

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

**Курсова робота на тему:
Імбалансно-графічні графи**

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(*прізвище та ініціали*)

(*підпис*)
“ _____ ” _____ 2022 р.

Виконав студент
3-го року навчання спеціальності
121 “Інженерія програмного забезпечення”
Сердюк Андрій Денисович
(*ПІБ*)

Тема: Імбалансно-графічні графи.

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	10.10.2021	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	01.11.2021	
3.	Розробка плану та структури роботи.	20.11.2021	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень теорії графів.	22.12.2021	
5.	Дослідження імбалансно-графічних графів блоків	01.02.2022	
6.	Дослідження операцій на графах у контексті імбалансно-графічних графів	01.04.2022	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	01.05.2022	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	31.05.2022	

Зміст

1	Вступ	4
2	Основні означення та попередні результати	5
2.1	Основні поняття	5
2.1.1	Базові означення	5
2.1.2	Графи перетинів	7
2.1.3	Операції на графах	8
2.1.4	Повні розширення графів	8
2.1.5	Графічні послідовності й імбалансно-графічні графи	9
2.2	Попередні результати	11
2.2.1	Класичні результати	11
2.2.2	Іррегулярність графа	11
2.2.3	Імбалансно-графічні графи	12
2.2.4	Імбалансно-графічні гіпотези	14
3	Основні результати	15
3.1	Загальні спостереження	15
3.2	Імбалансно-графічні графи блоків	16
3.3	Операції на графах, що зберігають графічність M_G	21
3.4	Інші результати	24
4	Відкриті питання	27
5	Програмна складова	28
6	Висновки	36
7	Список використаної літератури	37
8	Додатки	39

1 Вступ

Достатньо відомим поняттям у теорії графів є регулярний граф, кожна вершина якого має однаковий степінь. Попри те, що регулярні графи завжди були відомою темою для вивчення, питання про те, наскільки граф може “не бути регулярним”, почали досліджувати нещодавно.

Першою працею, де розглядалися графи, що мають характеристики, протилежні до тих, що мають регулярні, була [8]. У ній досліджувалися графи, в яких потужність множини степенів вершин графа G була на один менше за кількість вершин. Згодом такі графи почали називатися *антирегулярними* [6].

У [4] була запропонована інша характеристика того, наскільки “нерегулярним” є граф. Для цього М. О. Albertson увів поняття *іррегулярності графа G* та *імбалансу ребра $e \in E(G)$* . Імбаланс ребра $\text{imb}_G(e)$ визначається як модуль різниці степенів його вершин, а іррегулярність графа $I(G)$ — як сума імбалансів усіх його ребер. Зрозуміло, що зв’язний граф G є регулярним тоді й тільки тоді, коли $I(G) = 0$. Таким чином, можна вважати, що іррегулярність графа $I(G)$ визначає, наскільки граф G “не є регулярним”. У роботах [9, 5] можна ознайомитися з іншими підходами до опису того, наскільки нерегулярним є граф.

Після публікації статті [4] в 1997 році було опубліковано багато досліджень щодо величини $I(G)$. Більшість з результатів стосувалися оцінок на можливе максимальне значення іррегулярності [4, 3], інші роботи досліджували нові міри, пов’язані з іррегулярністю графа [2, 16]. Зокрема, ці поняття почали використовуватися в математичній хімії [7].

Як вже було зазначено, більшість результатів, що пов’язані з поняттям імбалансу ребра, спочатку стосувалися лише оцінок на величину $I(G)$. Так було аж до 2014 року, коли була вперше досліджена послідовність імбалансів ребер деякого графа. Зокрема, були розглянуті графи, послідовність імбалансів яких є графічною [14, 15]. Пізніше такі графи почали називатися *імбалансно-графічними* [19]. Згодом стало зрозуміло, що імбалансно-графічні графи пов’язані з функціями росту оборотних ініціальних автоматів [1].

Незважаючи на значну кількість результатів щодо імбалансно-графічних графів, здобутих у [14, 15], цей клас досить залишається недостатньо вивченим.

Основною метою цієї роботи є пошук класів графів, які є імбалансно-графічними, а також розгляд операцій на графах у контексті цієї проблеми.

2 Основні означення та попередні результати

2.1 Основні поняття

2.1.1 Базові означення

У цій роботі розглядаються скінченні неорієнтовані графи $G = (V, E)$, де $V(G)$ є множиною *вершин* графа G , $E(G)$ — мультимножиною *ребер* G (непорядкованих пар вершин). Задля спрощення позначень часто ребро $\{u, v\}$ позначатиметься uv .

Граф G називається *простим графом*, якщо він не містить петель (ребер вигляду $vv, v \in V(G)$) та кратних ребер. Якщо в графі G немає петель, проте дозволені кратні ребра, то кажуть, що G є *мультиграфом*. У випадку, коли $E(G)$ може містити петлі та кратні ребра, G є *псевдографом*. Таким чином, кожен простий граф є мультиграфом і кожен мультиграф є псевдографом.

Означення 2.1. *Доповнення* графа G — це граф \bar{G} із:

$$V(\bar{G}) = V(G) \text{ та } E(\bar{G}) = \{uv | uv \notin E(G)\}.$$

Означення 2.2. *Графом підрозбиття* деякого простого графа G називають граф $S(G)$ із $V(S(G)) = V(G) \cup E(G)$, $E(S(G)) = \{ue | u \in V(G), e = uv \text{ для деякої вершини } v \in V(G)\}$.

Два графи G_1 та G_2 є *ізоморфними*, якщо існує бієктивне відображення $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, таке, що $v_1v_2 \in E(G_1) \iff f(v_1)f(v_2) \in E(G_2)$ для всіх $v_1, v_2 \in V(G_1)$.

Означення 2.3. Граф називається *самодоповняльним*, якщо він ізоморфний своєму доповненню.

Кажуть, що дві вершини $u, v \in V(G)$ є *суміжними*, якщо $uv \in E(G)$. Через $N_G(v)$ позначатимемо *окіл* вершини v — множину вершин, суміжних з v , $N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$. Елементи $N_G(v)$ є *сусідами* v . *Замкненим околом* вершини v називають множину $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

Означення 2.4. *Повним графом* $K_n, n \geq 1$, називається граф, у якого кожні дві вершини є суміжними.

Означення 2.5. Підмножина вершин $S \subset V(G)$ називається *незалежною*, якщо кожна пара вершин з S не є суміжною.

Кажуть, що G є k -частковим графом ($k \geq 0$), якщо множина його вершин може бути поділена в k різні незалежні множини. Кожна така незалежна множина називається *часткою*, або *частиною*, G . Деякий k -частковий граф є *повним k -частковим* графом, якщо кожна пара вершин з різних частин є суміжною. Через K_{n_1, \dots, n_k} позначатимемо повний k -частковий граф, де n_i — потужність i -ї частки, $i \in \overline{1, k}$.

Степенем $d_G(v)$ вершини v позначають кількість її сусідів, тобто $d_G(v) = |N_G(v)|$. Вершина $u \in V(G)$ називається *ізолюваною*, якщо $d_G(u) = 0$. Аналогічно вершина називається *листком*, якщо $d_G(u) = 1$. Множину усіх листків графа позначають через $L(G)$.

Означення 2.6. Граф G є *антирегулярним*, якщо він містить лише дві вершини однакового степеня.

Через $D(G)$ позначатимемо мультимножину степенів графа G . Вершина v називається *внутрішньою*, якщо вона не є ізолюваною та листковою, тобто $d_G(v) \geq 2$. G є m -регулярним графом, якщо $\forall v \in V(G) d_G(v) = m$. Через $\delta(G)$ позначатимемо найменший степінь серед вершин G , через $\Delta(G)$ — найбільший степінь.

Означення 2.7. Під графом, отриманим *видаленням вершини u* , мають на увазі граф $G - u$, де $V(G - u) = V(G) \setminus \{u\}$, $E(G - u) = E(G) \setminus N_G(u)$.

Означення 2.8. Різницею двох графів G_1, G_2 називають граф $G_1 - G_2$, отриманий видалення з G_1 усіх вершин з $V(G_1) \cap V(G_2)$.

Означення 2.9. Граф називається *листково-кліковим*, якщо $V(G) - L(G)$ породжує кліку у G .

Маршрутом у скінченному графі називається скінченна послідовність ребер $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, у якій кожені два сусідні ребра $e_{i-1}e_i$ мають спільну вершину.

Означення 2.10. Граф називається *зв'язним*, якщо між кожною парою вершин існує маршрут, що їх з'єднує.

Нехай $A \subset V(G)$, тоді граф, який є *породженим A* , $G[A]$ має $V(G[A]) = A$, $E(G[A]) = \{uv \mid uv \in E(G), u \text{ та } v \in A\}$. Вершина називається *симплиціальною*, якщо її окіл породжує повний підграф.

Компонентою зв'язності називають максимальний за включенням зв'язний підграф. Вершина $v \in V(G)$ у зв'язному графі G є *точкою з'єднання*, якщо

граф $G - v$ не є зв'язним. Множина вершин графа A є *двозв'язною*, якщо $G[A]$ є зв'язним графом без точок з'єднання.

Циклом C_n називається єдиний зв'язний 2-регулярний граф на $n \geq 3$ вершинах. *Лісом* називають довільний ациклічний граф.

Означення 2.11. *Дерево* — це зв'язний ліс.

Зіркою S_n називають дерево, в якому не більше ніж одна вершина не є листком. Така вершина називається *центром зірки*.

Кажуть, що зв'язний граф G є *уніциклічним* графом, якщо він містить лише один цикл. Аналогічно, G є *біциклічним*, якщо він містить рівно два цикли. *Шляхом* називається дерево з не більш ніж двома листками. Шлях на $n \geq 1$ вершинах позначається P_n .

2.1.2 Графи перетинів

Означення 2.12. Нехай $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ — родина деяких множин. *Графом перетинів* родини S називається граф G із множиною вершин $V(G) = S$ та множиною ребер $E(G) = \{S_i S_j | S_i \cap S_j \neq \emptyset\}$.

Означення 2.13. *Реберним графом* $L(G)$ деякого графа G називають граф перетинів його ребер.

Блоком називається максимальна за включенням множина вершин графа, що є двозв'язною. *Висячим*, або *листяним*, блоком називають блок, що містить лише одну точку з'єднання.

Означення 2.14. *Блоковим графом* $B(G)$ деякого графа G називають граф перетинів його блоків.

Приклад 2.15. Розглянемо приклад деякого графа та його блокового графа.

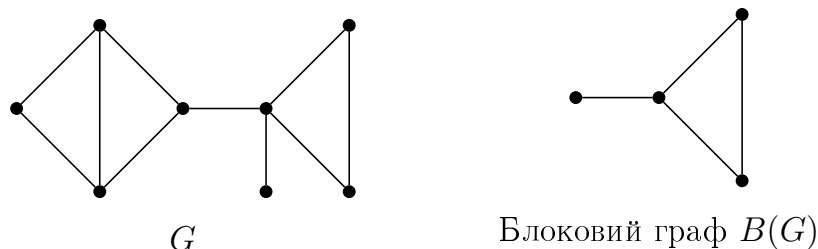


Рис. 1: Приклад простого графа та його блокового графа.

Означення 2.16. Кажуть, що граф G є *графом блоків*, якщо він ізоморфний блоковому графу $B(H)$ деякого простого графа H .

2.1.3 Операції на графах

Нехай a_1, b_1, a_2, b_2 — вершини в графі G , причому $a_1b_1, a_2b_2 \in E(G_1)$ та $a_1a_2, b_1b_2 \notin E(G_1)$. *2-перемикання* вершин a_1, b_1, a_2, b_2 в графі G отримується видаленням ребер a_1b_1, a_2b_2 і додаванням ребер a_1a_2, b_1b_2 . Далі розгляньмо означення деяких бінарних операцій на графах.

Означення 2.17. *Сумою* двох графів G_1, G_2 називається граф $G_1 + G_2$ із множиною вершин $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ та множиною ребер $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$.

Означення 2.18. *Декартовим добутком* двох графів G_1, G_2 є граф $G_1 \square G_2$, де $V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ та дві вершини u_1v_1, u_2v_2 суміжні, якщо $u_1 = u_2$ та $v_1v_2 \in E(G_2)$ або $u_1u_2 \in E(G_1)$ та $v_1 = v_2$.

Означення 2.19. *Коронарним добутком* графів G_1, G_2 називають граф $G_1 \circ G_2$, побудований з об'єднання G_1 з $|V(G_1)|$ копіями G_2 : $\{G_2^u | u \in V(G_1)\}$ додаванням ребер $ux, x \in V(G_2^u)$ для кожного $u \in V(G_1)$.

Означення 2.20. *Линком* двох графів G_1, G_2 за вершинами $u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ є граф $G_1 \sim_{(u,v)} G_2$, отриманий з об'єднання графів $G_1 \cup G_2$ додаванням ребра uv .

2.1.4 Повні розширення графів

Означення 2.21. Нехай G — простий граф на n вершинах і $a : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — функція із $a(v) \geq d_G(v)$ для усіх $v \in V(G)$. Розглянемо n повних графів вигляду $G_v \simeq K_{a(v)}$ з неперетинними множинами вершин.

Для кожного $v \in V(G)$ зафіксуємо ін'єкцію $\phi_v : N_G(v) \rightarrow V(G_v)$. *Повне розширення* G — це граф $G(a)$, отриманий з об'єднання графів $G_v, v \in V(G)$ додаванням ребер $\phi_{v_1}(u_1)\phi_{v_2}(u_2)$, якщо $v_1v_2 \in E(G)$ та $u_1 = v_2, u_2 = v_1$.

Приклад 2.22. На рис. 2 наведений приклад повного розширення ланцюга $P_3 = \{v_1 - v_2 - v_3\}$, де $a(v_1) = 3, a(v_2) = 3, a(v_3) = 1$.

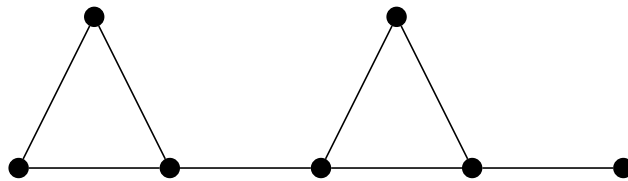


Рис. 2: Повне розширення ланцюга на трьох вершинах.

2.1.5 Графічні послідовності й імбалансно-графічні графи

Означення 2.23. Послідовність невід’ємних чисел A називається *графічною* (мультиграфічною, псевдографічною), якщо існує граф (мультиграф, псевдограф) G , для якого $D(G) = A$.

Означення 2.24. Нехай $e = uv \in E(G)$ — ребро в графі G . *Імбалансом* ребра e називають величину:

$$\text{imb}_G(e) = |d_G(u) - d_G(v)|.$$

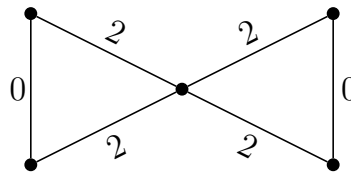
Мультимножина імбалансів усіх ребер G називається *імбалансною послідовністю* G та позначається через M_G . Задля спрощення позначень мультимножина чисел надалі записуватиметься у вигляді

$$A = \{a_1[f(a_1)], a_2[f(a_2)], \dots, a_n[f(a_n)]\},$$

де $a_i \neq a_j$ для різних i, j та $f(a_i)$ — кількість елементів зі значенням a_i в A . Наприклад, $A = \{0, 0, 1, 1, 1, 3, 4, 7, 7\} = \{0[2], 1[3], 3[1], 4[1], 7[2]\}$.

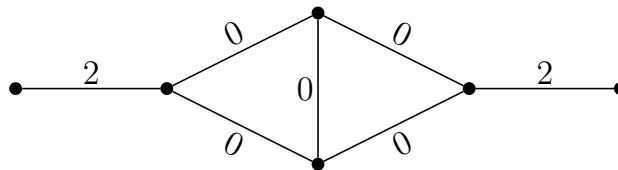
Означення 2.25. Кажуть, що граф G є *імбалансно-графічним* (імбалансно-мультиграфічним, імбалансно-псевдографічним), якщо M_G є графічною (мультиграфічною, псевдографічною) послідовністю.

Приклад 2.26. На рис. 3 зображений граф-метелик, який є імбалансно-графічним. На рис. 4 показаний приклад біциклічного графа, що не є імбалансно-графічним, проте є імбалансно-мультиграфічним.



$$M_G = \{2[4], 0[2]\}$$

Рис. 3: Імбалансно-графічний граф.



$$M_G = \{2[2], 0[5]\}$$

Рис. 4: Граф, що не є імбалансно-графічним.

Означення 2.27. Нехай G — імбалансно-графічний граф. *Реалізацією* G називають такий граф H , що $V(H) = E(G)$ та $\forall e \in E(G) : \text{imb}_G(e) = d_H(e)$.

Використовуючи означення імбалансу ребра, також визначимо поняття іррегулярності графа G .

Означення 2.28. *Іррегулярністю* графа $I(G)$ називають величину:

$$I(G) = \sum_{e \in E(G)} \text{imb}_G(e).$$

2.2 Попередні результати

2.2.1 Класичні результати

Одним з найбільш відомих описів графів блоків є критерій, наданий Ф. Харарі у [12].

Теорема 2.29. [12] Граф G є блоковим графом деякого іншого графа \iff кожен блок G породжує повний підграф.

Оскільки єдиними блоками довільного дерева є його ребра, маємо наслідок.

Наслідок 2.30. *Кожне дерево є графом блоків.*

Нескладно зрозуміти, що мультимножина A невід'ємних чисел є псевдографічною тоді й тільки тоді, коли $\sum_{a \in A} a$ є парним числом. Окрім цього, деяка псевдографічна мультимножина є мультиграфічною тоді й тільки тоді, коли $\sum_{a \in A} a \geq 2 \cdot \max_{a \in A} a$ [15].

Одним з найбільш відомих способів перевірки того, чи є деяка мультимножина графічною, є критерій, опублікований П. Ердемем та Т. Галаї в 1960 році.

Теорема 2.31. [10] Нехай $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — послідовність невід'ємних чисел із $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Тоді A є графічною тоді й тільки тоді, коли:

1. $\sum_{i=1}^n a_i$ є парною;
2. Для всіх $k \in \overline{1, n}$ виконується $\sum_{i=1}^k a_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{a_i, k\}$.

2.2.2 Іррегулярність графа

У праці [4], де вперше були введені поняття імбалансу ребра та іррегулярності графа, була надана така оцінка на можливе максимальне значення $I(G)$.

Теорема 2.32. [4] Для довільного графа G має місце нерівність

$$I(G) \leq \frac{4n^3}{27},$$

причому ця оцінка є асимптотично точною.

Згодом була знайдена більш точна оцінка, яка досягається за всіх значень n .

Теорема 2.33. [3] Для довільного простого графа G

$$I(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - 1 \right).$$

Твердження 2.34. [14] Для довільного графа G величина $I(G)$ є парною.

Завдяки критерію для псевдографічних послідовностей, що наданий у попередньому розділі, маємо такий наслідок.

Наслідок 2.35. *Довільний граф є імбалансно-псевдографічним.*

2.2.3 Імбалансно-графічні графи

Теорема 2.36. [14] Якщо T — це дерево, то T імбалансно-графічний.

Доведення. Нехай T є деревом на $n \geq 1$ вершині. Припустимо спочатку, що $|V(T) - L(T)| = 0$. Тоді $T \simeq K_2$ та $M_T = \{0\}$, яка, очевидно, є графічною. Так само якщо $|V(T) - L(T)| = 1$, то $T \simeq K_{1,n-1}$ та $M_T = \{n - 2[n - 1]\}$ графічна.

Далі доведення проводиться індукцією за n . Якщо $n = 1$, то $T \simeq K_1$ та $M_T = \emptyset$ є тривіально графічною. Тепер нехай T — це дерево на $n \geq 2$ вершинах. Якщо $|V(T) - L(T)| \leq 1$, то теорема доведена. Якщо $|V(T) - L(T)| \geq 2$, то існує така вершина $v \in V(T)$, яка суміжна з $d(v) - 1$ листком в T . Тобто існує єдина вершина $u \in V(T)$, яка не є листком і суміжна з v .

Тепер розглянемо дерево $T' = T - (N_T(v) \cap L(T))$. Легко переконатися, що

$$M_T = (M_{T'} - \{d_T(u) - 1\}) \cup \{|d_T(u) - d_T(v)|, d_T(v) - 1[d_T(v) - 1]\}.$$

За припущенням індукції, $M_{T'}$ є графічною. Нехай H — її реалізація. Зафіксуємо вершину $x \in V(H)$ із $d_H(x) = \text{imb}_{T'}(uv) = d_T(u) - 1$. Розглянемо два випадки:

1. $d_T(u) \geq d_T(v)$.

Додамо до H $d_T(v) - 1$ нових вершин $x_1, \dots, x_{d_T(v)-1}$ з ребрами $x_i x_j$ для $1 \leq i, j \leq d_T(v) - 1$. Потім зафіксуємо $d_T(v) - 1$ сусідів $y_1, \dots, y_{d_T(v)-1} \in$

$N_H(x)$ вершини x у H . Видалимо ребра вигляду xy_i , $1 \leq i \leq d_T(v) - 1$ та додамо нові ребра x_iy_i для $1 \leq i \leq d_T(v) - 1$. Отриманий граф є реалізацією M_T .

2. $d_T(u) \leq d_T(v) - 1$.

Нехай $N_H(x) = \{x_1, \dots, x_{d_T(u)-1}\}$. Видалимо ребра xx_i , $1 \leq i \leq d_T(u) - 1$ з H . Після цього додамо $d_T(v) - 1$ нових вершин $y_1, \dots, y_{d_T(v)-1}$ та нові ребра y_iy_j для $1 \leq i, j \leq d_T(u) - 1$. Отриманий граф знову є реалізацією M_T .

□

Твердження 2.37. [15] Для довільної послідовності $\{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ повний k -частковий граф K_{n_1, \dots, n_k} є імбалансно-графічним.

Твердження 2.38. [14] $S(G)$ є імбалансно-графічним для довільного простого графа G .

Здобуті результати стосувалися також повних розширень графів.

Теорема 2.39. [15] Нехай G — імбалансно-графічний граф та $a : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — функція із $a(v) \geq d(v)$, $v \in V(G)$. Тоді $G(a)$ є імбалансно-графічним.

Окрім теореми 2.39, в [15] було також припущено, що цей результат можна узагальнити для довільних графів G та функцій a із $a(v) > d(v)$, $v \in V(G)$. Це припущення рівносильне гіпотезі 2.40.

Гіпотеза 2.40. [15] Для довільного графа G мультимножина $M_G \cup \{1[2|E(G)]\}$ є графічною.

У [15] були досліджені бінарні операції на графах, які з двох імбалансно-графічних графів дозволяють побудувати інший такий граф. Деякі з отриманих там результатів наведені нижче.

Наслідок 2.41. [15] Нехай G_1, G_2 — імбалансно-графічні графи. Тоді $G_1 \cup G_2$, $G_1 \square G_2$, $G_1 \circ G_2$ також є імбалансно-графічними.

Твердження 2.42. [15] Нехай G_1 та G_2 — імбалансно-графічні графи, $u \in V(G_1)$, $v \in V(G_2)$ є локальними максимумами відносно $d_{G_1}(\cdot)$ і $d_{G_2}(\cdot)$ відповідно. Тоді $G_1 \sim_{(u,v)} G_2$ також є імбалансно-графічним.

2.2.4 Імбалансно-графічні гіпотези

Окрім результатів, що були згадані в попередніх розділах, в [14, 15] була сформульована низка гіпотез щодо достатніх умов, за яких деякий граф має графічну послідовність імбалансів. Перед тим, як розглянути їх, сформулюємо твердження 2.43.

Твердження 2.43. [14] Нехай M — скінченна послідовність невід’ємних чисел, сума яких є парною. Тоді існує такий граф G , що $M_G \setminus M = \{0, \dots, 0\}$.

У зв’язку з твердженням 2.43 була сформульована така гіпотеза.

Гіпотеза 2.44. [14] Нехай G — простий граф із $\text{imb}(e) \geq 1$ для довільного ребра e . Тоді G є імбалансно-графічним.

Зауваження 2.45. [14] Ця гіпотеза була перевірена для графів із $|V(G)| \leq 9$.

Також зауважимо, що графи, які не мають ребер з нульовим імбалансом, очевидно, є імбалансно-мультиграфічними, що робить гіпотезу 2.44 природною. Для цього достатньо переконатися, що

$$I(G) = \sum_{m \in M_G} m \geq \max M_G + |E(G)| - 1 \geq 2 \max M_G.$$

Друга гіпотеза, запропонована в [14], пов’язана з твердженням 2.46.

Твердження 2.46. [14] Множина величин $m(G) = \frac{I(G)}{|E(G)|}$ для всіх графів G , що не є імбалансно-графічними, є щільною в $[0, 2]$.

Тому в [14] була запропонована гіпотеза 2.47.

Гіпотеза 2.47. Нехай G — граф із $I(G) \geq 2|E(G)|$. Тоді G є імбалансно-графічним.

3 Основні результати

3.1 Загальні спостереження

Нижче наведені статистичні дані щодо зв'язних імбалансно-неграфічних графів відносно всіх зв'язних графів на n вершинах.

n	Зв'язних графів на n	Імбалансно-неграфічні	Відношення (%)
1	1	0	0
2	2	0	0
3	2	0	0
4	6	0	0
5	21	0	0
6	112	3	2.67
7	853	6	0.703
8	11117	33	0.29
9	261080	131	0.05
10	11716571	720	0.00614
11	1006700565	6918	0.00068

Табл. 1: Кількість зв'язних графів на n вершинах, що не є імбалансно-графічними.

Зауваження 3.1. Усі графи з ≤ 5 вершинами є імбалансно-графічними.

Найменший за кількістю ребер імбалансно-неграфічний граф на 6 вершинах зображений на рис. 5.

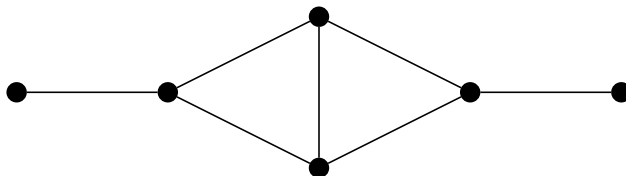


Рис. 5: Найменший імбалансно-неграфічний граф

Колекція всіх імбалансно-неграфічних графів на 6 та 7 вершинах надана в додатку А.

3.2 Імбалансно-графічні графи блоків

Нижче наведене стисліше доведення теореми 2.36.

Теорема 3.2. [18] Нехай T є деревом. Тоді T є імбалансно-графічним.

Доведення. Нехай T є деревом на $n \geq 1$ вершині. Доведення проводитиметься індукцією за n . Якщо $n \leq 5$, то T є імбалансно-графічним. Припустимо тепер, що $n \geq 6$.

Якщо T є зіркою, то $M_T = \{(n-2)[n-1]\}$ є графічною. Надалі вважатимемо, що T не є зіркою. Тоді в T існують дві суміжні внутрішні вершини u та v .

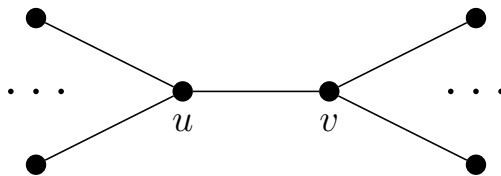


Рис. 6: Дерево T , де u, v — суміжні внутрішні вершини.

Видалимо ребро uv з G та додамо дві вершини a_1, a_2 з ребрами ua_1, va_2 . Отриманий граф є лісом, кожна з компонент зв'язності якого є імбалансно-графічною за припущенням індукції. Через H позначимо об'єднання їхніх реалізацій. Нехай $N_H(ua_1) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $N_H(va_2) = \{y_1, \dots, y_m\}$.

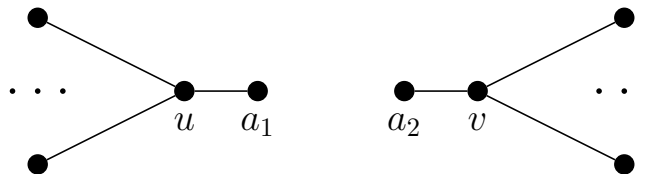


Рис. 7: Ліс, отриманий видаленням ребра uv та додаванням вершин a_1, a_2 .

Тепер видалимо з H вершини ua_1, va_2 та додамо вершину uv . Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $k \geq m$. Спочатку додамо ребра вигляду $\{x_i, y_i\}$ для всіх $i \in \overline{1, m}$. Далі, додамо ребра $\{uv, x_j\}$, $j \in \overline{m+1, k}$. Отриманий граф — реалізація M_T . □

Підхід, використаний у доведенні теореми 3.2, узагальнюється у твердженні 3.11.

Оскільки кожне дерево є графом блоків, виникає питання, чи кожен граф блоків є імбалансно-графічним. Попри те, що це питання досі залишається відкритим, існує низка результатів, які підтримують це припущення.

Твердження 3.3. [18] Кожен граф блоків є імбалансно-мультиграфічним.

Доведення. Нехай G — граф блоків із $|V(G)| = n$. Доведення проводиться індукцією за n .

Якщо $n \leq 5$, то G — імбалансно-графічний. Припустимо тепер, що $n \geq 6$. Якщо G не має листкових блоків, то він є ізоморфним повному графу, який імба-

лансно-графічний. Припустимо тепер, що G має хоча б один листковий блок B . Оберемо симпліціальну вершину $v \in B$ та видалимо її з графа G . За припущенням індукції, отриманий граф G' є імбалансно-мультиграфічним, нехай H — це реалізація його послідовності імбалансів.

Розглянемо тепер початковий граф та побудуємо реалізацію M_G з H . Спочатку додамо до H ребро av , де a — це єдина точка з'єднання в B . Очевидно, що $\forall e \in E(G[B]) = \text{imb}_G(e) = \text{imb}_{G'}(e)$. Розглянемо тепер ребра вигляду aw , $w \in N_{G'}(a)$. Існують два випадки:

1. $\text{imb}_G(aw) = \text{imb}_{G'}(aw) + 1$

У цьому випадку достатньо додати до H ребро $\{aw, av\}$.

2. $\text{imb}_G(aw) = \text{imb}_{G'}(aw) - 1$

Оскільки імбаланс ребра aw зменшився на 1, то існує вершина $u \in V(H) : \{u, aw\} \in E(H)$. Видалимо ребро $\{u, aw\}$ з H та додамо ребра $\{u, av\}$.

Виконавши ці дії для всіх сусідів вершини a , матимемо мультиграф, послідовність степенів якого збігається з M_G .

□

У теоремах 3.4, 3.7, 3.8 доведено, що графи блоків з відомою структурою графа, породженого його точками з'єднання, є імбалансно-графічними, що посилює результат твердження 3.3.

Теорема 3.4. [18] Граф блоків, усі точки з'єднання якого належать одному блоку, є імбалансно-графічним.

Доведення. Нехай G — граф блоків, точки з'єднання якого належать одному блоку. Якщо G не містить точок з'єднання, то він є повним графом, який є імбалансно-графічним. Припустимо, що G містить висячі блоки.

Застосуємо індукцію за n — кількістю вершин G . Як вже було зазначено, якщо $n \leq 5$, то G — імбалансно-графічний.

Нехай тепер $n \geq 6$, B — блок, що містить усі точки з'єднання G . B_1, B_2, \dots, B_l — всіячі блоки G . Покладемо $m := \max_{v \in B} d(v)$.

Для кожної вершини $v_i \in B$ із $d(v_i) = m$ оберемо іншу довільну вершину u_i з всіячого блоку B_i , який містить v_i (принаймні один такий блок існує). Позначимо через k кількість таких u_i .

Розглянемо граф G' , отриманий видаленням усіх таких вершин u_i , нехай H' — реалізація $M_{G'}$. Зрозуміло, що $\forall i \in \overline{1, k}, e \in E(G[B_i] - u) : \text{imb}_G(e) = \text{imb}_{G'}(e)$. Також розглянемо $e \in G', e = \{v_i, w\} : w \in N(v_i) \setminus B_i$, для кожного $i \in \overline{1, k}$. Отримуємо:

$$\text{imb}_G(e) = \begin{cases} \text{imb}_{G'}(e), & \text{якщо } d(w) = m; \\ \text{imb}_{G'}(e) + 1, & \text{якщо } d(w) < m. \end{cases}$$

Побудуємо H — реалізацію M_G , додамо до графа H' k вершин вигляду $\{v_i, u_i\}, i \in \overline{1, k}$ та ребра таким чином:

- 1) $\{\{u_i, v_i\}, \{u_i, w\}\} \in E(H)$, якщо $w \notin B_i$ та $d(w) < m$;
- 2) $\{\{u_i, v_i\}, \{u_j, v_j\}\}$, де $i, j \in \overline{1, k}, i \neq j$.

Додавши до $H \sum_{n=1}^k (|B_i| - 2)$ ізольованих вершин, маємо реалізацію M_G . □

Зауваження 3.5. Коли G містить лише одну точку з'єднання, його реалізацію можна отримати з реберного графа шляхом видалення ребер між ребрами одного блоку.

Приклад 3.6. Розгляньмо приклад побудови такої реалізації.

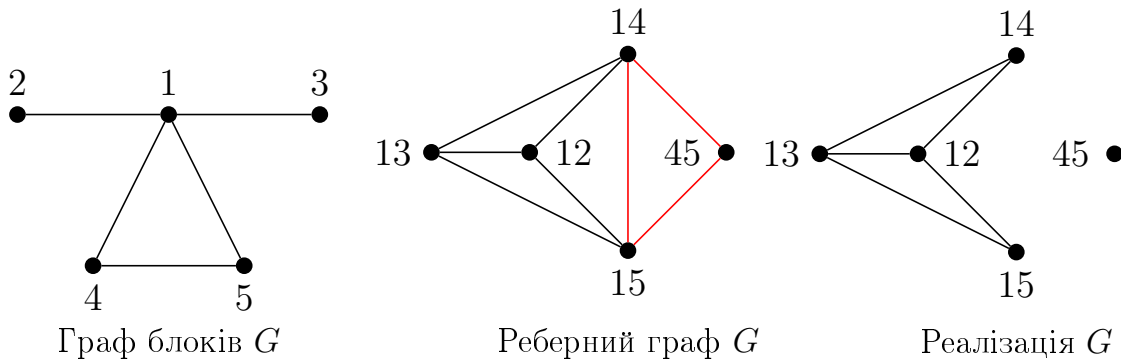


Рис. 8: Побудова реалізації графа блоків з однією точкою з'єднання за допомогою його реберного графа

Теорема 3.7. [18] Граф блоків, граф точок з'єднання якого породжує зірку, є імбалансно-графічним.

Доведення. Нехай G — граф блоків, граф точок з'єднання якого утворює зірку, де a — точка з'єднання, яка є центром цієї зірки, a_1, \dots, a_k — її листки. Застосуємо індукцію за кількістю вершин $n = |V(G)|$. Якщо $n \leq 5$, то G є імбалансно-графічним.

Надалі вважатимемо, що $n \geq 6$. Припустимо спочатку, що існує така вершина a_i , що $d(a_i) > d(a)$. Тоді видалимо довільну вершину u з всього блока B , що містить a_i . За припущенням індукції, отриманий граф є імбалансно-графічним. Додамо до його реалізації вершину $a_i u$ та з'єднаємо її з усіма вершинами вигляду $a_i b, b \in N_G(a_i) \setminus B$. Отриманий граф є шуканою реалізацією.

Розглянемо інший випадок, коли степінь вершини a більший за степені точок з'єднання a_1, \dots, a_k . Існують два варіанти.

1. $\exists i : N_G(a_i) \cap N_G(a) = \emptyset$;

У цьому разі видалимо ребро aa_i та додамо два висячі ребра вигляду ab_1 та $a_i b_2$. Отриманий граф складається з двох компонент зв'язності, одна з яких є графом блоків, що має одну точку з'єднання, а інший — графом блоків, граф точок з'єднання якого утворює зірку. Нехай H — об'єднання реалізація цих компонент зв'язності.

Покладемо $N_H(a_i b_2) = \{u_1, \dots, u_m\}$, $N_H(ab_1) = \{v_1, \dots, v_k\}$. По-перше, видалимо вершини ab_1 та $a_i b_2$ з H , після чого додамо ребра $u_i v_i, i \in \overline{1, m}$. По-друге, додамо вершину aa_i та ребра вигляду $\{aa_i, v_i\}, i \in \overline{m+1, k}$. Знову маємо шукану реалізацію.

2. $\forall i : N_G(a_i) \cap N_G(a) \neq \emptyset$;

Оберемо довільну точку з'єднання a_i та вершину $v \in N_G(a) \cap N_G(a_i)$. Видалимо цю вершину, після чого матимемо імбалансно-графічний граф, нехай H — його реалізація.

Додамо до H вершини $vw, w \in N_G(v)$ та ребра вигляду $\{va_i, a_i w\}, w \in N(a_i) \setminus N[a]$, а також ребра $\{va, aw\}, w \in N(a) \setminus N[a_i]$. Побудований граф є реалізацією M_G .

□

Теорема 3.8. [18] Граф блоків, граф точок з'єднання якого утворює ланцюг, є імбалансно-графічним.

Доведення. Нехай G — граф блоків на n вершинах, граф точок з'єднання якого утворює ланцюг. Використаймо індукцію за n . Якщо $n \leq 5$, то G є імбалансно-графічним, тому база індукції виконується.

Припустимо тепер, що твердження доведене для усіх графів із $\leq n$ вершинами. Нехай a_1, \dots, a_k — точки з'єднання G , причому $a_i a_j \in E(G) \iff |i - j| = 1$. Якщо $k \leq 2$, то множина точок з'єднання G породжує повний граф і, за твердженням 3.4, G є імбалансно-графічним. Надалі вважатимемо, що $k \geq 3$.

Позначимо через B блок, що містить вершини a_1 та a_2 , нехай також $C_1 = N_G(a_1) \setminus B$, $C_2 = (N_G(a_2) \setminus B) \setminus \{a_3\}$. Оскільки a_1 є точкою з'єднання, то $C_1 \neq \emptyset$. Тоді зафіксуємо деяку вершину $w \in C_1$.

Якщо $B = \{a_1, a_2\}$, то твердження доводиться подібно до теореми 3.2. Нехай тоді B містить деяку симплеціальну вершину u , тоді $ua_1, ua_2 \in E(G)$.

За припущенням індукції, граф $G - u$ є імбалансно-графічним графом, нехай H — це його реалізація. Очевидно, що $\forall e = a_1 c, c \in C_1 : \text{imb}_G(e) = \text{imb}_{G-u}(e) + 1$.

Крім цього, $\forall e = a_2 c, c \in C_2 : \text{imb}_G(e) = \text{imb}_{G-u}(e) + 1$. Також маємо, що $\text{imb}_G(a_1 u) = |C_1|$, $\text{imb}_G(a_2 u) = |C_2| + 1$. Додамо до H вершини $vu, v \in N_G(u)$ та розглянемо два випадки:

1. $d_G(a_2) > d_G(a_3)$

У цьому випадку $\text{imb}_G(a_2 a_3) = \text{imb}_{G-u}(a_2 a_3) + 1$. Додавши до H ребра вигляду $\{a_1 u, a_1 c\}$, де $c \in C_1$, $\{a_2 u, a_2 c\}$, де $c \in C_2$, та ребро $\{a_2 u, a_2 a_3\}$, маємо реалізацію M_G .

2. $d_G(a_2) \leq d_G(a_3)$

Оскільки $d_G(a_2) \leq d_G(a_3)$, то $\text{imb}_G(a_2 a_3) = \text{imb}_{G-u}(a_2 a_3) - 1$. Спочатку додамо до H ребра $\{a_1 u, a_1 c\}$, $c \in C_1, c \neq w$. Далі, додамо ребра $\{a_2 u, a_2 c\}$, $c \in C_2$.

Враховуючи, що $d_{G-u}(a_2) < d_{G-u}(a_3)$, можемо розглянути вершину $e \in N_H(a_2 a_3)$. Далі, видалимо з H ребро $\{a_2 a_3, e\}$. Якщо $e = a_2 c$ для деякого $c \in C_2$, то достатньо додати ребра $\{a_1 u, e\}$, $\{a_2 u, a_1 w\}$. В іншому випадку додамо ребра $\{a_1 u, a_1 w\}$ та $\{a_2 u, e\}$. В обох випадках отриманий граф є реалізацією M_G .

□

Усі отримані вище результати наводять до такої гіпотези:

Гіпотеза 3.9. *Усі графи блоків є імбалансно-графічними.*

Зауваження 3.10. За допомогою комп'ютерного перебору гіпотеза 3.9 перевірена для графів з ≤ 13 вершинами.

3.3 Операції на графах, що зберігають графічність M_G

Твердження 3.11. *Нехай G_1, G_2 — імбалансно-графічні графи, де $w, x \in E(G_1), y, z \in E(G_2), d(w) \geq d(x)$ та $d(y) \geq d(z)$, причому $(d(w) - d(y)) \cdot (d(z) - d(x)) \geq 0$ ($d(y), d(z) \in [d(x), d(w)]$ або навпаки). Тоді граф, отриманий 2-перемиканням вершин w, x, y, z в графі $G_1 \cup G_2$, також є імбалансно-графічним.*

Доведення. Позначимо через H_1 реалізацію мультимножини імбалансів G_1 , через H_2 — реалізацію G_2 . Нехай також $F = G_1 \cup G_2$, $A = N_{H_1}(wx) = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = N_{H_2}(yz) = \{b_1, \dots, b_m\}$. Очевидно, що F — імбалансно-графічний, оскільки $P = H_1 \cup H_2$ є його реалізацією.

Виконаємо тепер 2-перемикання на вершинах w, x, y, z . Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\text{imb}_F(wx) \leq \text{imb}_F(yz)$.

Спочатку додамо до P ребра вигляду $a_i b_i, i \in \overline{1, n}$. Оскільки $(d(w) - d(y)) \cdot (d(z) - d(x)) \geq 0$, то $|B - A| = |\text{imb}_{G_2}(yz) - \text{imb}_{G_1}(wx)| = |(d(y) - d(w)) + (d(x) - d(z))| = |d(y) - d(w)| + |d(x) - d(z)| = \text{imb}_F(wy) + \text{imb}_F(xz)$.

Додамо до P дві вершини wy, xz та ребра вигляду

1. $\{b_i, wy\}, i \in \overline{n+1, n+|w-y|}$;
2. $\{b_i, xz\}, i \in \overline{n+|w-y|+1, m}$.

Побудований граф є реалізацією графа, отриманого з F 2-перемиканням вершин w, x, y, z . □

Наслідок 3.12. *Нехай G_1, G_2 — імбалансно-графічні графи та $x_1 \in V(G_1), x_2 \in V(G_2), d(x_1) = d(x_2)$. Тоді граф, отриманий 2-перемиканням вершин x_1, y_1, x_2, y_2 , де $y_1 \in N(x_1), y_2 \in N(x_2)$, є імбалансно-графічним.*

Наслідок 3.13. *Нехай G_1, G_2 — імбалансно-графічні графи та $e_1 = \{x, l_1\} \in E(G_1), e_2 = \{y, l_2\} \in E(G_2)$ — висячі ребра з листками l_1, l_2 . Тоді граф H , отриманий видаленням вершин l_1, l_2 з об'єднання $G_1 \cup G_2$ та додавання ребра xu , є імбалансно-графічним.*

Окремим питанням, що постає під час вивчення бінарних операцій на графах у контексті імбалансно-графічних графів, є те, чи завжди сума двох деяких графів є імбалансно-графічною. Спершу може скластися враження, що, наприклад, сума двох імбалансно-графічних графів завжди є такою ж. Виявляється, що це не так. Контрприкладом до такого припущення можуть слугувати графи $G_1 = K_m \cup K_1, G_2 = \overline{K_2}$, сума яких не є імбалансно-графічною, коли $m \geq 3$. На рис. 9 зображено $G_1 + G_2$ для $m = 4$.

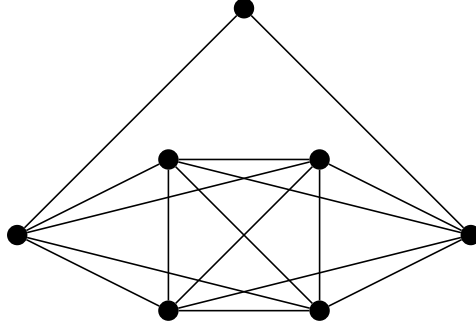


Рис. 9: Приклад суми графів, що не є імбалансно-графічною.

Теорема 3.14. *Нехай G – простий граф із $|V(G)| = n$. Тоді $G + \overline{K_m}$ є імбалансно-графічним для $m \geq n - 1$.*

Доведення. Нескладно переконатися, що для G із $\Delta(G) \leq 1$ твердження виконується. Припустимо, що $\Delta(G) \geq 2$.

Нехай $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = V(G + \overline{K_m}) \setminus V(G)$. Упорядкуємо множину ребер $E(G + \overline{K_m})$ за спаданням їхніх імбалансів, матимемо послідовність $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{|E(G)|+mn}\}$. Оскільки $m \geq n - 1$, то імбаланси перших m ребер з E_1 будуть рівні $(m + \Delta(G) - n)$.

Для доведення скористаємось критерієм Ердеша-Галаї. Необхідно перевірити, що для усіх $1 \leq k \leq |E_1|$ виконується:

$$\sum_{i=1}^k \text{imb}(e_i) \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{mn+|E(G)|} \min\{k, \text{imb}(e_i)\}.$$

Спочатку покажемо, що нерівність виконується для $k \leq m$. Маємо таке:

$$\sum_{i=1}^k \text{imb}(e_i) = (m + \Delta(G) - n)k \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{mn+|E(G)|} \min\{k, \text{imb}(e_i)\}.$$

Зауважимо, що перші $(m - k)$ елементи суми $\sum_{i=k+1}^{mn+|E(G)|} \text{imb}(e_i)$ також рівні $(m + \Delta(G) - n)$. Розглянемо два випадки:

1. $k > (m + \Delta(G) - n)$.

Достатньо довести, що

$$(m + \Delta(G) - n)k \leq k(k - 1) + (m - k)(m + \Delta(G) - n).$$

Враховуючи, що $(\Delta(G) - n) \leq -1$, достатньо показати:

$$(m - 1)(2k - m) \leq k(k - 1).$$

Після нескладних перетворень маємо $-(m - k)^2 + (m - k) \leq 0$, що доводить бажане.

2. $k \leq (m + \Delta(G) - n)$.

Покажемо, що

$$(m - 1)k \leq k(k - 1) + (m - k)k + \sum_{i=m+1}^{mn+|E(G)|} \text{imb}(e_i).$$

Після низки перетворень маємо рівносильну нерівність:

$$0 \leq \sum_{i=m+1}^{mn+|E(G)|} \text{imb}(e_i),$$

яка виконується.

Очевидно, що для $k > m$ нерівність також виконується. Дійсно,

$$\sum_{i=1}^k \text{imb}(e_i) \leq k(m + \Delta(G) - n) \leq k(m - 1) \leq k(k - 1).$$

Отже, за критерієм Ердеша-Галаї, $G + \overline{K_m}$ є імбалансно-графічним. \square

3.4 Інші результати

Твердження 3.15. *Антирегулярні графи є імбалансно-графічними.*

Доведення. Доведення проводитиметься індукцією за n — кількістю вершин, $n \geq 2$. База індукції, очевидно, виконується, бо K_2 та $\overline{K_2}$ є єдиними антирегулярними графами на 2-х вершинах.

Відомо, що для довільного натурального n існують лише два антирегулярні графи H_n та $\overline{H_n}$ на n вершинах ($n \geq 2$). Щоб отримати антирегулярні графи на $n+1$ вершині, достатньо до графа $\overline{H_n}$ додати одну вершину, тобто $H_{n+1} = \overline{H_n} + K_1$, $\overline{H_{n+1}} = H_n \cup K_1$ [6].

Очевидно, що для всіх імбалансно-графічних графів G графи $G+K_1$, $G \cup K_1$ є такими.

Отже, всі антирегулярні графи є імбалансно-графічними. \square

Теорема 3.16. *Уніциклічні графи є імбалансно-графічними.*

Доведення. Нехай G — уніциклічний граф на n вершинах. Якщо $G \simeq C_n$, то $M_G = \{0[n]\}$ є графічною.

Тепер припустимо, що в G існує міст між двома внутрішніми вершинами. Тоді G також є імбалансно-графічним.

Надалі вважатимемо, що $G \not\simeq C_n$ та що всі мости в G сполучають листкову вершину з вершиною, що належить циклу.

Доведення проводитиметься індукцією за n . Якщо $n < 6$, то твердження виконується.

Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $A \subset V(G)$ максимальна підмножина вершин, що породжує зв'язний підграф у G , такий, що $\forall a \in A : d_G(a) = \Delta(G)$.

Очевидно, що кожен елемент A належить циклу в G . Тепер зафіксуємо функцію $f : A \rightarrow V(G)$, яка кожному елементу $a \in A$ ставитиме у відповідність листкову вершину з $N_G(a)$, тобто $f(a) \in N_G(a)$ та $d(f(a)) = 1$.

Розглянемо граф H , отриманий видаленням вершин $f(A)$. За припущенням індукції, H є імбалансно-графічним, нехай F — його відповідна реалізація із $V(F) = E(H)$.

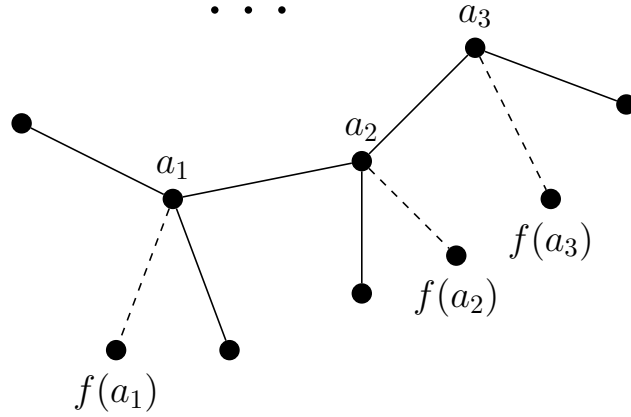


Рис. 10: Ілюстрація доведення 3.16.

Зрозуміло, що для кожних $a \in A, v \in N_H(a) \setminus A$ справедливо $\text{imb}_G(av) = \text{imb}_H(av) + 1$. Крім цього, $\forall a \in A, a' \in N_H(a) \cap A$ має місце $\text{imb}_H(aa') = \text{imb}_G(aa')$.

Додамо до F вершини вигляду $a_i f(a_i), i \in \overline{1, |A|}$, а також ребра $\{a_i f(a_i), a_i v\}, i \in \overline{1, |A|}, v \in N_H(a) \setminus A$. Далі, додамо ребра вигляду $\{a_i f(a_i), a_j f(a_j)\}, a_i a_j \in E(G)$. Отриманий граф є реалізацією M_G .

□

Твердження 3.17. Для будь-якого натурального $n \geq 9$ існує граф G на n вершинах, що не є імбалансно-графічним, такий, що $I(G) \geq 2|E(G)|$.

Доведення. Розглянемо зображений на рис. 11 граф G та доведемо, що він не є імбалансно-графічним, проте задовольняє умову гіпотези 2.47.

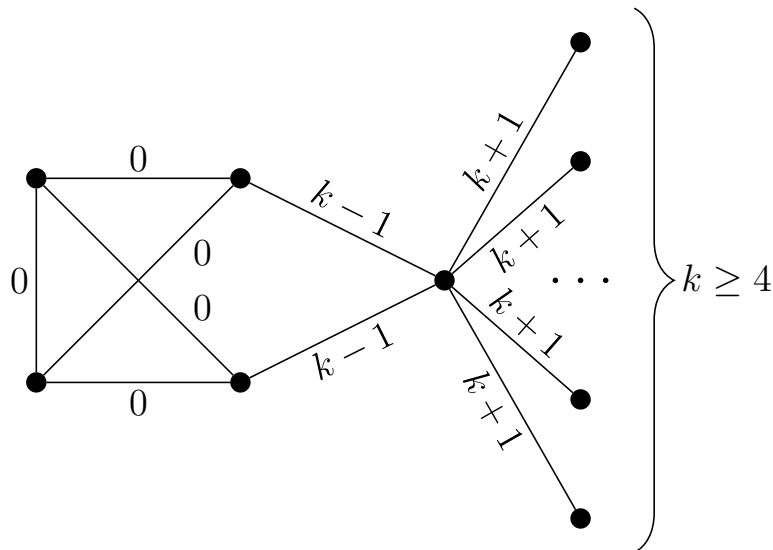


Рис. 11: Контрприклад до гіпотези 2.47.

Бачимо, що $M_G = \{0[5], k-1[2], k+1[k]\}$, яка, очевидно, не є графічною. Дійсно, припустимо супротивне, нехай H — реалізація M_G . Очевидно, що усі k вершин степеня $k+1$ мусять бути суміжними з усіма іншими неізолюваними вершинами з H , оскільки H містить $k+2$ неізолювані вершини. Проте M_G містить елементи менші за $(k+1)$, тому $\delta(H) \geq k$, що неможливо.

Покажемо тепер, що $I(G) \geq 2|E(G)|$. З одного боку, $I(G) = 2(k-1) + k(k+1) = k^2 + 3k - 2$. З іншого боку, $2|E(G)| = 2k + 14$. Таким чином, необхідно розв'язати нерівність:

$$k^2 + 3k - 2 \geq 2k + 14 \stackrel{k \in \mathbb{N}}{\iff} k \geq 4$$

Отже, для усіх натуральних $k \geq 4$ виконується $I(G) \geq 2|E(G)|$, що доводить сформульоване твердження. \square

Зауваження 3.18. Граф, зображений на рис. 11, із $k = 4$ є найменшим за кількістю вершин контрприкладом до гіпотези 2.47.

4 Відкриті питання

У теоремах 3.2 та 3.16 було показано, що дерева та уніциклічні графи є імбалансно-графічними. Природним чином виникає питання, чи можна узагальнити ці результати, наприклад, на біциклічні графи.

На рис. 4 був наведений приклад біциклічного графа, що не є імбалансно-графічним. Однак наразі цей граф є єдиним відомим біциклічним графом, що не є імбалансно-графічним.

