УДК 624.048-033.26:621.651

Демчук М. Б.

УЗГОДЖЕНА МОДЕЛЬ НАГНІТАННЯ ЦЕМЕНТНОГО РОЗЧИНУ В НАСИЧЕНЕ ПОРИСТЕ СЕРЕДОВИЩЕ

Для стандартного лабораторного дослідження нагнітання цементного розчину в насичений водою ґрунт сформульовано математичну модель, яка є узгодженою початково-крайовою задачею для системи диференційних рівнянь у часткових похідних.

Ключові слова: математична модель, стандартне лабораторне дослідження нагнітання цементного розчину в насичений водою ґрунт, крайова умова, початкова умова, система диференційних рівнянь у часткових похідних.

Вступ. Під час створення фундаментів для зменшення проникності або поліпшення пружних властивостей ґрунтового масиву в нього під тиском нагнітають в'яжучий розчин, після застигання якого отримуємо бажаний результат. З міркувань охорони навколишнього середовища хімічні розчини, які раніше використовувались як інфільтрат, недавно було замінено на цементні. Останні складаються з частинок. Якщо ці частинки є достатньо малими для того, щоб рухатись у ґрунті, то вони спричиняють явище, яке отримало назву глибинна фільтрація або фільтрація безодні. У залежності від їх розміру розрізняють два механізми такої фільтрації [12, с. 1637]. Перший відповідає затисненню частинок у вузьких проходах між порами ґрунту, тоді як другий механізм відображає поступове утворення осаду з них на стінках пор та у проходах між порами, унаслідок чого поступово зменшуються розмір пор та радіуси вузьких проходів між порами.

Моделювання процесу нагнітання на комп'ютері дає змогу з'ясувати режим, в якому він повинен виконуватись. Оскільки модель є суб'єктивною та спрощеною версією реальної системи, не існує унікальної моделі для кожної конкретної системи, яка містить пористе середовище. Різні набори припущень, які спрощують систему, приводять до різних моделей [7, с. xii]. Так, у моделях, вміщених у [9, с. 1040–1041; 10, с. 1–3; 11, с. 228–230; 13, с. 212–214] скелет ґрунту вважають абсолютно твердим, а в моделях [1, с. 675–685], [2, с. 269–271], [3, с. 63–65], [8, с. 1210–1213] його вважають пружним. У моделях [1, с. 675–685], [2, с. 269–271], [3, с. 63–65], [13, с. 212–214] нехтують особливостями поширення розчину в пористому середовищі, а в моделях [8, с. 1210–1213], [9, с. 1040–1041], [10, с. 1–3], [11, с. 228–230] ці особливості враховано. У моделі [10, с. 1–3] не враховують фільтрацію безодні, у моделях [9, с. 1040–1041], [11, с. 228–230] використовують перший механізм для опису фільтрації безодні, а в моделі [8, с. 1210–1213] – другий. Тож важливою частиною процесу моделювання є обґрунтування моделі, яке здійснюється завдяки порівнянню результатів числового розрахунку з результатами відповідних лабораторних вимірювань або польових досліджень.

Нагнітання цементного розчину здійснюють у насичений водою ґрунт, а часом і в сухі породи [1, с. 674]. Фільтрація цементного розчину в ґрунті є прикладом повзучого руху [5, с. 209–210]. За такого руху сили інерції є малими порівняно з силами тертя. Оскільки цементний розчин є структурованим, і комбінація сил взаємодії між твердими частинками й сил взаємодії між твердими частинками та частинками рідини робить його однорíднішим зі зростанням концентрації [8, с. 1197–1198], то часткове заповнення ним пор ґрунту під час нагнітання цього розчину в сухий ґрунт можна моделювати як його розчинення у фіктивній невагомій рідині нульової в'язкості, яка насичувала ґрунт перед нагнітанням.

Завдяки цьому обґрунтування моделі нагнітання цементного розчину в насичений водою або сухий ґрунт можна здійснити, порівнявши модельні розрахунки з результатами наступного стандартного лабораторного дослідження [8, с. 1215–1216], [10, с. 5–7], [11, с. 230–233]. В основу вертикальної зверху відкритої труби нагнітають при постійній витраті цементний розчин. Труба заповнена насиченим водою піском стабільної густини. У працях [8, с. 1215], [10, с. 5], [11, с. 230] наведено відповідно такі значення діаметрів труб: $d = 0{,}07 \pm 0{,}005$ м, $d = 0{,}08 \pm 0{,}005$ м, $d = 0{,}1 \pm 0{,}05$ м. Така низька точність вхідних параметрів може бути результатом значної похибки числового розрахунку, що, своєю чергою, може вплинути на інформативність вищезгаданого порівняння.

