або неявній формі. Зокрема, отримано повні переліки G-нееквівалентних одно- та двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$. Але для ліївської редукції рівняння (1) можливо і доцільно використати лише чотири одновимірні підалгебри і вісім двовимірних підалгебр із цих переліків.

Як приклад розглянемо ліївську редукцію рівняння (1) за двовимірною підалгеброю

$$\big\langle \partial_t + \lambda(x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u),\ \mathrm{e}^{(\lambda-1)t}\big(\partial_x + \mu\partial_y - \tfrac{1}{2}(\lambda-1)(x^2+\mu y^2)\partial_u\big)\big\rangle,$$

де λ, μ — довільні сталі з $\mu \neq 0, 1$ $|\mu| \leqslant 1 \pmod G$. Анзац, побудований за цією підалгеброю, та відповідне редуковане рівняння мають вигляд

$$u = \mathrm{e}^{3\lambda t}\varphi(\omega) - \frac{\lambda-1}{6}(x^3+y^3), \quad \omega := \mathrm{e}^{-\lambda t}(y-\mu x); \tag{2}$$
$$2(\mu^3-1)\varphi_{\omega\omega}\varphi_{\omega\omega\omega} - \omega\varphi_{\omega\omega\omega} + (3\lambda-2)\varphi_{\omega\omega} = 0.$$

Редуковане рівняння вдалося повністю проінтегрувати для всіх значень параметра λ в явному вигляді чи у параметричній формі. Нижче наведено відповідні розв'язки рівняння (1) з точністю до G-еквівалентності.

Для $\lambda=\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{6},\frac{4}{3}$ розв'язки зображено в термінах елементарних функцій, де $\varepsilon=\pm1$, $c_1\in\{-1,0,1\}$:

$$u=-\frac{\lambda-1}{4(\mu^3-1)}(y-\mu x)^3-\frac{\lambda-1}{6}(x^3+y^3),$$

$$u=\varepsilon c_1\mathrm{e}^t\frac{\omega\ln\left|\omega+\sqrt{\omega^2+c_1}\,\right|-\sqrt{\omega^2+c_1}}{4(\mu^3-1)}+\mathrm{e}^t\frac{\omega^3+\varepsilon\sqrt{(\omega^2+c_1)^3}}{12(\mu^3-1)}+\frac{x^3+y^3}{9},$$

$$u=\frac{4\varepsilon}{15}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\big(4(\mu^3-1)^2-\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}t}(y-\mu x)\big)^{5/2}+(\mu^3-1)\mathrm{e}^{\frac{5}{6}t}(y-\mu x)^2+\frac{x^3+y^3}{36},$$

$$u=\frac{\big(1-8(\mu^3-1)\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t}(y-\mu x)\big)^{5/2}}{1920\varepsilon\mathrm{e}^{-4t}(\mu^3-1)^4}-\frac{(y-\mu x)^3}{12(\mu^3-1)}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{4}{3}t}(y-\mu x)^2}{16(\mu^3-1)^2}-\frac{x^3+y^3}{18}.$$

При $\lambda=1$ розв'язки побудовано в термінах головної і побічної дійсних гілок W-функції Ламберта $W_0(\tilde\omega)$ і $W_{-1}(\tilde\omega)$:

$$u=-(y-\mu x)^3\frac{18z^2+15z+4}{216(\mu^3-1)z^3},\ z\in\big\{W_0(\tilde\omega),W_{-1}(\tilde\omega)\big\},\ \tilde\omega:=-\frac{\mathrm{e}^{-t}(y-\mu x)}{2(\mu^3-1)}.$$

Для інших значень λ одержано параметричне представлення розв'язків через анзац (2), де

$$\varphi=(\mu^3-1)\frac{4(\mu^3-1)s-3\omega}{27\lambda(2\lambda-1)}s^2-\frac{(\mu^3-1)s-\omega}{3\lambda(3\lambda-1)}\omega s,\quad \lambda\neq0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},$$

$$\varphi=\frac{2}{27}(\mu^3-1)^2s^3-\frac{5}{9}(\mu^3-1)|s|^{3/2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(s)\ln|s|,\quad \lambda=0,$$

$$\varphi=\frac{8}{27}(\mu^3-1)^2s^3+\frac{4}{3}(\mu^3-1)\ln|s|+\frac{4}{3s^3},\quad \lambda=\frac{1}{2},$$

а $s=s(\omega)$ — розв'язок трансцендентного рівняння Ламберта.

Література

[1] Boyko V.M., Popovych R.O. and Vinnichenko O.O. *Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2024. — V. 132, no. 107915. — 19 pp., arXiv:2211.09759.

[2] Maltseva D.S. and Popovych R.O. *Complete point-symmetry group, Lie reductions and exact solutions of Boiti–Leon–Pempinelli system* // Phys. D. — 2024. — V. 460, no. 134081. — 21 pp., arXiv:2103.08734.

[3] Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O. *Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation* // Accepted to Anal. Math. Phys. — 2024. — 41 pp., arXiv:2308.03744.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua