УДК 510.6

Касьянюк В. С., Малютенко Л. М., Польща М. В.

ПОБУДОВА ЛОГІКИ НЕЧІТКИХ ПРЕДИКАТІВ ТА АЛГЕБРИ НЕЧІТКИХ РЕЛЯЦІЙ НА БАЗІ ТЕОРЕТИКО-МОЖЛИВІСНОГО ПІДХОДУ

На базі теоретико-можливісного підходу запропоновано спеціальне уточнення поняття нечіткого предиката та нечіткої реляції. Введено операції над нечіткими предикатами – логічні зв'язки та квантори. На основі логіки нечітких предикатів збудовано алгебру нечітких реляцій, сигнатурою якої є операції об'єднання, перетину, віднімання, добутку, проекції та селекції.

Ключові слова: теоретико-можливісний підхід, нечіткий предикат, нечітка реляція, логічні зв'язки.

Продуктивним методом моделювання предметних областей, що враховує нечіткість та неповноту наявної інформації, є теоретико-можливісний підхід [1, 2]. Такий підхід є певною мірою ортогональним до традиційного теоретико-ймовірнісного підходу, хоча й досить споріднений з ним. Тому важливою і актуальною є проблема розробки логічних формалізмів, орієнтованих на теоретико-можливісний підхід. Такі логіки базуються на класах нечітких предикатів [3, 4].

До найважливіших застосувань нечітких предикатів належить обробка даних за нечіткими критеріями. Дійсно, задача обробки інформації в реляційних базах даних, які широко використовуються для збереження та обробки інформації, зводиться до формулювання критеріїв у вигляді предикатів. При цьому дуже часто виникають ситуації, коли критерії обробки мають нечіткий або невизначений характер. Наприклад, необхідно описати такі поняття, як більшість, майже всі, декілька тощо. Зрозуміло, що у цьому випадку формулювання відповідного до критеріїв предиката неможливо здійснити традиційними засобами. Для розв'язку таких задач можна ефективно застосувати теоретико-можливісний математичний апарат, що дозволяє змоделювати нечіткість та невизначеність і оцінити їх за допомогою мір можливості та необхідності. Запити до баз даних природно формулювати у вигляді нечітких предикатів, а результат запитів – у вигляді нечітких множин (реляцій).

1. Нечіткі предикати

Нехай $(X, 2^X, P)$ – деякий можливісний [2] простір, $(X, 2^X, N)$ – відповідний йому необхідносний простір. Нехай ξ – канонічний нечіткий елемент на просторі $(X, 2^X, P)$, $\phi^\xi : X\to[0,1]$ – розподіл елемента ξ. Під *предикатом* на множині A звичайно розуміють ([5]) довільну часткову функцію вигляду $p : A \to \{T, F\}$.

Нехай $p : X\times D \to \{T, F\}$ – деякий предикат на $X\times D$. Областю істинності предиката p називають [5] множину $T_p(x) = \{d\,|\,p(x, d) = T\}$.

Нечітким предикатом, визначеним на множині D, назвемо функцію

$$p^\xi : (X\to[0,1])\times D \to \{T, F\},$$

визначену таким чином:

$$p^\xi(d) = p(\mathrm{pr}_1(\phi^\xi), d),\ \ d\in D.$$

Предикат p назвемо *базовим* для нечіткого предикату p^ξ. *Областю істинності* нечіткого предикат p^ξ назвемо нечітку множину $T_{p^\xi} : X \to 2^D$ таку, що подія $\{p^\xi(d)\}$ еквівалентна події $\{d \in T_{p^\xi}\}$. Звідси випливає, що подія $\{\neg p^\xi(d)\}$ еквівалентна події $\{d \notin T_{p^\xi}\}$. Таким чином, простір подій $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ із множиною елементарних подій

$$\Omega^* = \bigcup_{d\in D} (p^\xi(d)\} \cup \{\neg p^\xi(d)\})$$

еквівалентний простору $(\Omega, 2^\Omega)$ із множиною елементарних подій

$$\Omega = \bigcup_{d\in D} (\{d \in T_{p^\xi}\} \cup \{d \notin T_{p^\xi}\}).$$

Позначимо міри можливості в просторах $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ та $(\Omega, 2^\Omega)$ як $\mathbf{P}^{\Omega^*}$ та $\mathbf{P}^\Omega$. Міри необхідності в просторах $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ та $(\Omega, 2^\Omega)$ позначимо як $\mathbf{N}^{\Omega^*}$ та $\mathbf{N}^\Omega$. Нехай $\mu_{T_{p^\xi}} : D \to[0,1]$ – характеристична функція нечіткої множини $T_{p^{\xi}}$. Тепер можна підрахувати можливості та необхідності подій $\{p^{\xi}(d)\}$ та $\{\neg p^{\xi}(d)\}$:

$$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi}(d)\}) = \mathbf{P}^{\Omega}(\{d \in T_{p^{\xi}}\}) =$$
$$\mathbf{P}(\{x \mid d \in T_p(x)\}) = \mu_{T_{p^{\xi}}}(d);$$

$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi}(d)\}) = \mathbf{N}^{\Omega}(\{d \in T_{p^{\xi}}\}) =$$
$$\mathbf{N}(\{x \mid d \in T_p(x)\}) = \theta(\mathbf{P}(\{x \mid d \in D\backslash T_p(x)\})) =$$
$$\theta(\mu_{D\backslash T_{p^{\xi}}}(d));$$

$$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{\neg p^{\xi}(d)\}) = \mathbf{P}^{\Omega}(\{d \notin T_{p^{\xi}}\}) =$$
$$\mu_{D\backslash T_{p^{\xi}}}(d)\ \mu_{D\backslash T_{p^{\xi}}}(d) = \mathbf{P}(\{x \mid d \in D\backslash T_p(x)\}) =$$
$$\theta(\mathbf{N}(\{x \mid d \in T_p(x)\}));$$

$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{\neg p^{\xi}(d)\}) = \mathbf{N}^{\Omega}(\{d \notin \{d \notin T_{p^{\xi}}\})$$
$$= \mathbf{N}(\{x \mid d \in D\backslash T_p(x)\}) = \theta^{-1}(\mathbf{P}(\{x \mid d \in T_p(x)\})) = \theta^{-1}(\mu_{T_{p^{\xi}}}(d)).$$

Тут $\theta : [0,1] \to [0,1]$ – бієктивна строго монотонно спадна функція на [0,1]; для такої функції $\theta(0) = 1$ та $\theta(1) = 0$.

Таким чином, має місце

Теорема 1. *Можливість та необхідність подій* $\{p^{\xi}(d)\}$ *і* $\{\neg p^{\xi}(d)\}$ *задаються так*:

$$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi}(d)\}) = \mu_{T_{p^{\xi}}}(d);$$
$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi}(d)\}) = \theta(\mu_{D\backslash T_{p^{\xi}}}(d));$$
$$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{\neg p^{\xi}(d)\}) = \theta(\mathbf{N}(\{x \mid d \in T_p(x)\}));$$
$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{\neg p^{\xi}(d)\}) = \theta^{-1}(\mu_{T_{p^{\xi}}}(d)).$$

Як наслідок отримуємо:

$$\mathbf{P}(\{p^{\xi}\}) = \theta(\mathbf{N}(\{\neg p^{\xi}\})),$$
$$\mathbf{N}(\{p^{\xi}\}) = \theta^{-1}(\mathbf{P}(\{\neg p^{\xi}\})).$$

Нехай нечітка величина ξ має розподіл $\phi^{\xi} : X \to [0,1]$.

Виражаючи можливість і необхідність події $\{p^{\xi}(d)\}$ через розподіл ϕ^{ξ}, отримуємо:

Теорема 2. $\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi}(d)\}) = \sup\limits_{t \in \{x \mid x \in X,\, p(x,d)\}} \phi^{\xi}(t);$

$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi}(d)\}) = \inf\limits_{t \in \{x \mid x \in X,\, \neg p(x,d)\}} \theta^{-1}(\phi^{\xi}(t)).$$

2. Логічні операції над нечіткими предикатами

Введемо логічні операції пропозиційного рівня – логічні зв'язки – над нечіткими предикатами.

Спочатку визначимо традиційні операції $\vee$, &, $\neg$ над нечіткими предикатами з різними нечіткими елементами та одним і тим самим базовим предикатом.

Нехай p^{ξ_1} та p^{ξ_2} – нечіткі предикати, ξ_1 та ξ_2 – нечіткі елементи на X_1 та X_2. Нечіткий предикат $(p^{\xi_1} \vee p^{\xi_2}) : (X_1 \to [0,1]) \times (X_2 \to [0,1]) \times D \to \{T, F\}$ – результат операції $\vee$ над p^{ξ_1} та p^{ξ_2} – визначається так:

$$(p^{\xi_1} \vee p^{\xi_2})(d) = p^{\xi_1}(d) \vee p^{\xi_2}(d).$$

Нечіткий предикат $(p^{\xi_1}\ \&\ p^{\xi_2}) : (X_1 \to [0,1]) \times (X_2 \to [0,1]) \times D \to \{T, F\}$ – результат операції & над p^{ξ_1} та p^{ξ_2} – визначається так:

$$(p^{\xi_1}\ \&\ p^{\xi_2})(d) = p^{\xi_1}(d)\ \&\ p^{\xi_2}(d).$$

Нечіткий предикат $(\neg p^{\xi_1}) : (X_1 \to [0,1]) \times D \to \{T, F\}$ – результат операції $\neg$ над p^{ξ_1} – визначається так:

$$(\neg p^{\xi_1})(d) = \neg(p^{\xi_1}(d)).$$

Звідси отримуємо, що значення можливості та необхідності подій $\{p^{\xi_1}(d) \vee p^{\xi_2}(d)\}$ та $\{p^{\xi_1}(d)\ \&\ p^{\xi_2}(d)\}$ виражаються так:

$$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d) \vee p^{\xi_2}(d)\}) = \max(\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_2}(d)\}))$$

$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d) \vee p^{\xi_2}(d)\}) = \max(\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_2}(d) \mid p^{\xi_1}(d)\})) \geq \geq \max(\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_2}(d)\}))$$

$$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\ \&\ p^{\xi_2}(d)\}) = \min(\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_2}(d) \mid p^{\xi_1}(d)\})) \leq \leq \min(\mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{P}^{\Omega*}(\{p^{\xi_2}(d)\}))$$

$$\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\ \&\ p^{\xi_2}(d)\}) = \min(\mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{N}^{\Omega*}(\{p^{\xi_2}(d)\})).$$

Використовуючи введені логічні операції, розглянемо питання залежності та незалежності нечітких предикатів відносно мір **P** та **N**.

Нечіткі предикати p^{ξ_1} та p^{ξ_2} будемо називати *P*-незалежними (або незалежними за можливістю), якщо для всіх $d \in D$

$$\mathbf{P}(\{ p^{\xi_1}(d) \,\&\, p^{\xi_2}(d)\}) = \min(\mathbf{P}(\{ p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{P}(\{ p^{\xi_2}(d)\})).$$

Інакше кажучи, p^{ξ_1} та p^{ξ_2} *P*-незалежні, якщо:

для всіх $d \in D$ маємо $\mathbf{P}(\{ p^{\xi_1}(d)\}) = \mathbf{P}(\{ p^{\xi_1}(d)\} | \{ p^{\xi_2}(d)\})$,

для всіх $d \in D$ маємо $\mathbf{P}(\{ p^{\xi_2}(d)\}) = \mathbf{P}(\{ p^{\xi_2}(d)\} | \{ p^{\xi_1}(d)\})$.

Нечіткі предикати p^{ξ_1} та p^{ξ_2} будемо називати *N*-незалежними (або незалежними за необхідністю), якщо для всіх $d \in D$

$$\mathbf{N}(\{ p^{\xi_1}(d) \vee p^{\xi_2}(d)\}) = \max(\mathbf{N}(\{ p^{\xi_1}(d)\}), \mathbf{N}(\{ p^{\xi_2}(d)\})).$$

Інакше кажучи, p^{ξ_1} та p^{ξ_2} *N*-незалежні, якщо:

для всіх $d \in D$ маємо $\mathbf{N}(\{ p^{\xi_1}(d)\}) = \mathbf{N}(\{ p^{\xi_1}(d)\} | \{ p^{\xi_2}(d)\})$,

для всіх $d \in D$ маємо $\mathbf{N}(\{ p^{\xi_2}(d)\}) = \mathbf{N}(\{ p^{\xi_2}(d)\} | \{ p^{\xi_1}(d)\})$.

Зв'язок понять *P*-незалежності та *N*-незалежності нечітких предикатів встановлює

Теорема 3. 1) p^{ξ_1} та p^{ξ_2} є *P*-незалежними $\Leftrightarrow$ $\neg p^{\xi_1}$ та $\neg p^{\xi_2}$ є *N*-незалежними.

2) p^{ξ_1} та p^{ξ_2} є *N*-незалежними $\Leftrightarrow$ $\neg p^{\xi_1}$ та $\neg p^{\xi_2}$ є *P*-незалежними.

Нечіткі предикати p^{ξ_1} та p^{ξ_2} назвемо повністю незалежними, або просто незалежними, якщо ці предикати є як *P*-незалежними, так і *N*-незалежними.

Введемо тепер логічні зв'язки над нечіткими предикатами з різними базовими предикатами та одним і тим же нечітким елементом.

Нехай p^{ξ} та q^{ξ} – нечіткі предикати на D, ξ – нечіткий елемент на X.

Нечіткі предикати

$$(p \vee q)^{\xi} : (X \to [0,1]) \times D \to \{T, F\}$$

та

$$(p \,\&\, q)^{\xi} : (X \to [0,1]) \times D \to \{T, F\}$$

визначаються відповідно базовими предикатами $p \vee q$ та $p \& q$.

Звідси неважко отримати:

Теорема 4. $\mathbf{P}^{\Omega*}(\{(p \vee q)^{\xi}(d)\}) = \max(\mathbf{P}^{\Omega*}(\{ p^{\xi}(d)\}), \mathbf{P}^{\Omega*}(\{ q^{\xi}(d)\}))$,

$\mathbf{P}^{\Omega*}(\{(p \,\&\, q)^{\xi}(d)\}) \le \min(\mathbf{P}^{\Omega*}(\{ p^{\xi}(d)\}), \mathbf{P}^{\Omega*}(\{ q^{\xi}(d)\}))$.

3. Операції квантифікації нечітких предикатів

Операції квантифікації для нечітких предикатів необхідно вводити таким чином, щоб мати змогу описувати довільні нечіткі квантори типу «майже всі», «багато» і т.п.

Нехай $p^{Q}(d) = Qz\, p^{\xi}(z, d)$ – нечіткий предикат, отриманий з нечіткого предикату p^{ξ} операцією квантифікації Q за змінною z. Такий квантор Q можна розглядати як деяку характеристику області істинності $p^{\xi}(z, d)$ при фіксованому даному d. У цьому випадку істинність $p^{Q}(d)$ означає істинність твердження «при фіксованому d область істинності $p^{\xi}(z, d)$ має властивість Q».

Таким чином, приходимо до наступного визначення.

Нехай Q – деякий (чіткий) предикат $Q : Y \times 2^{Z} \to \{T, F\}$, η – канонічний нечіткий елемент можливісного простору $(Y, 2^{Y}, \mathbf{P}^{Y})$. Нечітким квантифікатором Q^{η} на множині Z назвемо нечіткий предикат $Q^{\eta} : (Y \to [0,1]) \times 2^{Z} \to \{T, F\}$, визначений базовим предикатом Q. Нехай $p^{\xi}(z, d)$ – нечіткий предикат на $Z \times D$, ξ – канонічний нечіткий елемент можливісного простору $(X, 2^{X}, \mathbf{P}^{X})$; нехай Q^{η} – нечіткий квантор, визначений на Z. Результатом квантифікації нечітким квантифікатором Q^{η} нечіткого предиката $p^{\xi}(z, d)$ за змінною z назвемо нечіткий предикат

$$p^{Q^{\eta}, \xi} : (Y \to [0,1]) \times (X \to [0,1]) \times D \to \{T, F\},$$

визначений так:

$$p^{Q^{\eta}, \xi}(d) = Q^{\eta} z\, p^{\xi}(z, d) = Q^{\eta}(\{z \,|\, p^{\xi}(z, d)\}).$$

Зрозуміло, що можливість і необхідність події $\{p^{Q^{\eta},\xi}(d)\}$ рівні можливості та необхідності події $\{\{z\,|\,p^{\xi}(z,d)\}\in T_{Q^{\eta}}\}$, де $T_{Q^{\eta}}$ – область істинності нечіткого предиката Q^{η}.

Визначимо тепер нечіткі квантори існування $\exists^{\eta}$ та узагальнення $\forall^{\eta}$.

Предикати-квантифікатори $\exists^{\eta}$ та $\forall^{\eta}$ задаються базовими предикатами $\mathrm{Ex}: Y\times 2^{Z}\to\{T,F\}$ та $\mathrm{Al}: Y\times 2^{Z}\to\{T,F\}$ відповідно.

Предикати Ex та Al визначаються так:

$$\mathrm{Ex}(x,A)=\begin{cases}T, & A\neq\varnothing,\\ F, & A=\varnothing,\end{cases}$$

$$\mathrm{Al}(x,A)=\begin{cases}T, & A=Z,\\ F, & A\subset Z.\end{cases}$$

Нехай p^{ξ} – нечіткий предикат на $Z\times D$. Нечіткі предикати $p^{\exists^{\eta},\xi}$ та $p^{\forall^{\eta},\xi}$ – результати квантифікації нечіткими кванторами $\exists^{\eta}$ та $\forall^{\eta}$ нечіткого предиката $p^{\xi}(z,d)$ за змінною z, – задамо так:

$$p^{\exists^{\eta},\xi}(d)=\exists^{\eta}z\,p^{\xi}(z,d)=\exists^{\eta}(\{z\,|\,p^{\xi}(z,d)\}),$$

$$p^{\forall^{\eta},\xi}(d)=\forall^{\eta}z\,p^{\xi}(z,d)=\forall^{\eta}(\{z\,|\,p^{\xi}(z,d)\}).$$

Для нечітких предикатів можна природним чином визначити традиційні чіткі квантори $\exists z$ та $\forall z$. Квантор $\exists z$ нечіткому предикату $p^{\xi}(z,d)$, заданому базовим предикатом $p(x,z,d)$, зіставляє нечіткий предикат $(\exists z\,p)^{\xi}(d)$, що задається базовим предикатом $(\exists z\,p)(x,d)$. Квантор $\forall z$ нечіткому предикату $p^{\xi}(z,d)$, заданому базовим предикатом $p(x,z,d)$, зіставляє нечіткий предикат $(\forall z\,p)^{\xi}(d)$, що задається базовим предикатом $(\forall z\,p)(x,d)$.

4. Алгебра нечітких реляцій

На основі побудованої логіки нечітких предикатів будуємо алгебру нечітких реляцій.

Нехай $D=D_1\times\ldots\times D_n$ – деяка множина, де множини $D_1,\ldots,D_n$ – трактуємо як домени. Нехай $(Y,2^{Y},P^{Y})$ – можливісний простір із множиною елементарних подій Y та визначеною на 2^{Y} мірою можливості P^{Y}. *Нечіткою реляцією* (відношенням) називають [3, 6, 7] нечітку підмножину R множини D $R: Y\to 2^{D}$ з характеристичною функцією $\mu_R()=P^{Y}(R^{-1}(\{\}))$. Характеристичну функцію $\mu_R(\cdot)$ будемо називати характеристичною функцією нечіткої реляції R.

Нехай А – деяка множина імен. Задамо відображення $\tilde{n}: \mathrm{A}\to\{D_1,\ldots,D_n\}$ таке:

$$\mathrm{A}_i=\tilde{n}^{-1}(\{D_i\},\ \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing \text{ для } i\neq j$$

та

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i=\mathrm{A},\ \text{ де } \mathrm{A}_i\neq\varnothing.$$

Пару (A,D_i) будемо називати *атрибутом*. Надалі для позначення імені домену D_i будемо використовувати символ A_i. *Схемою нечіткої реляції* $R: Y\to 2^{D}$, де $D=D_1\times\ldots\times D_n$, назвемо кортеж $(R,A_1,\ldots,A_n)$, де $A\in A_i$, який також позначатимемо $(A_1,\ldots,A_n)$. Нечіткі реляції R_1 та R_2 зі схемами $(A_1,\ldots,A_k)$ та $(B_1,\ldots,B_l)$ відповідно назвемо *сумісними*, якщо $k=l$ та існує бієкція $\overline{s}:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,l\}$ така, що $\tilde{n}(A_i)=\tilde{n}(B_{\overline{s}(i)})$.

Введемо наступні операції над нечіткими реляціями: об'єднання, перетину, різниці, проекції, добутку, $\tilde{\theta}$-селекції, $\tilde{\theta}$-з'єднання, ділення, $\tilde{\theta}$-обмеження. Операції *об'єднання* $\cup$, *перетину* $\cap$, *різниці* \ нечітких реляцій R_1 та R_2, визначених на домені D, введемо як обмежені на сумісні нечіткі реляції R_1 та R_2 відомі [1] операції об'єднання, перетину, різниці нечітких множин. *Проекцією* нечіткої реляції R_1 зі схемою $(A_1,\ldots,A_m)$ відносно схеми $(A_{i_1},\ldots,A_{i_l})$, де $l\geq 1$, $\{i_1,\ldots,i_l\}\subseteq\{1,\ldots,m\}$, назвемо нечітку реляцію $R_2: Y\to 2^{D_{i_1}\times\ldots\times D_{i_l}}$, яку позначимо $R_1[A_{i_1},\ldots,A_{i_l}]$, таку:

$$R_2(y)=\{(r_{i_1},\ldots,r_{i_l})\,|\,(r_1,\ldots,r_m)\in R_1(y)\}.$$

Добутком нечітких реляцій R_1 та R_2, заданих на доменах $D^1=D_{i_1}\times\ldots\times D_{i_k}$ та $D^2=D_{j_1}\times\ldots\times D_{j_l}$, назвемо нечітку реляцію $R_3: Y\to 2^{D^1\times D^2}$, яку позначимо $R_3=R_1\otimes R_2$, що задається так:

$$R_3(y)=\{(r_1,\ldots,r_{k+l})\}\,|\,(r_1,\ldots,r_k)\in R_1(y_1),\ (r_{k+1},\ldots,r_{k+l})\in R_2(y))\}.$$

Таким чином, операція добутку нечітких реляцій дозволяє «з'єднувати» дві несумісні нечіткі реляції.

$\widetilde{\theta}$ *-селекцією* нечіткої реляції R зі схемою $(A_1,\dots,A_m)$, визначеної на $D=D_1\times\ldots\times D_m$, за нечітким предикатом $\widetilde{\theta}$, визначеним на $D_{i_1}\times\ldots\times D_{i_k}$, де $\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,m\}$, назвемо нечітку реляцію $R_0 : Y\to 2^D$, яку позначимо $R_0 = R[\widetilde{\theta}\ A_{i_1},\dots, A_{i_k}]$, що задається так:

$R_0(y) = (R[A_{i_1},\dots, A_{i_k}](y)\cap T_{\widetilde{\theta}}\ (y)$.

Результат операції $\widetilde{\theta}$ -селекції можна визначити в термінах операцій над нечіткими множинами наступним чином:

$$R_0 = R[A_{i_1},\dots, A_{i_k}]\cap T_{\widetilde{\theta}}\ ,$$

Таким чином, операція $\widetilde{\theta}$ -селекції дозволяє вибирати з нечіткої реляції нечітку підмножину, що відповідає умові, заданій за допомогою нечіткого предикату $\widetilde{\theta}$.

Нехай на доменах D^1 та D^2 задані нечіткі реляції R_1 та R_2 зі схемами $(A_1,\dots,A_m)$ та $(B_1,\dots,B_n)$ відповідно. Позначимо $A=(A_{i_1},\dots,A_{i_k})$ та $B=(B_{j_1},\dots,B_{j_l})$ деякі кортежі імен атрибутів нечітких реляцій R_1 та R_2. Нехай $D_{i_1},\dots,D_{i_k}$ – домени з іменами $A_{i_1},\dots,A_{i_k}$, $D_{j_1},\dots,D_{j_l}$ – домени з іменами $B_{j_1},\dots,B_{j_l}$.

Нехай на множині $D_{i_1}\times\ldots\times D_{i_k}\times D_{j_1}\times\ldots\times D_{j_l}$ визначено нечіткий предикат $\widetilde{\theta}$. $\widetilde{\theta}$ *-з'єднанням* нечітких реляцій R_1 та R_2 назвемо реляцію $R_3 : Y\to 2^{D^1\times D^2}$, яку будемо позначати $R_3 = R_1\left[A\tilde{\theta}B\right]R_2$, що задається так:

$$R_1\left[A\tilde{\theta}B\right]R_2 = (R_1\otimes R_2)\left[\tilde{\theta}A\circ B\right].$$

Для нечітких реляцій R_1 та R_2 зі схемами $R_1(A_1,\dots,A_m)$ та $R_2(B_1,\dots,B_n)$ позначимо A та B деякі кортежі імен з множин $\{A_1,\dots,A_m\}$ та $\{B_1,\dots,B_n\}$, позначимо $\overline{A}$ та $\overline{B}$ множини імен, що не ввійшли до A та B.

Для нечітких реляцій вводимо також операцію *ділення*

$$R_1\left[A\div B\right]R_2 = R\left[\overline{A}\right]\setminus((R\left[\overline{A}\right]\otimes R[B])\setminus R)\left[A\right]$$

та операцію $\widetilde{\theta}$ *-обмеження*

$$R_1\left[A\tilde{\theta}B\right] = \left(R_1\left[A\tilde{\theta}B\right]R_1\right)\left[A_1,\dots,A_m\right].$$

5. Подання нечітких реляцій

Для адекватної програмної реалізації нечітких реляцій і операцій над ними введемо важливе поняття *подання* нечіткої реляції й уточнимо операції над нечіткими реляціями.

Під нечіткою реляцією надалі розумітимемо відображення $R : X\to 2^{D\times D_1\times\ldots\times D_n}$ із можливісного простору $(X, 2^X, \mathrm{P})$ та відповідного йому необхіднісного простору $(X, 2^X, \mathrm{N})$, причому областю значень R є скінченна система скінченних множин. *Поданням* нечіткої реляції $R : X\to 2^{D\times D_1\times\ldots\times D_n}$ назвемо четвірку $(A, I, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ таку:

$A = \{A_1,\dots,A_n\}$, де $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $\bigcup_i A_i = X$

та $\forall\, x_1, x_2\in A$ маємо $R(x_1) = R(x_2)$;

$I = \{I_1,\dots,I_n\}$, де $I_i=R(x)$, $x_2\in A_i$ та $\forall\, i,j$: $i\neq j$ маємо $I_i\neq I_j$;

$\boldsymbol{M}=\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$, де $\mu_i = P(\{I_i = R(\xi)\})$

$\boldsymbol{N}=\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$, де $\psi_i = N(\{I_i = R(\xi)\})$

Зрозуміло, що I – це область значень R, A – розбиття X на класи еквівалентності відносно значень R. Отже, R можна розглядати як нечіткий елемент на I, який має розподіл $\phi^R(I_i) = P(\{R(\xi) = I_i\})$, а значення μ_i та ψ_i дають нам повну характеристику події $\{R(\xi) = I_i\}$ – її можливість і необхідність відповідно.

Нехай 2^{D_1} та 2^{D_2} – області значень нечітких реляцій $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ відповідно. $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ *P-незалежні* (незалежні за можливістю), якщо $\forall I_1\subset D_1, I_2\subset D_2$

$$P(\{R_1(\xi)\supseteq I_1\wedge R_2(\eta)\supseteq I_2\}) =$$
$$\min(P(\{R_1(\xi)\supseteq I_1\}), P(R_2(\eta)\supseteq I_2))$$

$R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ *N-незалежні* (незалежні за необхідністю), якщо $\forall I_1\subset D_1, I_2\subset D_2$

$$N(\{R_1(\xi)\cap I_1\neq\varnothing\vee R_2(\eta)\cap I_2\neq\varnothing\}) =$$
$$=\max(N(\{R_1(\xi)\cap I_1\neq\varnothing\}), N(\{R_2(\eta)\cap I_2\neq$$
$$\neq\varnothing)\}).$$

Інакше кажучи, нечіткі реляції $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$:

– *P*-незалежні, якщо $\forall I_1 \subset D_1, I_2 \subset D_2$
$P(\{R_1(\xi) \supseteq I_1\}) = P(\{R_1(\xi) \supseteq I_1\} \mid \{R_2(\eta) \supseteq I_2\})$
та
$P(\{R_2(\eta) \supseteq I_2\}) = P(\{R_2(\eta) \supseteq I_2\} \mid \{R_1(\xi) \supseteq I_1\});$.

– *N*-незалежні якщо $\forall I_1 \subset D_1, I_2 \subset D_2$
$N(\{R_1(\xi) \cap I_1 \neq \varnothing\}) = N(\{R_1(\xi) \cap I_1 \neq \varnothing\} \mid \mid \{R_2(\eta) \cap I_2 \neq \varnothing\})$
та
$N(\{R_2(\eta) \cap I_2 \neq \varnothing\}) = N(\{R_2(\eta) \cap I_2 \neq \varnothing\} \mid \mid \{R_1(\xi) \cap I_1 \neq \varnothing\})$.

Як і для нечітких предикатів, *P*-незалежність і *N*-незалежність нечітких реляцій – два різних поняття. Із *P*-незалежності необов'язково випливає *N*-незалежність і навпаки.

Теорема 5. *Нечіткі реляції* $R_1(\xi)$ *і* $R_2(\eta)$ *є P-незалежними* $\Leftrightarrow$ $D_1 \setminus R_1(\xi)$ *і* $D_2 \setminus R_2(\eta)$ *є N-незалежними.*

2. *Нечіткі реляції* $R_1(\xi)$ *і* $R_2(\eta)$ *є N-незалежними* $\Leftrightarrow$ $D_1 \setminus R_1(\xi)$ *і* $D_2 \setminus R_2(\eta)$ *є P-незалежними.*

Нечіткі реляції $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ назвемо *цілком незалежними*, або просто *незалежними*, якщо вони як *P*-незалежні, так і *N*-незалежні.

Наслідок. $R_1(\xi)$ *та* $R_2(\eta)$ *цілком незалежні* $\Leftrightarrow$ $D_1 \setminus R_1(\xi)$ *та* $D_2 \setminus R_2(\eta)$ *цілком незалежні.*

Опираючись на визначення нечіткої реляції, наведене на початку розділу, уточнимо операції над нечіткими реляціями так.