Проілюструвати вплив величин похибок порівнюваних величин на інформативність порівняння можна, розглянувши таку модельну задачу. Припустимо, що дві порівнювані величини можуть приймати тільки цілі значення з однаковою ймовірністю на відрізках з довжинами $2 \cdot n_1 + 1$ та $2 \cdot n_2 + 1$ відповідно. Припустимо, що під час такого порівняння їх значення точно збіглися і що $n_1 < n_2$. Кількість випадків, коли реалізації цих величин збігаються, рівна $(2 \cdot n_1 + 1) \cdot (2 \cdot n_2 + 1)$, а кількість випадків коли ці реалізації збігаються за умови, що самі величини однакові, рівна $2 \cdot n_1 + 1$. Звідси можна зробити висновок, що у випадку, коли реалізації цих двох величин однакові, ймовірність того, що самі ці величини збігаються, рівна $1/(2 \cdot n_2 + 1)$. Так можна дійти висновку, що для підвищення інформативності порівняння результатів чисельного розрахунку з результатами лабораторного вимірювання необхідно підвищувати точність порівнюваних величин.

У моделях описаного стандартного лабораторного дослідження [8, с. 1215–1216], [10, с. 5–7], [11, с. 230–233] в шуканих функціях наявні ділянки високих градієнтів, положення яких змінюється в часі і невідомі наперед, тому в кожному випадку для оцінки похибки слід виконувати аналіз числових розв’язків [3, с. 35]. Основним недоліком цих моделей є те, що розрахунки потребують значних комп’ютерних ресурсів [10, с. 7]. Це можна пояснити тим, що вони є неузгодженими початково-крайовими задачами для системи диференційних рівнянь у часткових похідних, і тому їх дискретизації виконують на достатньо грубих сітках [8, с. 1220], а числові розв’язки шукають за допомогою ітераційних процедур [10, с. 5]. При цьому у кожному випадку припускають, що при виконанні умови закінчення ітераційного процесу знайдений числовий розв’язок відрізняється від числового розв’язку узгодженої моделі досліджуваного процесу на величину меншу ніж похибка апроксимації. Високі вимоги до продуктивності обчислювальної машини роблять проблемним виконання вищезгаданого аналізу. Тому необхідно створювати узгоджені моделі процесу поширення в’яжучого розчину під час нагнітання.

Мета цієї праці – формулювання узгодженої моделі вищеописаного лабораторного дослідження, яка враховує конвекцію, дисперсію та дифузію і в якій скелет ґрунту вважається абсолютно твердим.

Теоретичні відомості з моделювання нагнітання цементного розчину в насичене пористе середовище. Тут розглянуто нагнітання цементного розчину в насичений водою абсолютно твердий нерухомий та не абсорбуючий скелет ґрунту $(\partial m/\partial t = 0)$, де тут і надалі m – пористість середовища. Усюди в цьому дослідженні вважатимемо, що $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ і що вісь x_3 направлена вертикально вгору. Рівняння балансу цементу в розчині має такий вигляд [7, с. 422]:

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = -m\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\nabla} c + \vec{\nabla} \cdot m \cdot \widehat{\mathbf{D}}_{\mathrm{h}} \cdot \vec{\nabla} c, \qquad (1)$$

де тут і надалі c – концентрація цементу в рідкій фазі, $\vec{\mathbf{V}}$ – вектор усередненої за об’ємом швидкості частинок рідкої фази, $\widehat{\mathbf{D}}_{\mathrm{h}}$ – тензор гідродинамічної дисперсії. $\vec{\mathbf{V}}$ та $\widehat{\mathbf{D}}_{\mathrm{h}}$ обчислюємо за такими формулами [7, с. 174], [7, с. 403–404]:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{V}} &= -\frac{K}{\mu \cdot m}(\vec{\nabla} p + \rho g \vec{\nabla} x_3), \\ \widehat{\mathbf{D}}_{h,i,j} &= (a_T V + D^*)\delta_{i,j} + (a_L - a_T)\frac{V_i V_j}{V}, \end{aligned} \qquad (2)$$

де тут і надалі μ – в’язкість рідкої фази, ρ – її густина, K – проникність пористого середовища, p – тиск рідини в порах, g – прискорення вільного падіння, $i,\ j = \overline{1,3}$, a_L, a_T – коефіцієнти, повздовжньої та поперечної дисперсій, відповідно, D^* – коефіцієнт дифузії. Рівняння балансу рідкої фази є таким [7, с. 435]:

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{\mathbf{q}}, \qquad (3)$$

де тут і надалі $\vec{\mathbf{q}}$ – вектор потоку рідкої фази, який обчислюється за такою формулою [7, с. 435]:

$$\vec{\mathbf{q}} = -\frac{K}{\mu} \cdot (\vec{\nabla} p + \rho g \vec{\nabla} x_3). \qquad (4)$$

Припускаємо, що загальний вид залежності густини від тиску та концентрації на макроскопічному рівні опису є таким самим, як і на мікроскопічному рівні [7, с. 435] :

$$\rho = \rho_{\mathrm{imp}}\left\{1 + \beta_p(p - p_{\mathrm{imp}}) + \beta_c(c - c_{\mathrm{imp}})\right\}, \qquad (5)$$

де тут і надалі ρ_{imp}, p_{imp} та c_{imp} – відповідно, густина рідкої фази, її тиск та концентрація цементу в рідкій фазі всередині інжектора, а β_p та β_c – відповідно, коефіцієнт стисливості рідкої фази за постійної концентрації цементу в ній та коефіцієнт концентрації цементу в рідкій фазі за постійного тиску останньої. При цьому β_p та β_c визначаються експериментально. Ми також припускаємо, що в’язкість рідкої фази є лінійною функцією її концентрації [10, с. 3] :

$$\mu = (\mu_g - \mu_w)\frac{c}{c_{\mathrm{imp}}} + \mu_w, \qquad (6)$$

де тут і надалі μ_g – в’язкість цементного розчину в інжекторі, μ_w – в’язкість води.

Початкові умови записуємо так:

$$p(x_1, x_2, x_3, 0) = p_0,\ c(x_1, x_2, x_3, 0) = c_0, \qquad (7)$$

де p_0 та c_0 – функції координат x_1, x_2, x_3.

У тих випадках, коли $c(\mathbf{x}, t)$ або $p(\mathbf{x}, t)$ можуть бути задані як відомі функції $f_1(\mathbf{x}, t)$ у всіх точках сегменту межі B, наприклад, внаслідок явищ, які мають місце в навколишньому середовищі області, де шукаємо розв’язок задачі, і які не залежать від того, що відбувається в цій області, ми пишемо граничні умови так [7, с. 430] :

$$p(\mathbf{x}, t) = f_1(\mathbf{x}, t) \text{ або } c(\mathbf{x}, t) = f_1(\mathbf{x}, t), \ \mathbf{x} \in B. \quad (8)$$

Коли явища, які відбуваються в навколишньому середовищі області, де шукаємо розв'язок задачі, є причиною заданого потоку цементу або рідкої фази $f_2(\mathbf{x}, t)$ нормального до сегменту межі B у кожній точці останнього незалежно від того, що відбувається в цій області, ми пишемо граничні умови так [7, с. 431] :

$$\begin{aligned} &\{c\vec{\mathbf{q}} - m\widehat{\mathbf{D}}_{\mathrm{h}} \cdot \vec{\nabla} c\} \cdot \vec{\nu} = f_2(x,t) \\ &\vec{\mathrm{q}} \cdot \vec{\nu} = f_2(\mathbf{x},t) \ \mathbf{x} \in B, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\vec{\nu}$ – вектор зовнішньої нормалі до B в точці X.

Математична модель. Розглянемо модель лабораторного дослідження, представленого у дослідженні [10, с. 5–7] та описаного у вступі. Будемо вважати, що початок координат розміщено у центрі нижньої основи труби. Якщо підставити рівняння (4), (5) в рівняння (3), то легко отримати наступне

$$m\beta_p \frac{dp}{dt} + m\beta_c \frac{dc}{dt} - \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{imp}}} \vec{\nabla}\left(\frac{K}{\mu}(\vec{\nabla}p + \rho g \vec{\nabla} x_3)\right) = 0, \quad (10)$$

де тут і надалі $d(\,)/dt = \partial(\,)/\partial t + \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\nabla}(\,)$ є матеріальною похідною для рідкої фази. Для цементного розчину $\beta_c = 0$ [10, с. 2; 8, с. 1197]. Оскільки для даного дослідження $\beta_p \cdot p_{imp} << 1$ [10, с. 5–7], то надалі згідно з рівнянням (5) будемо вважати, що

$$\rho = \rho_{imp}. \quad (11)$$

Введемо такі позначення R, L – внутрішній радіус та довжина труби, T – час нагнітання, ε – константа, яка є такою, що $0 \underline{<} \varepsilon \underline{<} L$, Ω – круг (сукупність точок (x_1, x_2): $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R$), Q = $= \Omega \cdot (-\varepsilon, L)$ – циліндр (сукупність точок (x_1, x_2, x_3): $(x_1, x_2) \in \Omega$, $x_3 \in (-\varepsilon, L)$). S_1 – нижня основа Q (сукупність точок (x_1, x_2, $-\varepsilon$): $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$), S_2 – бічна поверхня Q (сукупність точок (x_1, x_2, x_3): $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $x_3 \in (-\varepsilon, L)$), S_3 – верхня основа Q (сукупність точок (x_1, x_2, L): $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$). $Q_T = Q \times (0, T)$ – чотирьохмірний циліндр (сукупність точок (x_1, x_2, x_3, t):$(x_1, x_2, x_3) \in Q$, $t \in (Q,T)$), S_{T1} – нижня основа Q_T (сукупність точок (x_1, x_2, $-\varepsilon$, t):$(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$, $t \in [Q,T]$), S_{T2} – бічна поверхня Q_T (сукупність точок (x_1, x_2, x_3, t): $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $x_3 \in [-\varepsilon, L]$, $t \in [Q,T]$), S_{T3} – верхня основа Q_T (сукупність точок (x_1, x_2, L, t):$(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$, $t \in [Q,T]$). На основі рівнянь (1), (2), (6), (10) та (11) можна дійти висновку, що в умовах дослідження [10, с. 5–7], якщо $(x_1, x_2, x_3, t) \in Q_T$, процес поширення цементного розчину в насиченому водою абсолютно твердому нерухомому та не абсорбуючому скелеті ґрунту описується такими рівняннями

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = -m\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\nabla} c + \vec{\nabla} \cdot m\widehat{\mathbf{D}}_{\mathbf{h}} \cdot \vec{\nabla} c, \quad (12)$$

$$m\beta_p \frac{dp}{dt} - \vec{\nabla}\left(\frac{K}{\mu}(\vec{\nabla}p + \rho g \vec{\nabla} x_3)\right) = 0, \quad (13)$$

де якщо $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T$, то

$$\vec{\mathbf{V}} = -\frac{K}{\mu \cdot m}(\vec{\nabla}p + \rho g \vec{\nabla} x_3), \quad (14)$$

$$\rho = \rho_{\mathrm{imp}}, \ \mu = (\mu_g - \mu_w)\frac{c}{c_{\mathrm{imp}}} + \mu_w, \quad (15)$$

$$\widehat{\mathsf{D}}_{\mathsf{h,i,j}} = (a_T V + D^*)\delta_{i,j} + (a_L - a_T)\frac{V_i V_j}{V}, \quad (16)$$

Для побудови математичної моделі цього дослідження необхідно систему рівнянь (12), (13) доповнити початковими та крайовими умовами. Оскільки інфільтрат починає нагнітатись у трубу, заповнену насиченим чистою водою піском у момент часу t =0, то на основі другого з рівнянь (7) початкову умову на функцію концентрації цементу в рідкій фазі, коли $(x_1, x_2, x_3) \in \bar{Q}$, записуємо так

$$c(x_1, x_2, x_3, 0) = (1 - f_\theta(\alpha_0 x_3)) \cdot c_{\mathrm{imp}}, \quad (17)$$

де тут і надалі α_0 – константа, яка є такою, що $\alpha_0 \cdot \varepsilon >> 1$, а $f_\theta(\alpha_0 x_3)$ прямує при $\alpha \to +\infty$ до функції типу сходинка [4, с. 677]

$$\Theta(x_3) = \begin{cases} 0, \text{ при } x_3 < 0, \\ 1/2, \text{ при } x_3 = 0, \\ 1, \text{ при } x_3 > 0. \end{cases}$$

Початкову умову на функцію тиску рідини в порах шукаємо у

$$p(x_1, x_2, x_3, 0) = g_1(x_3) + (g_2(x_3) - g_1(x_3)) f_\theta(\alpha_1 x_3), \quad (18)$$

де тут і надалі α_1 – константа, яка є такою, що $\alpha_1 \cdot \varepsilon > 1$. Припускаючи, що в початковий момент часу тиск у трубі був розподілений по гідростатичному закону і що за нуль тиску вибрано атмосферний тиск, отримуємо

$$g_2(x_3) = \rho g (L - x_3). \quad (19)$$

Оскільки інфільтрат у нижній кінець труби нагнітається з постійною витратою q_{imp}, то $g_1(x_3)$ знаходимо з розв'язку наступного рівняння

$$-\frac{K}{\mu_g}\left(\frac{dg_1(x_3)}{dx_3} + \rho \cdot g\right) = mV_0, \quad (20)$$