Гіпотеза 4.1. *Граф, зображений на рис. 4, — це єдиний біциклічний граф, що не є імбалансно-графічним.*

Зауваження 4.2. Гіпотеза 4.1 була перевірена для усіх графів з ≤ 21 вершинами.

Означення 4.3. [5] Граф G називається *сильно іррегулярним*, якщо для кожної вершини a степені її сусідів є різними.

Гіпотеза 4.4. *Сильно іррегулярні графи є імбалансно-графічними.*

Зауваження 4.5. Гіпотеза 4.4 справджується для графів із ≤ 15 вершинами.

Гіпотеза 4.6. *Завжди принаймні один з графів G та \bar{G} є імбалансно-графічним.*

Зауваження 4.7. Гіпотеза 4.6 виконується для графів із ≤ 11 вершинами.

Гіпотеза 4.8. *Самодоповняльні графи імбалансно-графічні.*

Зауваження 4.9. Гіпотеза 4.8 справедлива для графів із ≤ 17 вершинами.

Нескладно помітити, що з гіпотези 4.6 випливає гіпотеза 4.8.

Окрім зазначених вище питань, нерозв'язаними залишаються деякі питання, згадані в [14, 15].

Зауваження 4.10. Гіпотеза 2.44 має місце для графів із ≤ 12 вершинами, гіпотеза 2.40 — для графів із ≤ 11 вершинами.

Також припускається, що існує деяке узагальнення гіпотези 2.47.

Гіпотеза 4.11. *Існує універсальна константа k (або функція $k(n)$), така, що $I(G) \geq k \cdot |E(G)| \Rightarrow G$ — імбалансно-графічний.*

Зауваження 4.12. Якщо така універсальна константа k існує, то $k \geq 5$.

5 Програмна складова

Переважає більшість відкритих питань, що виникала під час дослідження, перевірялася за допомогою комп'ютера. Приклад однієї з таких програм наданий нижче. Окрім власних програм, також використовувалися колекція графів Combinatorial Data [20] та бібліотека Nauty Traces [21, 17], за допомогою якої генерувалися графи для перевірки.

Розгляньмо приклад програми, що використовувалась для перевірки гіпотези 2.44. На вхід подається шлях до файлу, який містить графи для перевірки в форматі g6 (альтернативно можна зчитувати графи з потоку). Клас Main поступово зчитує вказані графи та розподіляє їх між потоками для обробки. Після обробки всіх графів програма виводить кількість оброблених графів та час, що пройшов від початку роботи.

```
import java.io.BufferedReader;
import java.io.FileReader;
import java.io.IOException;
import java.util.concurrent.BlockingQueue;
import java.util.concurrent.LinkedBlockingQueue;

public class Main {

    public static final int THRESHOLD = 300000;
    public static final int READ_AMOUNT = 500000;
    public static final int THREADS_AMOUNT = 11;
    private BufferedReader in;
    private final Worker[] workers = new Worker[THREADS_AMOUNT];
    private final BlockingQueue<String> queue = new
        LinkedBlockingQueue<>();

    public static boolean hasGraphsToRead = true;

    public void run(String filename) throws IOException {
        long startTime = System.currentTimeMillis();
        in = new BufferedReader(new FileReader(filename));
        for (long i = 0; i < 2*READ_AMOUNT*THREADS_AMOUNT; i++) {
            String s = in.readLine();
            if (s == null || s.isEmpty()) {
                hasGraphsToRead = false;
                break;
            }
            queue.add(s);
        }
    }
}
```

```

for(int i = 0; i < THREADS_AMOUNT; i++) {
    Worker worker = new Worker(queue);
    workers[i] = worker;
    worker.start();
}

while (hasGraphsToRead) {
    if (queue.size() < THRESHOLD)
        addNewGraphs();
}
while (!queue.isEmpty());

in.close();
long counter = 0;
for(int i = 0; i < THREADS_AMOUNT; i++)
    counter += workers[i].counter;
// Report graphs amount
System.out.println("Graphs processed: " + counter);
// Report elapsed time
long totalTime = System.currentTimeMillis() - startTime;
System.out.println("Time elapsed: " +
    (totalTime / 60000) + " minutes, " + ((double) (totalTime %
        60000) / 1000) + " seconds");
}

private void addNewGraphs() throws IOException {
    for (int i = 0; i < READ_AMOUNT; i++) {
        String s = in.readLine();
        if (s == null) {
            hasGraphsToRead = false;
            return;
        }
        queue.add(s);
    }
}

public static void main(String[] args) throws IOException,
    NumberFormatException {
    new Main().run(args[0]);
}
}

```

Лістинг 1: Клас Main

Клас Worker успадковується від класу Thread, тобто може бути запущений у паралельному потоці. Головним завданням цього класу є перевірка гіпо-

тези на отриманих графах. У тілі методу run() відбувається декодування графів та обрахунок послідовності їхніх імбалансів. Якщо жоден з імбалансів певного графа не рівний 0, виконується метод graphExists(), що перевіряє, чи є ця послідовність графічною за допомогою алгоритма Хавела-Хакімі[13, 11].

```
import java.io.IOException;
import java.util.*;
import java.util.concurrent.BlockingQueue;
import java.util.concurrent.atomic.AtomicLong;

import static java.lang.Math.abs;
public class Worker extends Thread {
    private final static int QUEUE_SIZE = Main.READ_AMOUNT;

    private final BlockingQueue<String> blockingQueue;
    private final Queue<String> privateQueue = new LinkedList<>();
    long counter;
    private static final AtomicLong interestingCount = new
        AtomicLong();

    public Worker(final BlockingQueue<String> queue) {
        this.blockingQueue = queue;
    }

    private static boolean graphExists(ArrayList<Integer> a) {
        while (true) {
            a.sort(Collections.reverseOrder());
            int v = a.get(0);
            if (v == 0)
                return true;
            a.remove(0);
            if (v > a.size())
                return false;
            for (int i = 0; i < v; i++) {
                int currentValue = a.get(i);
                a.set(i, currentValue - 1);
                if (currentValue < 1)
                    return false;
            }
        }
    }

    void printCounterexample(Integer[] edgeImbalances, Graph g) {
```

```

int m = edgeImbalances.length;
try {
    Arrays.sort(edgeImbalances);
    StringBuilder s = new StringBuilder(2 * m + 20);
    int occurrences = 1;
    int current = edgeImbalances[0];
    int previous;
    for (int i = 1; i < m; i++) {
        previous = current;
        current = edgeImbalances[i];
        if (current == previous)
            occurrences++;
        else {
            s.append('[').append(occurrences).append("]
                ").append(previous).append(", ");
            occurrences = 1;
        }
    }
    s.append('[').append(occurrences).append("]
        ").append(current);
    long value = interestingCount.incrementAndGet();
    g.saveDotFormat("D:/ConjectureCounterexample/" + g.n() +
        "/" + value + ".dot", s.toString());
} catch (IOException e) {
    e.printStackTrace();
}
}

```

```

@Override
public void run() {
    while (Main.hasGraphsToRead || !privateQueue.isEmpty() ||
        !blockingQueue.isEmpty()) {
        if (privateQueue.isEmpty()) {
            blockingQueue.drainTo(privateQueue, QUEUE_SIZE);
        }
        String s = privateQueue.poll();
        if (s == null) {
            if (Main.hasGraphsToRead)
                continue;
            else
                break;
        }
        Graph g = new Graph(s);
        counter++;

        if (g.m() == 0)

```

```

        continue;
        int m = 0;
        int[][] matrix = g.Amatrix();
        int[] degrees = g.degrees();

        boolean interesting = true;
        Integer[] edgeImbalances = new Integer[g.m()];
        for (int i = 0; m < g.m() && interesting; i++) {
            for (int j = i + 1; j < g.n(); j++) {
                if (matrix[i][j] == 1) {
                    int imbalance = abs(degrees[i] - degrees[j]);
                    if (imbalance == 0) {
                        interesting = false;
                        break;
                    }
                    edgeImbalances[m++] = imbalance;
                }
            }
        }
        if (!interesting || graphExists(new
            ArrayList<>(Arrays.asList(edgeImbalances))))
            continue;
        printCounterexample(edgeImbalances, g);
    }
}
}
}

```

ЛІСТИНГ 2: Клас Worker

Клас Graph, розроблений Dragan Stevanovic, Mohammad Ghebleh, Ali Kanso, є допоміжним і містить методи для декодування графів, записаних у форматі g6, їхньому записі в форматі dot, а також для збереження матриці суміжності та мультимножини степенів вершин.

```

/**
 * Graph.java
 *
 * This class creates adjacency matrix of a graph from its g6 code.
 * Values of invariants values are obtained by calling appropriate
 * functions.
 *
 * @author Dragan Stevanovic, Mohammad Ghebleh, Ali Kanso
 * @version April 2018
 */
import java.io.*;

