

Риск и доход: основы теории решений в условиях риска

Я ни в чем не положился на случай, разве лишь тогда, когда риск сулил большие преимущества в случае успеха, и когда у меня была уверенность, что я не останусь без ресурсов в случае поражения...

Шодерло де Лакло, *Опасные связи*

Риск окружает нас повсюду - это настолько же объективно, насколько объективно присутствие в окружающем нас мире наряду с элементами определенности, детерминированности, факторов, по своей природе являющихся случайными и неопределенными. Экономика и, в частности, финансы - область, где фактор риска проявляется наиболее ощутимо. *Риск* возникает, когда результат некоторого решения невозможно заранее предугадать. В экономике результат решения часто оценивается в стоимостном измерении, и с этой точки зрения риск можно рассматривать как *имеющую случайную природу возможность потери или выигрыша стоимости*¹ в результате тех или иных экономических решений.

Предельно важен фактор риска на рынках капитала. По сути, в отсутствие риска, рынок капиталов, да и в целом финансовые рынки во всем своем многообразии, сводились бы к рынку какого-то однотипного долгового обязательства с единой процентной ставкой.

Фактор неопределенности, а, следовательно, и риск объективно присущ экономике как сложной системе. Человек, принимая решения, постоянно стал-

¹ Подобное определение дает, например, *Dictionary of Banking*. G. Klein, ed. Pitman, 1992.

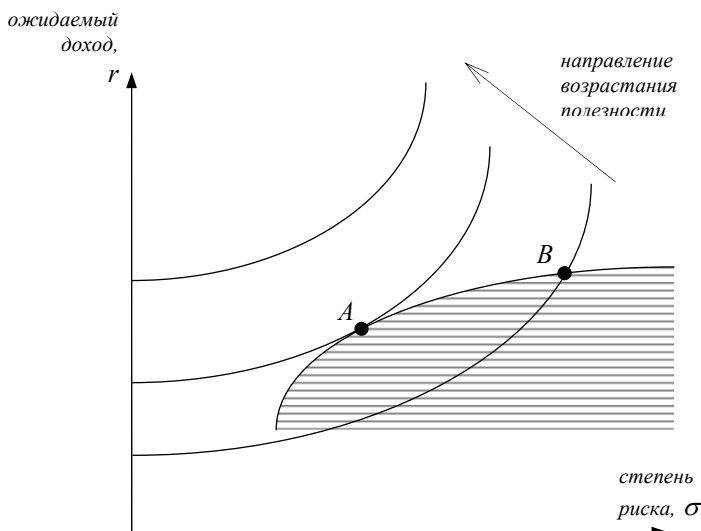


Рисунок 3-2

Оптимальный выбор в условиях риска. Если допустимая область выбора между риском и доходом ограничена (заштрихованная область на рисунке), наилучшим будет выбор, обеспечивающий наиболее высокий уровень благосостояния (полезности) из возможных. На рисунке наилучший выбор отображен точкой А, в которой наиболее высокая кривая безразличия касается допустимой области.

квивается с риском. В приведенном нами эпитафе, хотя речь идет о ситуации весьма далекой от экономических проблем, очень точно описывается поведение человека, *несклонного к риску*. Простой факт - люди согласны рисковать только в обмен на дополнительное вознаграждение, - является одним из основополагающих принципов финансовой теории. Что определяет выбор инвестора, сталкивающегося с риском? - основной вопрос данной главы, дающий основу для дальнейшего рассмотрения проблем современных финансов.

3.1. Теория выбора решений в условиях риска

Теория принятия решений различает три возможные ситуации выбора решения:

- 1) *выбор при определенности* - когда результат решения детерминирован и может быть определен заранее;
- 2) *выбор в условиях риска* - когда результат заранее в точности не может быть известен, но существует информация о *вероятностных распределениях* возможных последствий;
- 3) *выбор в условиях неопределенности* - когда результат случаен и полностью отсутствует информация о вероятностях последствий решения.

Несмотря на четкую классификацию, с *практической* точки зрения грань между вторым и третьим случаем достаточно размыта, если в качестве вероятности понимать так называемую субъективную вероятность, - вероятность как *степень уверенности* человека в наступлении того или иного исхода.

В экономической теории предполагается, что так называемый *homo economicus*, то есть человек, способный рационально принимать решения исходя из принципа наибольшей выгоды, всегда имеет, основанные на тех или иных соображениях, представления о *степени рискованности* той или иной альтернативы. Эти представления основываются на степени уверенности индивида (субъективных вероятностях) в наступлении различных последствий решений.

Пусть в качестве результата решения рассматривается некоторый единственный показатель (например, размер дохода, прибыли, богатства и т.п.), фактическая величина которого зависит от принимаемого решения и некоторых случайных факторов. То есть каждому варианту решения соответствует свое вероятностное распределение результата. Тогда выбор в условиях риска - это *выбор среди вероятностных распределений*, соответствующих каждому из вариантов решения.

Например, пусть решение состоит в том, покупать или не покупать лотерейный билет (лотерея - очень популярный пример в литературе по проблемам риска). Билет стоит 10 гривен, вероятность выигрыша одного миллиона гривен составляет 0.001%. Альтернативы могут быть представлены следующим образом:

I	II
не покупать	покупать
доход = 0 с вероятностью 1	доход = 999'990 с вероятностью 0.001% доход = -10 с вероятностью 99.999%

Существующие возможности можно также представить в виде:

Доход	Распределение вероятностей результата	
	не покупать	покупать
-10	0%	99.999%
0	100%	0%
999'990	0%	0.001%

Тем самым, каждый вариант решения ассоциирован с некоторым распределением вероятностей результата.

Мы будем исходить из предположения, что человек всегда способен сделать осознанный выбор из имеющихся альтернатив решения - выбрать наиболее для него предпочтительное вероятностное распределение. Будем предполагать также, что эти предпочтения рациональны - то есть, подчиняются некоторым естественным правилам.

3.1.1. Простая модель выбора решений и премия за риск

Предположим вначале, что риск может быть некоторым образом измерен, то есть каждому варианту решения соответствует, во-первых, значение ожидаемого

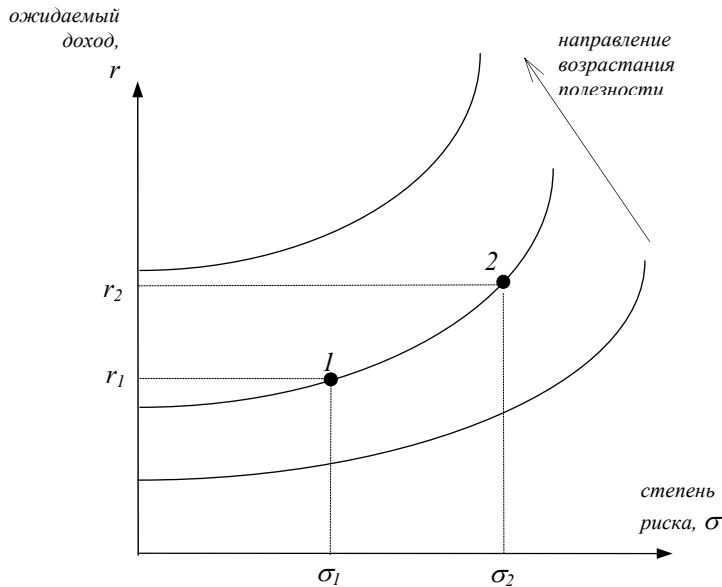


Рисунок 3-1

Кривые безразличия между риском и ожидаемым доходом.

(«среднего») дохода², во-вторых, некоторый показатель, характеризующий степень риска данного решения (к примеру, степень возможного отклонения фактического размера дохода от ожидаемого). В этом случае предпочтения человека могут быть представлены с помощью стандартного микроэкономического аппарата кривых безразличия³.

Каждая точка на координатной плоскости рисунка 3-1 определяет некоторый уровень ожидаемого дохода и соответствующую степень риска его получения. Точки, лежащие на одной и той же кривой безразличия показывают сочетания степени риска и ожидаемого дохода, которые для этого человека эквивалентны.

На рисунке, если увеличение дохода с r_1 до r_2 сопровождается увеличением степени риска с σ_1 до σ_2 , то для человека обе альтернативы эквивалентны. Форма кривых безразличия на рисунке 3-1 соответствует предположению о том, что ожидаемый доход, если следовать терминологии теории потребительского выбора, является «положительным» благом (чем больше доход, тем лучше), а риск - «анти-благом» (увеличение степени риска ухудшает положение индивида).

Прирост ожидаемого дохода, например, на величину $(r_2 - r_1)$, который компенсирует человеку потери благосостояния, вызванные возрастанием риска (в данном случае с σ_1 до σ_2) называют *премией за риск*.

Наклон (точнее - тангенс угла наклона) кривой безразличия - это *предельная норма замены между риском и доходом* (обозначим ее $MRS_{r\sigma}$), показывающая каким должно быть увеличение дохода (премия за риск), чтобы компенсировать увеличение степени риска на одну единицу:

² Более точно - математическое ожидание дохода.

³ Математически - линий уровня функции предпочтений - комбинаций риска и дохода, обеспечивающих одинаковый уровень полезности.

$$MRS_{rr} = \frac{\Delta \text{Доход}}{\Delta \text{Риск}}$$

Другими словами, предельная норма замены характеризует *относительную ценность* для индивида риска и дохода при данном уровне одного и другого (то есть - *индивидуальную премию за риск*).

Для завершения модели, предположим, что выбор для субъекта ограничен окружающими условиями (скажем, *рынком*). Пусть, например, существует некоторое допустимое множество комбинаций риска и дохода, обозначенное заштрихованной областью на рисунке 3-2.

Исходя из принципа рациональности выбора, человек предпочтет ту альтернативу из возможных, которая обеспечит ему наивысший уровень благосостояния. На рисунке 3-2 это будет точка *A* - точка, соответствующая наивысшей из возможных кривых безразличия.

Можно сказать, что наклон границы допустимой области представляет собой *рыночную премию за риск* - прирост дохода, который *может быть* получен при увеличении степени риска на единицу. Тем самым, наилучший выбор - это точка, где наивысшая кривая безразличия между риском и доходом касается границы допустимой области, то есть точка, где наклоны обеих кривых равны между собой.

Условием наилучшего выбора будет равенство:

$$\text{индивидуальная премия за риск} = \text{рыночная премия за риск.}$$

3.1.2. Несклонность к риску

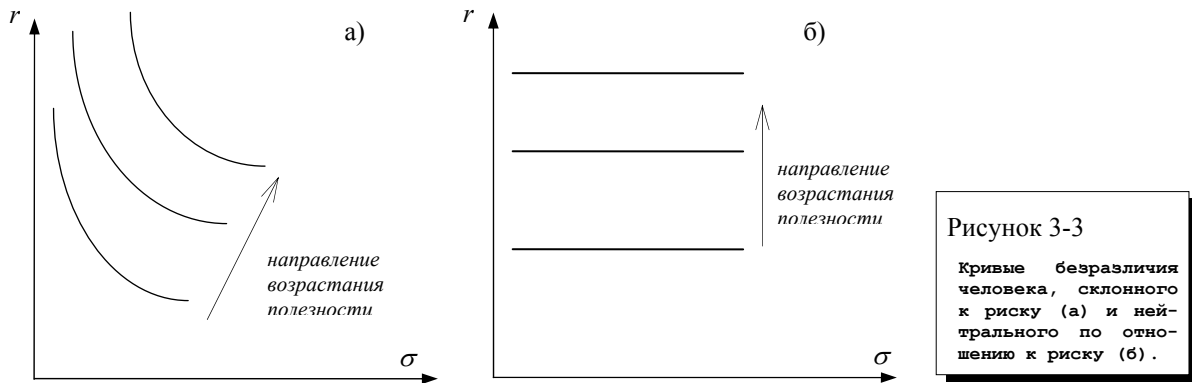
Форма кривых безразличия, подобная представленным на рисунках 3-1 и 3-2 описывает предпочтения человека *несклонного к риску*. Индивид не склонен к риску, если повышение степени риска при неизменном ожидаемом доходе негативно сказывается на его благосостоянии. Другими словами, риск для несклонного к риску человека - всегда «антиблаго»⁴.

В общем случае, люди различаются своим отношением к риску. Человек *склонен к риску*, если увеличение степени риска повышает его благосостояние и *нейтрален* по отношению к риску, если изменение степени риска никак не сказывается на его уровне благосостояния. Кривые безразличия, отражающие свойства склонности и нейтральности по отношению к риску, приведены на рисунке 3-3.

Отметим важные особенности поведения людей с различным отношением к риску. Для несклонного к риску человека, снижение степени риска, даже при неизменном ожидаемом доходе, увеличивает привлекательность решения, тогда как при нейтральности существенным является только ожидаемый доход. Для склонного к риску человека более рискованные решения всегда более предпочтительны.

В экономической теории предполагается, что люди в абсолютном большинстве несклонны к риску. Однако *степень несклонности* может различаться. Кривые безразличия на рисунке 3-4а характеризуют человека относительно более несклонного к риску по сравнению с субъектом, кривые безразличия которого приведены на рисунке 3-4б. Чем большее приращение дохода необходимо, чтобы

⁴ Напомним, что вне зависимости от отношения к риску, доход *всегда* является «положительным» благом.



компенсировать человеку возрастание риска, тем более он несклонен к риску. По отношению к инвестициям, большую несклонность к риску на финансовом жаргоне называют «консервативным» или осторожным подходом. Соответственно, чем меньше несклонность к риску, тем более «агрессивно» (рискованно) поведение инвестора. Формально, в рамках рассматриваемой модели, степень несклонности к риску характеризуется величиной предельной нормы замены между риском и доходом $MRS_{r,\sigma}$: чем большей является эта величина, тем более несклонен к риску человек.

Степень несклонности по отношению к риску можно охарактеризовать и по иному. Значение дохода при отсутствии риска, которое эквивалентно (лежит на той же кривой безразличия) некоторой рискованной альтернативе A , называется *детерминированным эквивалентом* решения A . Чем больше несклонность к риску, тем меньше детерминированный эквивалент одного и того же решения. На рисунке 3-4 детерминированный эквивалент решения A представлен точкой E .

Отношение к риску и полезность богатства

Модель выбора решений, рассмотренная выше, основана на предположении о возможности измерения степени риска, связанного с тем или иным решением. Это допущение является очень сильным. Мы можем от него отказаться, предложив более общий критерий выбора решений.

Наиболее распространенным в экономической теории является предположение о том, что человек, выбирая решения, руководствуется принципом *максимизации ожидаемой полезности результата*⁵.

Пусть, как и ранее, критерием оценки эффективности решения является некоторый единственный показатель, для определенности пусть это будет размер богатства (обозначим его w).

Каждому значению w соответствует определенный уровень благосостояния (*полезности*) $u(w)$, обеспечиваемый человеку данной величиной богатства. В соответствии с гипотезой ожидаемой полезности, человек, имея определенные представления о вероятностных распределениях величины w (обозначим эти распре-

⁵ Формально - математического ожидания функции полезности.

деления как P), выберет то решение, при котором величина ожидаемой полезности результата:

$$E_P[u(w)]$$

будет максимальной. $E_P[\cdot]$ в приведенной формуле обозначает *ожидаемую* величину⁶.

Рассмотрим пример. Пусть г-н NN стоит перед выбором - инвестировать средства в проект A , в результате реализации которого при прочих равных условиях объем богатства составит 10 тыс. гривен с вероятностью 50% или 1 тыс. гривен с вероятностью 50%; либо проект B , при тех же вложениях гарантировано обеспечивающий богатство в размере 2 тыс. гривен.

В сформулированных выше терминах задача состоит в выборе из двух вероятностных распределений:

A : 10 тыс. гривен с вероятностью 0.5 ;
1 тыс. гривен с вероятностью 0.5 .

B : 2 тыс. гривен с вероятностью 1 .

В соответствии с гипотезой ожидаемой полезности, лучшим будет вариант, обеспечивающий наибольшую ожидаемую полезность, то есть выбор зависит от того, какая из величин $0.5 \times u(10'000) + 0.5 \times u(1'000)$ или $u(2'000)$ окажется больше и, в конечном счете, определяется предпочтениями г-на NN, - его *функцией полезности*.

Хотя средний (ожидаемый) доход выше для проекта A :

$$A: 0.5 \times 10 + 0.5 \times 1 = 5.5 \text{ тыс. гривен,}$$

$$B: 1 \times 2 = 2 \text{ тыс. гривен,}$$

если предпочтения таковы как на рисунке 3-5а, лучшим для инвестора окажется

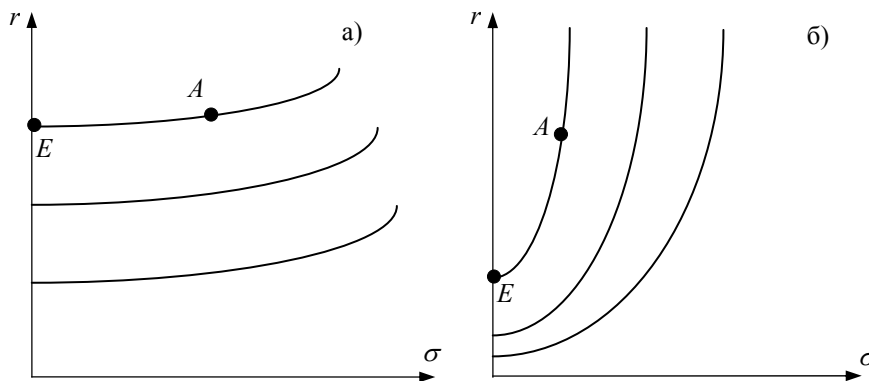


Рисунок 3-4
Различия в степени несклонности к риску: а) «агрессивный» инвестор; б) «консервативный» инве-

⁶ Оператор математического ожидания по распределению P . Более подробно об основных понятиях теории вероятностей и математической статистики - см. Математическое приложение 1.

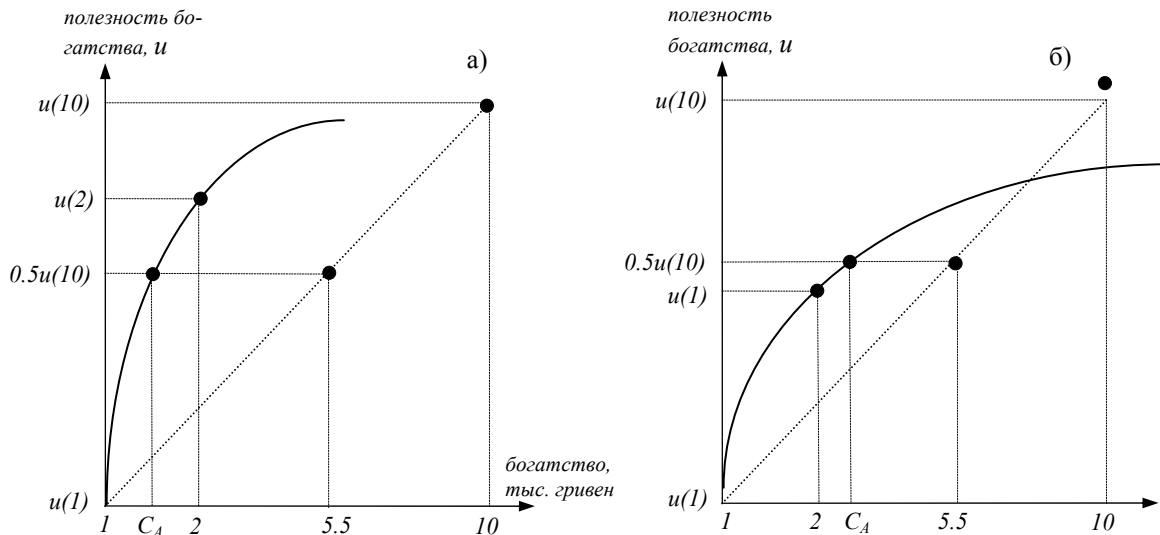


Рисунок 3-5

Критерий ожидаемой полезности богатства. При различной степени несклонности к риску, выбор несклонных к риску инвесторов может быть различным. Человек с функцией полезности как на рисунке а) – более несклонный к риску, – выберет менее рискованный проект; если же предпочтения таковы, как на рисунке б), человек выберет более рискованный проект – ради дополнительного дохода он готов пойти на дополнительный риск.

вариант *Б*, если же функция полезности имеет форму как показано на рисунке 3-5б, то выбор будет сделан в пользу *А*. В нашем примере первый проект является рискованным, второй – нет.

Величина богатства C_A , соответствующая ожидаемой полезности от проекта *А*, называется *детерминированным эквивалентом* рискованного решения *А*. Более строго, C_A будет детерминированным эквивалентом случайной величины выигрыша w_A , если

$$E_P[u(w_A)] = u(C_A).$$

Критерий выбора решения теперь может быть сформулирован следующим образом: наилучшим является решение с *наибольшим детерминированным эквивалентом*. Премия за риск в этом случае – разница между ожидаемым выигрышем и детерминированным эквивалентом решения:

$$\pi = E_P[u(w_A)] - u(C_A),$$

где π – премия за риск.

Используя экономическую терминологию, детерминированный эквивалент C_A – это *альтернативная стоимость* проекта *А* для субъекта, принимающего решения.

Сформулируем еще одно определение несклонности к риску: *субъект является несклонным к риску, если детерминированный эквивалент любого рискованного*

решения для него всегда меньше ожидаемого (среднего) выигрыша, получаемого в результате этого решения. Другими словами, если из двух альтернатив: гарантированный выигрыш размером w_0 или случайный выигрыш, ожидаемое значение которого также равно w_0 , человек всегда выбирает первое, то это - человек не склонный к риску. Премия за риск для субъекта не склонного к риску всегда положительна, а функция полезности богатства выпукла вверх.

Заметим очень важную взаимосвязь свойства несклонности к риску и стандартных положений экономической теории о функции полезности: свойство *убывающей предельной полезности* (выигрыша, богатства и т.п.) предполагает *несклонность к риску*. Функции, изображенные на рисунках 3-5а, 3-5б характеризуют людей несклонных к риску, только степень несклонности (и, следовательно, премия за риск) больше в случае 3-5а по сравнению с 3-5б. Степень несклонности к риску тем выше, чем более вогнутой является функция полезности богатства (рисунок 3-6). Можно сказать, что чем меньше человек ценит каждую дополнительную единицу богатства - тем менее он склонен рисковать.

Для человека *нейтрального* по отношению к риску функция полезности выигрыша будет линейной, премия за риск равна нулю, а детерминированный эквивалент решения равен ожидаемому выигрышу. То есть нейтральный по отношению к риску субъект всегда выбирает решения с наибольшим ожидаемым выигрышем - риск для него значения не имеет. *Склонный* к риску человек характеризуется выпуклой функцией полезности (рисунок 3-7).

3.2. Теория ожидаемой полезности

В этом разделе мы несколько более формально сформулируем основное содержание *теории ожидаемой полезности*.

Теория ожидаемой полезности была предложена в конце 40-х годов нашего столетия Джоном фон Нейманом и Оскаром Morgenштерном⁷, и является развитием неоклассической теории индивидуального выбора для случаев, когда существует *риск*. На сегодняшний день подход ожидаемой полезности можно считать общепринятым как в современных финансах, так и в экономической теории в целом.

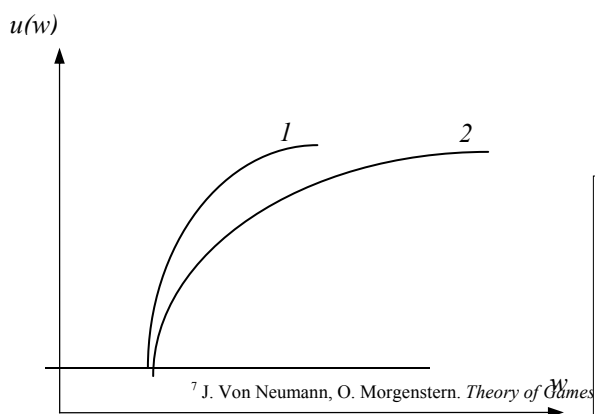


Рисунок 3-6

Степень несклонности к риску и полезность богатства: чем более вогнута функция полезности богатства человека - тем более он не склонен к риску. Функция полезности 1 характеризует относительно более несклонного к риску человека (более осторожного или консервативного), по сравнению с тем, чьи предпочтения отражены функцией полезности 2.

3.2.1. Гипотеза ожидаемой полезности: формальный подход

В отличие от случая определенности, в условиях риска выбор того или иного решения означает выбор вероятностного распределения некоторой случайной величины (например, дохода).

Предположим, что на множестве вероятностных распределений существуют *отношения предпочтения*, - то есть человек может сравнивать выгодность различных распределений. Причем эти предпочтения *рациональны* - обладают следующими свойствами (удовлетворяют следующим *аксиомам*):

- 1) *Полнота*. Для любых двух распределений (обозначим их P_1 и P_2) человек всегда в состоянии указать более предпочтительное, либо считать их эквивалентными. Символически, это можно записать следующим образом:

$$\forall P_1, P_2: P_1 \succ P_2 \text{ либо } P_1 \prec P_2, \text{ либо } P_1 \approx P_2,$$

где знак « \succ » читается как «лучше», «предпочтительнее», « \prec » - соответственно, - «хуже», и « \approx » - «эквивалентно».

- 2) *Транзитивность*. Если одно распределение лучше другого, а это другое лучше третьего, то с определенностью можно сказать, что первое распределение лучше третьего. То есть

$$P_1 \succ P_2, P_2 \succ P_3, \Rightarrow P_1 \succ P_3.$$

- 3) *Непрерывность*. Для любых двух распределений, одно из которых лучше другого, всегда найдется распределение, занимающее «промежуточное» положение, то есть являющееся менее предпочтительным, чем первое, но более предпочтительным, чем второе. Причем это промежуточное распределение можно представить в виде линейной комбинации первых двух:

$$P_1 \succ P_2 \Rightarrow \exists P_3 = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2: P_1 \succ P_3 \succ P_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Если предпочтения человека таковы, что удовлетворяют приведенным аксиомам, то можно строго показать, что на множестве распределений существует *функция предпочтений* $V(P)$, такая, что для двух различных распределений, одно из которых лучше другого, значение функции предпочтений для первого будет *больше*, чем для второго:

$$P_1 \succ P_2 \Rightarrow V(P_1) > V(P_2).$$

Сформулированные аксиомы не дают нам возможности сделать вывод о конкретной *форме* функции предпочтений. Теория ожидаемой полезности предлагает постулировать еще одно свойство отношений предпочтения, так называемое свойство *линейности (независимости)*:

- 4) Для любых двух распределений, первое будет более предпочтительным, чем второе тогда и только тогда, когда любая линейная комбинация, включающая первое распределение, будет более предпочтительна, чем аналогич-

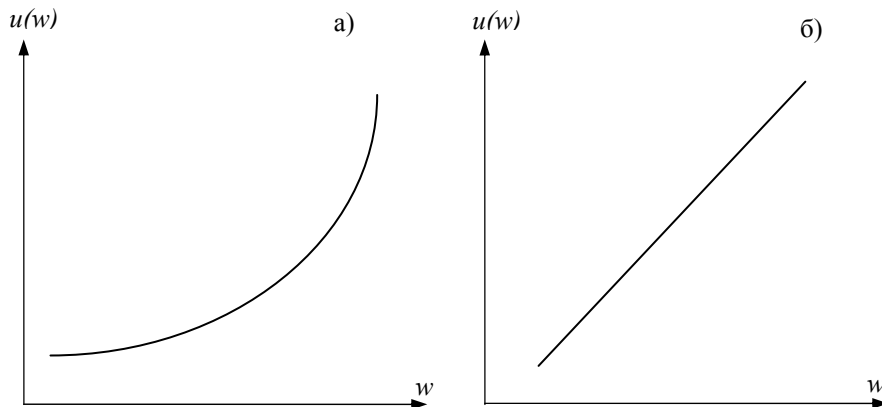


Рисунок 3-7
Взаимосвязь отношения к риску и формы функции полезности:
 а) функция полезности богатства человека склонного к риску;
 б) функция полезности человека нейтрального по отношению к риску.

ная линейная комбинация, где вместо первого распределения присутствует второе. Формально

$$\forall P_1, P_2, P_3, \lambda \in (0,1): P_1 \succ P_2 \Leftrightarrow \lambda P_1 + (1-\lambda) P_3 \succ \lambda P_2 + (1-\lambda) P_3$$

Из последней аксиомы следует свойство *линейности по вероятности* функции предпочтений, то есть функция предпочтений, в соответствии с теорией ожидаемой полезности - это *линейная комбинация* вероятностей различных исходов, причем коэффициентами этого линейного разложения будут значения полезности каждого из исходов. Например, пусть имеется n возможных ситуаций, в каждой из которых полезность человека принимающего решения будет равна соответственно u_1, u_2, \dots, u_n . Если p_1, p_2, \dots, p_n - вероятности каждой из возможных ситуаций, линейная по вероятности функция предпочтений будет иметь вид:

$$V(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n.$$

Пусть показатель, характеризующий результат решения - только один, например, - размер богатства в каждой из ситуаций: w_1, w_2, \dots, w_n , а $u(\cdot)$ - функция полезности богатства. Тогда функция предпочтений будет иметь вид

$$V(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) + \dots + p_n u(w_n). \tag{3.1}$$

В общем случае, когда возможные результаты описываются не дискретном (как в приведенном примере), а *непрерывным* распределением P , линейная по вероятности функция предпочтений запишется

$$V(P) = \int_{\Omega} u(w) P(dw), \tag{3.2}$$

где Ω - вероятностное пространство, $\int P(dw)$ - интеграл Лебега. Если существует плотность распределения $p(w)$, выражение (3.2) можно записать

$$V(P) = \int_{-\infty}^{\infty} u(w)p(w)dw . \quad (3.3)$$

Все три выражения для функции предпочтений (3.1), (3.2) и (3.3) представляют функцию V как математическое ожидание функции полезности. Таким образом, в соответствии с теорией Неймана-Моргенштерна *индивид в условиях риска осуществляет выбор исходя из максимизации ожидаемой полезности результата*: человек выбирает такое распределение P^* из множества альтернатив, что

$$V(P^*) = \max_P V(P) = \max_P E_P[u(w)] .$$

Графическая иллюстрация

Рассмотрим простую графическую иллюстрацию гипотезы ожидаемой полезности⁸. Пусть выбор состоит из всех возможных лотерей (p_1, p_2, p_3) , где p_1, p_2, p_3 - вероятности того, что размер выигрыша (богатство) составит соответственно w_1, w_2 или w_3 . Так как $p_1+p_2+p_3=1$ (три указанных случая описывают все возможные состояния), мы можем выразить $p_3=1-p_1-p_2$, и проиллюстрировать выбор на обычном двумерном графике (рисунок 3-8). Треугольник OAB содержит все возможные комбинации вероятностей p_1, p_2 и p_3 (например, в точке A: $p_1=0, p_2=1, p_3=1$; в точке C: $p_1=1/3, p_2=1/2, p_3=1/6$). Пусть $u(w_1)$ - полезность индивида, когда выигрыш составит $w_1, u(w_2)$ и $u(w_3)$ - соответственно полезность величин w_2 и w_3 . Исходя из гипотезы ожидаемой полезности, функция предпочтений индивида будет иметь вид:

$$V(p_1, p_2, p_3) = p_1u(w_1) + p_2u(w_2) + p_3u(w_3) .$$

На рисунке 3-8 сплошными линиями изображены *кривые безразличия* - комбинации вероятностей, которые для данного индивида эквивалентны:

$$V(p_1, p_2, p_3) = const .$$

Кривые безразличия имеют вид прямых параллельных друг другу линий, так как мы приняли гипотезу ожидаемой полезности (линейности по вероятности функции предпочтений):

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, p_3) &= p_1u(w_1) + p_2u(w_2) + p_3u(w_3) \\ &= p_1u(w_1) + p_2u(w_2) + (1 - p_1 - p_2)u(w_3) \\ &= u(w_3) + (u(w_1) - u(w_2))p_1 + u(w_2) - u(w_3))p_2 \\ &= const. \end{aligned} \quad (3.4)$$

⁸ Использован пример из работы: M. Machina. *Expected Utility Hypothesis*. In: The New Palgrave Dictionary of Money and Finance, vol. 1.

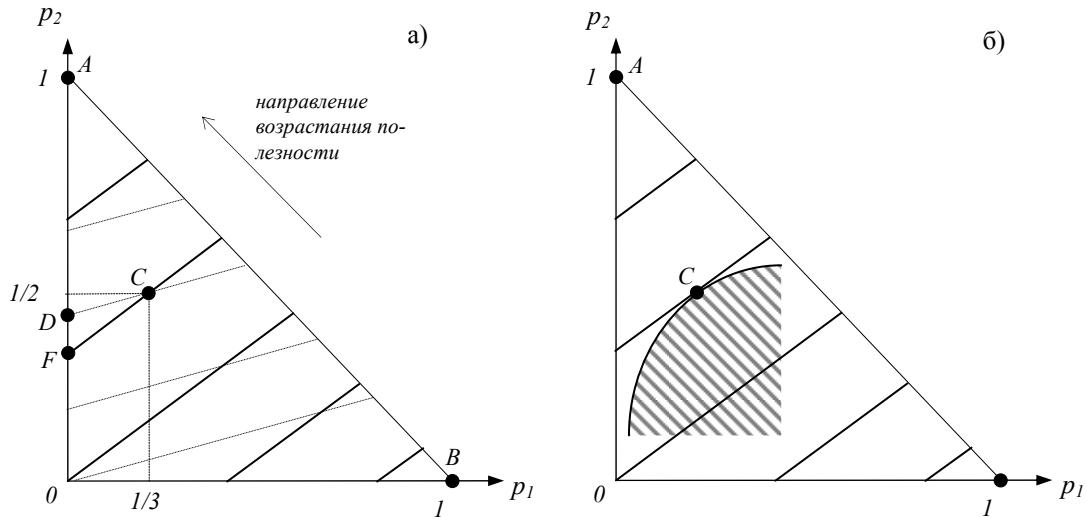


Рисунок 3-8

Предпочтения, соответствующие гипотезе ожидаемой полезности. На рисунке, предпочтения лица, принимающего решения, отображены в координатах вероятностей – каждая точка в координатной плоскости соответствует некоторому распределению выигрышей. Сплошные линии представляют собой кривые безразличия. В соответствии с гипотезой ожидаемой полезности, предпочтения линейны по вероятности, – тем самым кривые безразличия являются прямыми линиями. Пунктирные линии соответствуют распределениям, обеспечивающим одинаковый средний выигрыш. Несклонный к риску человек, из двух распределений, обеспечивающих одинаковый средний выигрыш (например, точки *C* и *D*), всегда выберет менее рискованный вариант – в данном случае, это распределение *D*. Если доступны все возможные распределения – будет выбрана точка *A* – когда вероятность максимального выигрыша равна единице. Если выбор ограничен (рисунок **б**) – будут выбрано распределение, обеспечивающее наибольшую ожидаемую полезность из возможных (точка *C*).