де тут і надалі $V_0 = \dfrac{q_{\mathrm{imp}}}{S \cdot m}$, S – площа поверхні розділу між інжектором та ґрунтом. Загальний розв'язок рівняння (20) має такий вигляд

$$g_1(x_3) = -\left(\frac{\mu_g m V_0}{K} + \rho g\right) x_3 + A, \quad (21)$$

де A – константа, значення якої знаходимо з умови неперервності функції тиску при $\alpha_1 \to +\infty$

$$g_1(0) = \rho \cdot g \cdot L. \quad (22)$$

З рівнянь (21) та (22) випливає, що

$$g_1(x_3) = -\frac{\mu_g m V_0}{K} x_3 + \rho g (L - x_3). \quad (23)$$

На основі рівнянь (18), (19) та (23) початкову умову на функцію тиску рідини в порах, маючи на увазі, що $(x_1, x_2, x_3) \in \bar{Q}$, записуємо в такому вигляді

$$p(x_1,x_2,x_3,0)=\rho g(L-x_3)+ \\ +\frac{\mu_g m V_0}{K}x_3(f_\theta(\alpha_1 x_3)-1). \quad (24)$$

Усюди у даній роботі $\vec{\mathbf{l}}_1, \vec{\mathbf{l}}_2$ та $\vec{\mathbf{l}}_3$ – вектори зовнішніх щодо внутрішності труби нормалей до, відповідно, поверхонь S_1, S_2 та S_3. Оскільки бічна поверхня труби є непроникною, то на основі рівняння (4) та обох рівнянь (9) формулюємо такі граничні умови, маючи на увазі, що $(x_1,x_2,x_3,t)\in S_{T,2}$:

$$\begin{aligned}&\frac{K\cdot c}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial \vec{\mathbf{l}}_2}+\rho g\frac{\partial x_3}{\partial \vec{\mathbf{l}}_2}\right)+m\widehat{\mathbf{D}}_\mathbf{h}\frac{\partial c}{\partial \vec{\mathrm{l}}_2}=0,\\ &\frac{K\cdot c}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial \vec{\mathbf{l}}_2}+\rho g\frac{\partial x_3}{\partial \vec{\mathbf{l}}_2}\right)=0.\end{aligned} \quad (25)$$

Підставляючи в рівняння (4) рівняння (24), знаходимо величину $\vec{\mathbf{q}}$, коли t = 0 та $\mathbf{x}\in S_1$

$$\vec{\mathbf{q}}=-\frac{\mu_g m V_0}{\mu_{0,0}}\left(1-f_\theta(\alpha_1 x_3)-x_3\frac{df_\theta}{dx_3}(\alpha_1 x_3)\right)_{x_3=-\varepsilon}\vec{\mathbf{l}}_1, \quad (26)$$

де тут і надалі

$$\mu_{0,0}=(\mu_g-\mu_w)(1-f_\theta(-\alpha_0\varepsilon))+\mu_w.$$

На основі рівняння (17) значення концентрації цементу в рідкій фазі в початковий момент часу, коли $(x_1,x_2,x_3)\in S_1$, є таким

$$c(x_1,x_2,x_3,0)=(1-f_\theta(-\alpha_0\varepsilon))\cdot c_{\text{imp}}. \quad (27)$$

Оскільки в лабораторному дослідженні цементний розчин при постійній витраті нагнітається в нижній кінець труби, то для того, щоб забезпечити узгодженість моделі, фіксуємо потік рідкої фази через поверхню S_1 та значення концентрації цементу в рідкій фазі, коли $\mathbf{x}\in S_1$. На основі рівнянь (4), (26), (27), другого з рівнянь (9) та другого з рівнянь (8) формулюємо такі граничні умови, коли $(x_1,x_2,x_3,t)\in S_{T,1}$, які це забезпечують:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}=-\frac{\mu_g\cdot m\cdot V_0}{K}\left(1-f_\theta(\alpha_1 x_3)-x_3\frac{df_\theta}{dx_3}(\alpha_1 x_3)\right)- \\ -\rho\cdot g, \quad (28)$$

$$c(x_1,x_2,x_3,t)=(1-f_\theta(-\alpha_0\varepsilon))\cdot c_{\text{imp}}. \quad (29)$$

У рівнянні (28) використано те, що, коли $\mathbf{x}\in S_1$, $\mu(\mathbf{x},t)=\mu(\mathbf{x},0)$. На основі рівняння (24) значення тиску рідини в порах у початковий момент часу, якщо $(x_1,x_2,x_3)\in S_3$, є таким:

$$p(x_1,x_2,x_3,0)=\frac{\mu_g m V_0}{K}L(f_\theta(\alpha_1 L)-1). \quad (30)$$

Оскільки труба згори відкрита, то тиск на її горішньому кінці має бути нульовим. Оскільки права частина рівняння (30) прямує до нуля при $\alpha_1\to+\infty$, то для забезпечення узгодженості моделі на основі першого з рівнянь (8) та рівняння (30) формулюємо таку граничну умову, коли $(x_1,x_2,x_3,t)\in S_{T,3}$:

$$p(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{\mu_g m V_0}{K}L(f_\theta(\alpha_1 L)-1). \quad (31)$$