```



```

public class Graph
{
    // Sequence of bits reconstructed from g6 code
    private int[] bits;
    private int n;           // number of vertices (order)
    private int m;           // number of edges (size)
    private int[] degree;    // degree sequence
    private int[][] A;       // adjacency matrix

    ...

    /**
     * Constructor of a graph from g6 code
     */
    public Graph(String s) {
        n=s.charAt(0)-63;    // number of vertices is obtained from
            the first character of g6 code
        int firsti=1;
        if (s.charAt(0)>=126) {
            n=s.charAt(1)*4096 + s.charAt(2)*64 + s.charAt(3);
            firsti=4;
        }

        int bindex = 0;      // transform g6 code characters into bit
            sequence
        bits = new int[6*s.length()];
        for (int i=firsti; i<s.length(); i++) {
            int k = s.charAt(i)-63;
            for (int j=0; j<=5; j++) {
                bits[bindex+5-j] = k%2;
                k = k/2;
            }
            bindex += 6;
        }
        // initialize adjacency matrix, degree sequence and number of
            edges
        A = new int[n][n];
        // indexing always starts at 0
        degree = new int[n];
        for (int i=0; i<n; i++)
            degree[i] = 0;
        m = 0;

        bindex = 0;
        // processes bit sequence to fill up adjacency matrix, degree

```

```

        sequence and number of edges
    for (int j=1; j<n; j++)
    for (int i=0; i<j; i++) {
        A[i][j] = bits[bindex];
        A[j][i] = bits[bindex];

        degree[i] += bits[bindex];
        degree[j] += bits[bindex];

        m += bits[bindex];

        bindex++;
    }
}

...

/**
 * Methods returning values of numbers of vertices, edges,
 * degrees and adjacency matrix
 */
public int n() {
    return n;
}

public int m() {
    return m;
}

public int[] degrees() {
    return degree;
}

public int[][] Amatrix() {
    return A;
}

...

/**
 * Together with the graph, you can visualise additional data
 * by placing them in a data string.
 * This string is put as a label of a separate isolated vertex,
 * and visualised by Graphviz in the same image next to the graph
 * itself.
 */

```

```

public String printDotFormat(String data) {
    StringBuffer buf = new StringBuffer("graph {\n");

    for (int i=0; i<n; i++)
        buf.append("" + i + " [shape=circle]\n");

    for (int i=0; i<n; i++)
        for (int j=i+1; j<n; j++)
            if (A[i][j]==1)
                buf.append("" + i + " -- " + j + "\n");

    buf.append("data [shape=box, label=\"" + data + "\"]\n");
    buf.append("}\n");
    return buf.toString();
}

...

/**
 * Writes the .dot format description of a graph to the file,
 * together with additional data placed as a label of a separate
 * isolated vertex
 */
public void saveDotFormat(String filename, String data) throws
    IOException {
    PrintWriter outfile = new PrintWriter(new BufferedWriter(new
        FileWriter(filename)));
    outfile.println(printDotFormat(data));
    outfile.close();
}
}

```

ЛІСТИНГ 3: Клас Graph

Для перевірки інших гіпотез достатньо відповідно змінити метод `run()` у класі `Worker`.

6 Висновки

У цій роботі були розглянуті поняття імбалансу ребра та іррегулярності графа, що є однією з можливих характеристик того, наскільки деякий граф G не є регулярним, та основні відомі оцінки цієї величини. Основну увагу було зосереджено на дослідженні так званих імбалансно-графічних графів — графів, чиї імбалансні послідовності є графічними.

На початку роботи були згадані вже відомі результати щодо того, які класи графів є імбалансно-графічними. Серед них такі графи, як: дерева, графи підрозбиттів, повні k -часткові графи, декартові та коронарні добутки імбалансно-графічних графів, деякі повні розширення графів тощо.

Після цього в роботі була надана статистика щодо кількості зв'язних імбалансно-неграфічних графів серед усіх зв'язних графів. Колекція таких графів на 6 та 7 вершинах надана в додатку А.

У наступній частині цього розділу був розглянутий відомий надклас дерев — графи блоків. У ньому було надано більш стисле доведення того, що дерева є імбалансно-графічними графами. Також там було показано, що кожен граф блоків є імбалансно-мультиграфічним, а деякі типи графів блоків, які мають конкретну структуру точок з'єднання, є імбалансно-графічними. Ці результати були презентовані на 43rd Australiasian Combinatorics Conference [18].

Окрім цього, у роботі були досліджені операції на графах, що дозволяють отримати імбалансно-графічний граф з деяких інших графів. Зокрема, було показано, що сума двох імбалансно-графічних графів не завжди є імбалансно-графічною, після чого був наданий приклад достатньої умови, за якої сума двох графів є імбалансно-графічною. Також було з'ясовано, коли за допомогою 2-перемикання вершин можна отримати новий імбалансно-графічний граф з двох інших таких графів.

Наприкінці розділу були розглянуті інші класи імбалансно-графічних графів, як-от: антирегулярні графи та уніциклічні графи. Потім був наданий контрприклад до другої гіпотези 2.47, що була сформульована в [15].

У наступному розділі був наданий перелік відкритих питань, що стосуються теми, яка досліджується. Кожна з гіпотез була перевірена перебором на комп'ютері для графів з невеликою кількістю вершин.

Наприкінці роботи надано приклад загальної структури програмного коду, за допомогою якого перевірялися гіпотези під час дослідження.

Список використаної літератури

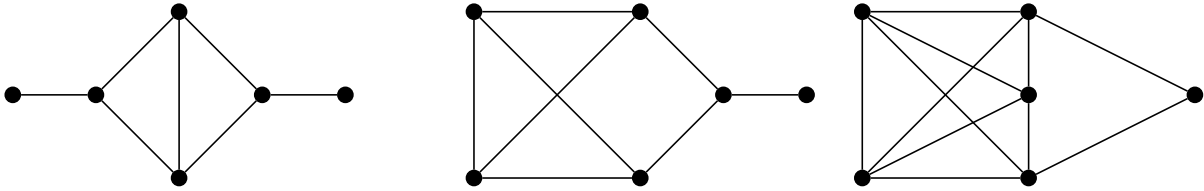
- [1] В. М. Скочко, Ріст ініціальних оборотних автоматів, дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.08, МОН України, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, 2021: 123 стр.
- [2] H. Abdo, S. Brandt, D. Dimitrov, The total irregularity of a graph. *Discrete mathematics & theoretical computer science DMTCS* 16 (2014), 201-206.
- [3] H. Abdo, N. Cohen, D. Dimitrov, Bounds and Computation of Irregularity of a Graph (2012), preprint: <https://arxiv.org/abs/1207.4804>, 13 p.
- [4] M. Albertson, The Irregularity of a Graph. *Ars Comb.* 46 (1997), 219-225.
- [5] Y. Alavi, G. Chartrand, F. R. K. Chung, P. Erdős, R. L. Graham, O. R. Oellermann, Highly Irregular Graphs, *J. Graph Theory*, 11 (1987) 235–249.
- [6] A. Ali, G. Chartrand, P. Zhang, *Irregularity in Graphs (SpringerBriefs in Mathematics)*. 1st ed. 2021, Springer, 2021.
- [7] A. R. Ashrafi, A. Ghalavand, A. Ali, Molecular trees with the sixth, seventh and eighth minimal irregularity values, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 11.01 (2019).
- [8] M. Behzad, G. Chartrand, No Graph is Perfect, *American Mathematical Monthly* 74 (1967), 962.
- [9] G. Chartrand, P. Erdős, O. R. Oellermann, How to define an irregular graph, *The College Mathematics Journal* 19.1 (1988), 36-42.
- [10] P. Erdős and T. Gallai, Graphs with given degree of vertices, *Mat. Lapok*, 11 (1960), 264 – 274.
- [11] S. L. Hakimi, On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a simple graph, *J. SIAM Appl. Math.* 10 (1962), 496–506.
- [12] F. Harary, A characterization of block-graphs, *Canadian Mathematical Bulletin* 6.1 (1963), 1-6.
- [13] V. Havel, A remark on the existence of finite graphs (Czech), *Časopis Pěst. Mat.* 80 (1955), 477–480.

- [14] S. Kozerenko, V. Skochko, On graphs with graphic imbalance sequences, *Algebra and Discrete Mathematics* 18.1 (2014), 97-108.
- [15] S. Kozerenko, Edge imbalance sequences and their graphicness, *Journal of Advanced Mathematical Studies* (2019), 50-62.
- [16] Z. Lin, T. Zhou, L. Miao, The general Albertson irregularity index of graphs, *AIMS Mathematics* 7 (2021), 25-38.
- [17] B. McKay, A. Piperno, Practical Graph Isomorphism, II, *Journal of Symbolic Computation*, 60 (2014), 94-112.
- [18] A. Serdiuk, Imbalance graphic block graphs, 43rd Australasian Combinatorics Conference, 13-17 December 2021, The University of Melbourne, Australia (online).
- [19] V. Skochko, Transition graphs of iterations of initial $(2, 2)$ -automata. *Науковий вісник Ужгородського університету, Серія «Математика і інформатика»* 2 (31) (2017), 129-136.
- [20] Combinatorial Data [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/>. - Назва з екрана. - Дата перегляду: 28.05.2022.
- [21] Nauty Traces [Електронний ресурс] / авт.-упоряд.: В. McKay, А. Piperno; — Режим доступу: <https://pallini.di.uniroma1.it/>. - Назва з екрана. - Дата перегляду: 28.05.2022.

Додаток А

Колекція імбалансно-неграфічних графів

6 вершин



7 вершин