(3.4) - уравнение для кривой безразличия, - является уравнением прямой линии. Пусть, для определенности, $w_2 > w_3 > w_1$. Исходя из того, что функция u - возрастающая (чем выше выигрыш, тем выше полезность) имеем:

$$u(w_2) > u(w_3) > u(w_1),$$

и предпочтения упорядочены, как показывает стрелка на рисунке 3-8.

В отсутствие ограничений на допустимые значения p_1 , p_2 и p_3 наилучшим будет выбор, соответствующий точке *A*, когда вероятность наибольшего выигрыша равна единице.

Если область выбора по каким-либо причинам ограничена (как на рисунке 3-8б), наилучшим выбором будет, например, точка *C*.

Пунктирными линиями на рисунке 3-8 изображены комбинации вероятностей с одинаковым ожидаемым (средним) выигрышем: такие, что выполняется условие:

$$p_1w_1 + p_2w_2 + p_3w_3 = w_3 + (w_1 - w_3)p_1 + (w_2 - w_3)p_2 = const.$$

С помощью рисунка 3-8 можно привести еще одну прозрачную иллюстрацию свойства *несклонности к риску*. Лотереи, соответствующие точкам *C* и *F*, для индивида эквивалентны (лежат на одной кривой безразличия), хотя лотерея *F* обеспечивает меньший средний выигрыш. Почему? Дело в том, что изображенные на

рисунках 3-8а и 3-8б кривые безразличия соответствуют человеку, *несклонному к риску* (они проходят круче, чем линии, соответствующие одинаковому среднему выигрышу). При переходе от *C* к *F* снижается вероятность максимального выигрыша, но и вероятность наименьшего выигрыша также уменьшается, в то время как вероятность промежуточного выигрыша возрастает. Можно сказать, что, хотя вариант *F* дает меньший ожидаемый выигрыш, он является менее рискованным, что делает варианты *C* и *F* эквивалентными для человека не склонного к риску.

Если бы кривые безразличия проходили параллельно кривым, соответствующим одинаковому среднему выигрышу, это говорило бы о нейтральности к риску. Случай склонности к риску изображен на рисунке 3-9. Для склонного к риску человека снижение рискованности (например, переход от *C* к *D*) всегда ухудшает положение, даже при одинаковом среднем выигрыше (точки *C* и *D* лежат на одной пунктирной линии, то есть, обеспечивают один и тот же средний выигрыш).

3.2.2. Выбор при риске и неопределенности: простой пример

Рассмотрим предельно простой пример, иллюстрирующий рассмотренные нами концепции выбора в условиях риска. Пусть инвестор стоит перед выбором между двумя проектами: первый (скажем, проект *A*) обещает принести при благоприятной экономической ситуации прибыль в размере 10 млн. гривен, или убытки в размере 1 млн. гривен. Второй проект (проект *B*) в аналогичных ситуациях обеспечивает соответственно прибыль в 5 млн. гривен или убытки в 0.5 млн. гривен.

Выбор при неопределенности

Вначале будем считать, что нет никаких оснований судить о вероятностях благоприятной или неблагоприятной ситуации, то есть выбор осуществляется в условиях *неопределенности*. Возможности выбора можно изобразить с помощью таб-

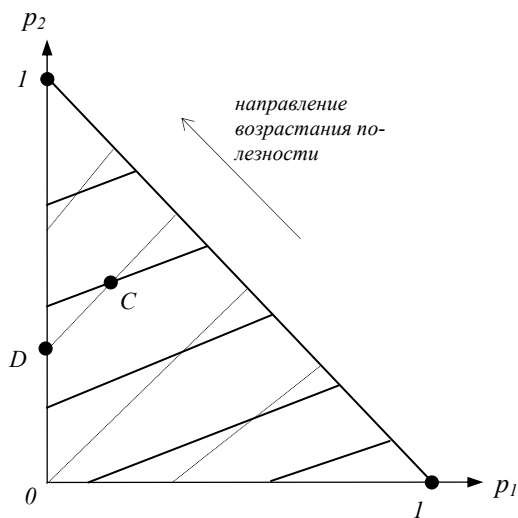


Рисунок 3-9

Предпочтения человека, склонного к риску. Из двух распределений с одинаковым средним выигрышем (например, *C* и *E*), склонный к риску субъект всегда выберет более рискованное (в данном случае — *C*).

лицы:

	Благоприятные условия	Неблагоприятные условия
Проект А	Прибыль = 10	Прибыль = -1
Проект В	Прибыль = 5	Прибыль = -0.5

Подобная модель в теории принятия решений носит название «игры с природой», а матрица, отображающая выигрыши (убытки) для каждого из решений при различных «состояниях природы» носит название *платежной матрицы*.

Критерием выбора может быть, например, *минимаксный критерий* (минимизация наибольших возможных убытков):

$$\min \{ \max \{ -100, 10 \}, \max \{ -50, 5 \} \} = 5,$$

(будет выбран проект В);

или *критерий Гурвица*:

$$\alpha \max_i \{u_i\} + (1 - \alpha) \min_i \{u_i\}$$

где α - параметр $0 < \alpha < 1$; либо какой-то иной критерий. Тем не менее, при предположении об отсутствии какой-либо информации о распределениях случайных исходов, достаточно обоснованные выводы о предпочтительности того или иного решения делать чрезвычайно трудно. Это справедливо и в случае, если бы мы вместо заданных значений прибыли использовали в платежной матрице некоторые оценки *полезности* каждого из вариантов решения.