З рівняння (17) отримуємо значення $\vec{\nabla}c$ в початковий момент часу при $(x_1,x_2,x_3)\in S_3$

$$\vec{\nabla}c=-c_{\text{imp}}\frac{df_\theta(\alpha_0 x_3)}{dx_3}\vec{\mathbf{l}}_3.$$

З останнього рівняння, рівнянь (14) – (16) та (24) отримуємо таке значення $\widehat{\mathbf{D}}_\mathbf{h}\vec{\nabla}c$ в початковий момент часу, коли $(x_1,x_2,x_3)\in S_3$:

$$\widehat{\mathbf{D}}_\mathbf{h}\vec{\nabla}c=-c_{\text{imp}}\frac{df_\theta(\alpha_0 x_3)}{dx_3}(a_L V_{L,0}+D^*)\vec{\mathbf{l}}_3. \quad (32)$$

де тут і надалі

$$V_{L,0}=\frac{\mu_g V_0}{\mu_{L,0}}\left(1-f_\theta(\alpha_1 x_3)-x_3\frac{df(\alpha_1 x_3)}{dx_3}\right)_{x_3=L},$$

$$\mu_{L,0}=(\mu_g-\mu_w)(1-f_\theta(\alpha_0 L))+\mu_w.$$

Припускаючи, що на верхньому кінці труби в будь-який час потік рідкої фази є неперервним, для того, щоб забезпечити узгодженість моделі, на основі першого з рівнянь (9) та рівняння (32) формулюємо таку граничну умову, коли $(x_1,x_2,x_3)\in S_3$:

$$\widehat{\mathbf{D}}_\mathbf{h}\vec{\nabla}c=-c_{\text{imp}}\frac{df_\theta(\alpha_0 x_3)}{dx_3}(a_L V_{L,0}+D^*)\vec{\mathbf{l}}_3. \quad (33)$$

Зауважимо, що одним із недоліків моделі представленої у праці [10, с. 1–3], є те, що вона – неузгоджена початково-крайова задача для системи диференційних рівнянь у часткових похідних. Оскільки за будь-яких кінцевих α_0, α_1 та ε, початкові та граничні умови задачі (12), (13), (17), (24), (25), (28), (29), (31), (33) на лініях перетину поверхонь S_1, S_2 та S_2, S_3 є узгодженими, то в ній цей недолік відсутній.

Означення 1. Класичним розв'язком задачі (12), (13), (17), (24), (25), (28), (29), (31), (33) називаютимемо функції $c(x_1,x_2,x_3,t)$ та $p(x_1,x_2,x_3,t)$, які неперервні на $\bar{Q}_T$. Для цих функцій мають існувати та бути неперервними в $\bar{Q}_T$ похідні першого порядку по всіх змінних та похідні другого порядку по просторових координатах. Крім того, вони мають задовольняти у всіх точках Q_T рівнянням (12), (13), за таких значень змінних, що t = 0 та $(x_1,x_2,x_3)\in Q$, умовам (17), (24), при $(x_1,x_2,x_3,t)\in S_{T,1}$ умовам (28), (29), при $(x_1,x_2,x_3,t)\in S_{T,2}$ умовам (25) і, нарешті, при $(x_1,x_2,x_3,t)\in S_{T,3}$ умовам (31), (33).

Введемо такі позначення $I=(-\varepsilon,L)$ – інтервал (сукупність точок (x_3): $x_3\in(-\varepsilon,\ L)$). $I_T=I\times(0,T)$ – прямокутник (сукупність точок (x_3, t): $x_3\in I$, $t\in(0,\ T)$), $A_{T,1}$ – нижня основа I_T (сукупність точок ($-\varepsilon$, t): $t\in[0,\ T]$), $A_{T,2}$ – верхня основа I_T (сукупність точок (L, t):$t\in[0,\ T]$).

Розглянемо таку початково-крайову задачу. Якщо (x_3, t)$\in I_T$, то

$$m\frac{\partial\tilde{c}}{\partial t}=-m\tilde{V}\cdot\frac{\partial\tilde{c}}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(mD_h\cdot\frac{\partial\tilde{c}}{\partial x_3}\right),\quad(34)$$

$$m\beta_p\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}+\tilde{V}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_3}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{K}{\tilde{\mu}}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_3}+\rho g\right)\right)=0,\quad(35)$$

де

$$\tilde{V}=-\frac{K}{\mu\cdot m}\cdot\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_3}+\rho g\right),\ \rho=\rho_{\text{imp}},\ \tilde{\mu}=(\mu_g-\mu_w)\frac{\tilde{c}}{c_{\text{imp}}}+\mu_w,$$