Операція об'єднання нечітких реляцій $R_\cup : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times \ldots \times D_n}$:

$$R_\cup(x_1, x_2) = R_1(x_1) \cup R_2(x_2).$$

Операція перетину нечітких реляцій $R_\cap : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times \ldots \times D_n}$:

$$R_\cap(x_1, x_2) = R_1(x_1) \cap R_2(x_2).$$

Операція різниці нечітких реляцій $R_- : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times \ldots \times D_n}$:

$$R_\setminus(x_1, x_2) = R_1(x_1) \setminus R_2(x_2).$$

Операція декартового добутку нечітких реляцій $R_\times : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times \ldots \times D_n}$:

$$R_\times(x_1, x_2) = R_1(x_1) \times R_2(x_2) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}.$$

Операція проекції нечіткої реляції R за змінною d $R[D] : X \to 2^D$ (без обмеження загальності тут вважаємо, що $R : X \to 2^{D \times D_1}$):

$$R[D](x) = \{d \mid d \in D, \exists\, d_1 \in D_1 : (d_1, d_2) \in R(x)\}.$$

Операція селекції нечіткої реляції R за нечітким предикатом π^ξ $R[\pi^\xi] : X \times X \to 2^D$:

$$R[\pi^\xi](x_1, XX_2) = \{D \mid D \in R(X_1), \pi(X_2, D)\}.$$

Тут вважаємо, що $R : X \to 2^D$, $\pi : X \times D \to \{0, 1\}$ та $\pi^\xi(d) = \pi(\xi, d)$.

Якщо нечіткі реляції R_1 та R_2 *P*-незалежні, то, користуючись їхніми поданнями ρ_1 та ρ_2, можна побудувати подання $\rho_\cup$, $\rho_\cap$, ρ_-, $\rho_\times$ нечітких реляцій $R_\cup$, $R_\cap$, R_-, $R_\times$. За поданням ρ нечіткої реляції R можна збудувати подання $\rho_{[D]}$ нечіткої реляції $R_{[D]}$. Якщо пара (R, T_{π^ξ}) – *P*-незалежна, то за поданням ρ нечіткої реляції R можна побудувати подання ρ_{π^ξ} нечіткої реляції $R[\pi^\xi]$.

ВИСНОВКИ

На базі теоретико-можливісного підходу в роботі досліджено нечіткі предикати та нечіткі реляції. Запропоновано спеціальне уточнення поняття нечіткого предиката, визначено операції над нечіткими предикатами – логічні зв'язки та квантори. На основі логіки нечітких предикатів введено поняття нечіткої реляції та збудовано алгебру нечітких реляцій, сигнатурою якої є операції об'єднання, перетину, віднімання, добутку, проекції та селекції. На базі алгебри нечітких реляцій і моделей операцій, виражених через подання нечіткої реляції, розробляється програмне забезпечення для ефективної обробки запитів до баз даних з нечіткими критеріями.

1. Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений / Пытьев Ю. П. // Вестник Московского ун-та. Серия 3 (физика, астрономия). – 1997. – № 3.
2. Пытьев Ю. П. Основы теории возможностей. Нечеткие множества / Пытьев Ю. П. // Вестник Московского ун-та, серия 3 (физика, астрономия). – 1998. – № 4.
3. Польща М. В. О теоретико-возможностном подходе к построению алгебры нечетких предикатов / Польща М. В., Пытьев Ю. П., Белов Ю. А., Еремко О. О. // Доповіді АН України. – 2001. – № 1.
4. Бєлов Ю. А. Логіка нечітких предикатів / Бєлов Ю. А., Малютенко Л. М., Польща М. В. // International conference TAAPSD'2004. – Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. Спецвипуск. – К., 2004.
5. Нікітченко М. С., Шкільняк С. С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К. : ВПЦ Київський ун-т, 2008. – 528 с.
6. Польща М. В. О теоретико-возможностном подходе к построению нечеткой реляционной алгебры / Польща М. В., Пытьев Ю. П., Белов Ю. А., Астапов Д. Е. // Доповіді АН України. – 2001 – № 11.
7. Бєлов Ю. А. Алгебра нечітких реляцій / Бєлов Ю. А., Касьянюк В. С., Малютенко Л. М., Польща М. В. // Праці міжнарожної конференції «Theoretical and applied aspects of program systems development (TAAPSD'2005)». – К. : [б. м.], 2005.

V. Kasyanuk, L. Malutenko, M. Polshcha

CONSTRUCTION OF FUZZY PREDICATE LOGIC AND ALGEBRA OF FUZZY RELATIONS ON THE BASIS OF THEORETIC-POSSIBILITY APPROACH

In this paper a special refinement of notions of fuzzy predicate and fuzzy relation is introduced on the basis of the theoretic-possibility approach. We define operations over fuzzy predicates such as logical connectives and quantifiers. We specify algebra of fuzzy relations based on fuzzy predicate logic. Its signature consists of the operations of union, intersection, difference, product, projection and selection.

Keywords: fuzzy predicate, fuzzy relation, theoretic-possibility approach.