$D_h=a_L\tilde{V}+D^*$, коли $(x_3,t)\in\bar{I}_T$,

$$\tilde{p}=\rho g(L-x_3)+\frac{\mu_g mV_0}{K}x_3(f_\theta(\alpha_1x_3)-1),\quad(36)$$

$$\tilde{c}=(1-f_\theta(\alpha_0x_3))\cdot c_{imp},\quad(37)$$

коли $t = 0$ та $x_3\in\bar{I}$,

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_3}=-\frac{\mu_g mV_0}{K}\left(1-f_\theta(\alpha_1x_3)-x_3\frac{df_\theta}{dx_3}(\alpha_1x_3)\right)-\rho\cdot g,\quad(38)$$

$$\tilde{c}=c_{\text{imp}}(1-f_\theta(-\alpha_0\varepsilon)),\quad(39)$$

у всіх точках множини $A_{T,1}$,

$$\tilde{p}=\frac{\mu_g mV_0}{K}L(f_\theta(\alpha_1L)-1),\quad(40)$$

$$\frac{\partial\tilde{c}}{\partial x_3}=-c_{\text{imp}}\frac{df_\theta(\alpha_0x_3)}{dx_3}\frac{a_LV_{L,0}+D^*}{a_L\tilde{V}+D^*}\quad(41)$$

у всіх точках множини $A_{T,2}$. **Означення 2.** Класичним розв'язком задачі (34) – (41) називатимемо функції $c(x_3, t)$ та $p(x_3, t)$, які неперервні на $\bar{I}_T$. Для цих функцій повинні існувати та бути неперервними в $\bar{I}_T$ похідні першого порядку по всіх змінних та похідні другого порядку по просторовій координаті. Крім того, вони мають задовольняти у всіх точках $\bar{I}_T$ рівнянням (34), (35), за таких значень змінних, що $t = 0$ та $x_3\in\bar{I}_T$ умовам (36), (37), коли $(x_3, t)\in A_{T,1}$, умовам (38), (39) і, коли $(x_3, t)\in A_{T,2}$, умовам (40), (41).

Надалі будемо вважати правильними такі теореми. **Теорема 1.** Якщо класичний розв'язок задачі (12), (13), (17), (24), (25), (28), (29), (31), (33) існує, то він єдиний. **Теорема 2.** Класичний розв'язок задачі (34) – (41) існує і він єдиний. За умови, що правильною є теорема 2, правильною є така теорема. **Теорема 3.** Класичний розв'язок задачі (12), (13), (17), (24), (25), (28), (29), (31), (33) існує і такий

$$c(x_1,x_2,x_3,t)=\tilde{c}(x_3,t),\ p(x_1,x_2,x_3,t)=\tilde{p}(x_3,t),\quad(42)$$

де $(x_1,x_2,x_3,t)\in\bar{Q}_T$, а набір функцій $\tilde{c}(x_3,t)$ та $\tilde{p}(x_3,t)$ є класичним розв'язком задачі (34) – (41).

Доведення. Оскільки функції $\tilde{c}(x_3,t)$ та $\tilde{p}(x_3,t)$ є класичним розв'язком задачі (34) – (41), то вони є неперервними на $\bar{I}_T$. Для цих функцій існують та є неперервними в $\bar{I}_T$ похідні першого порядку по змінних x_3 та t та похідні другого порядку по x_3. Крім того, вони задовольняють у всіх точках $\bar{I}_T$ рівнянням (34), (35) за таких значеннях змінних, що $t = 0$ та $x_3\in\bar{I}_T$, умовам (36), (37), при $(x_3, t)\in A_{T,1}$ умовам (38), (39), при $(x_3, t)\in A_{T,2}$ умовам (40), (41). Оскільки $\tilde{c}(x_3,t)$ та $\tilde{p}(x_3,t)$ не залежать від змінних x_1 та x_2, то похідні першого та другого порядків функцій $c(x_1,x_2,x_3,t)$, $p(x_1,x_2,x_3,t)$, які задані рівнянням (42), по змінних x_1, x_2 рівні нулю при $(x_1,x_2,x_3,t)\in\bar{Q}_T$. Тому можна стверджувати, що функції $c(x_1,x_2,x_3,t)$, $p(x_1,x_2,x_3,t)$ є неперервними на $\bar{Q}_T$, для цих функцій існують та є неперервними в $\bar{Q}_T$ похідні першого порядку по всіх змінних та похідні другого порядку по просторовими координатами. Оскільки функції $\tilde{c}(x_3,t)$, $\tilde{p}(x_3,t)$ при $(x_3, t)\in\bar{I}_T$ задовольняють рівняння (34), (35) за таких значень змінних, що $t = 0$ та $x_3\in\bar{I}$ задовольняють рівняння (36), (37), при $(x_3,t)\in\bar{A}_{T,1}$ задовольняють рівняння (38), (39), при $(x_3,t)\in\bar{A}_{T,2}$ задовольняють рівняння (40), (41), то безпосередньою підстановкою легко переконатись, що функції $c(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, задані при $(\mathbf{x},t)\in\bar{Q}_T$ рівняннями (42), задовольняють рівняння (12), (13) при $(\mathbf{x},t)\in Q_T$, рівняння (17), (24) при $t = 0$ та $\mathbf{x}\in\bar{Q}$, рівняння (28), (29) при $(\mathbf{x},t)\in S_{T,1}$, рівняння (31), (33), у всіх точках множини $S_{T,3}$. Оскільки функції $\tilde{c}(x_3,t)$, $\tilde{p}(x_3,t)$, не залежать від x_1 та x_2, а вісь x_3 є перпендикулярною до вектора $\vec{\mathbf{l}}_2$, то ці функції задовольняють також рівняння (25), коли $(\mathbf{x},t)\in S_{T,2}$. Таким чином, згідно з означення 1 функції $c(x_1,x_2,x_3,t)$, $p(x_1,x_2,x_3,t)$, задані рівняннями (42), при $(x_1,x_2,x_3,t)\in\bar{Q}_T$, є класичним розв'язком задачі (12), (13), (17), (24), (25), (28), (29), (31), (33). Теорему доведено. На основі останньої теореми моделлю лабораторного дослідження [10, с. 5–7] можна вважати задачу (34)–(41).

Висновки. Тут сформульовано модель лабораторного дослідження [10, с. 5–7], яка є узгодженою початково-крайовою задачею для системи диференційних рівнянь у часткових похідних.

Для цієї моделі буде виконано аналіз числових розв'язків, на основі якого будуть підібрані значення констант α_0, α_1, ε і буде оцінено похибку числового розрахунку.

Література

1. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений / Н. Н. Веригин // Изв. Акад. Наук СССР отд. техн. наук, 1952. – № 5. – 674–687.
2. Власюк А. П. Застосування числових конформних відображень до розв'язання крайової задачі з рухомою межею для рівняння параболічного типу у криволінійному чотирикутнику / А. П. Власюк, М. Б. Демчук, М. М. Обезюк // Вісн. Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2007. – Вип. 4 (40). Част. 3. – С. 268–286.

3. Демчук М. Б. Математичне моделювання процесу нагнітання в'яжучого розчину в пористе середовище / М. Б. Демчук // Математичне та комп'ютерне моделювання : зб. наук. пр. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010 – Вип. 4. – С. 61–75.
4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Л. Прандтль; [пер. с немец. Г. А. Вольперта]. – М. : Изд-во иностр. лит., 1951. – 575 с.
6. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику / Р. П. Федоренко. – М.: Издательство Московского физико-технического института, 1994. – 526 с.
7. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990. – 553 p.
8. Bouchelaghem F. Mathematical and numerical filtration-advection-dispersion model of miscible grout propagation in saturated porous media / F. Bouchelaghem, L. Vulliet // International journal for numerical and analytical methods in Geomechanics. – 2001. – Vol. 25, № 12. – P. 1195–1227.
9. Chupin O. Modeling of a semi-real injection test in sand / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher // Computers and Geotechnics. – 2009. – Vol. 36. – P. 1039-1042.
10. Chupin O. Numerical modeling of cement grout injection in saturated porous media / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher [electronic resource] : Proceedings of the 16th Engineering Mechanics conference, (University of Washington, Seatle, 2003). – Режим доступу : www.ce.washington.edu/em03/proceedings/papers/627.pdf. – Назва з екрана.
11. Chupin O. The effects of filtration on the injection of cement-based grouts in sand columns / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher // Transport in porous media. – 2008. – Vol. 72. – P. 227–240.
12. Sharma M. M. Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation / M. M. Sharma, Y. C. Yortsos // American Institute of Chemical Engineers Journal. – 1987. – Vol. 33.
13. Vlasyuk A. P. Numerical solution of a problem of giving water-side structure foundation strength / A. P. Vlasyuk, M. B. Demchuk // Scientific Bulletin of Chelm. Section of mathematics and computer science. – 2007. – No 1. – P. 211–222.

M. Demchuk

A MODEL OF A CEMENT GROUT INJECTION IN A SATURATED POROUS MEDIUM WITH BOUNDARY CONDITIONS CONFORMING TO INITIAL ONES

A mathematical model of a standard laboratory test of a cement grout injection in a saturated porous medium with boundary conditions conforming to conditions at the initial moment of time is formulated.

Keywords: mathematical model, a standard laboratory test of a cement grout injection in a saturated porous medium, boundary condition, initial condition, a system of equations in partial derivatives.

Матеріал надійшов 22 квітня 2011 р.