Однако, как уже отмечалось, выбор при неопределенности для большинства реальных ситуаций, не является адекватной моделью. Как правило, человек, принимающий решения, имеет некоторые представления (которые могут быть основаны на предыдущем опыте, прогнозах экспертов и т.д. - то есть на определенном массиве *информации*) о вероятностях возможных событий. Более того, даже когда отсутствует всякая информация, мы можем исходить из так называемого *принципа максимума неопределенности* - считать равновероятными все возможные исходы (тем самым, делая предположение о *равномерном распределении* случайных параметров). Так или иначе, модель выбора в условиях риска является более соответствующей реальности.

Выбор при риске

В нашем примере, будем считать, что исходя из некоторых соображений рассчитаны вероятности благоприятного и неблагоприятного сценариев, соответственно p_1 и p_2 (пусть, например, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.1$). Тогда множество исходов составит: (10, -1, 5, -0.5), и выбор необходимо сделать из двух лотерей:

- 1) (0.9, 0.1, 0, 0);
- 2) (0, 0, 0.9, 0.1).

Ожидаемая прибыль для проекта А составляет:

$$0.9 \times 10 + 0.1 \times (-1) = 8.9 \text{ млн. гривен,}$$

для проекта *B*:

$$0.9 \times 5 + 0.1 \times (-0.5) = 4.45 \text{ млн. гривен.}$$

Что именно выберет инвестор, зависит от того, как он оценивает для себя каждый из выигрышей - то есть какова *полезность* каждого из возможных вариантов финансового результата.

Если инвестор выбирает проект *A*, мы, исходя из гипотезы ожидаемой полезности, можем заключить, что его функция полезности имеет вид подобный тому, как показано на рисунке 3-10а - детерминированный эквивалент выигрыша для проекта *A* больше, чем для проекта *B*. Если более предпочтительным оказывается проект *B* - функция полезности имеет вид подобный тому, который изображен на рисунке 3-10б.

Заметим, что функция полезности на рисунках 3-10а и 3-10б описывает поведение человека несклонного к риску. Выбор того или иного проекта здесь определяется лишь степенью несклонности к риску (на рисунке - кривизной функции полезности прибыли).

Человек, нейтральный по отношению к риску или склонный к риску (независимо от степени склонности) в нашем примере всегда выберет проект *A*, который обеспечивает большую ожидаемую прибыль.

Оценка степени риска

Модель выбора решений значительно упрощается, если предположить, что каждому из проектов можно поставить в соответствие *показатель степени риска*.

Наиболее естественный путь - использовать показатель, характеризующий степень возможного отклонения фактического размера прибыли от ожидаемого - например, величину *стандартного отклонения* или *дисперсии* случайной величины прибыли для каждого из вариантов решения.

Дисперсия для рассматриваемых нами проектов *A* и *B* составит:

$$D_A = 0.9 \times (10 - 8.9)^2 + 0.1 \times (-1 - 8.9)^2 = 10.89,$$

$$D_B = 0.9 \times (5 - 4.45)^2 + 0.1 \times (-0.5 - 4.45)^2 = 2.7225$$

стандартное отклонение:

$$\sigma_A = \sqrt{10.89} = 3.3,$$

$$\sigma_B = \sqrt{2.7225} = 1.65$$

Чем больше дисперсия (стандартное отклонение), тем больше риска содержит проект. Если считать показатель стандартного отклонения *единственным*, который характеризует рискованность проекта, то для инвестора при выборе значимыми будут являться только две величины - *ожидаемая (средняя) доходность* и *степень риска (стандартное отклонение)*. Функция предпочтений в этом случае зависит только от двух параметров, и для описания предпочтений инвестора мы можем использовать аппарат кривых безразличия между степенью риска и ожидаемой прибылью. Выбор, как и ранее, будет зависеть от отношения к риску инвестора. Более предпочтительным может оказаться проект *A* (рисунок 3-11а), про-

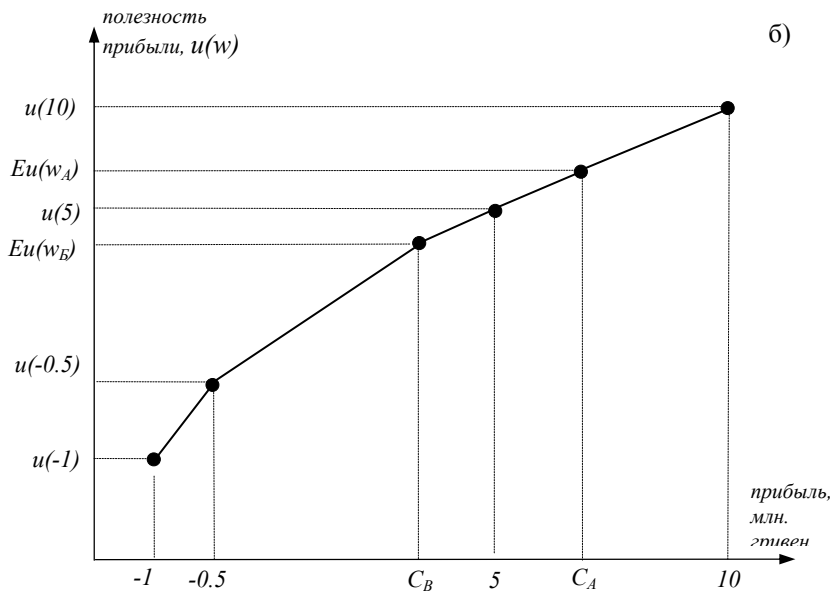
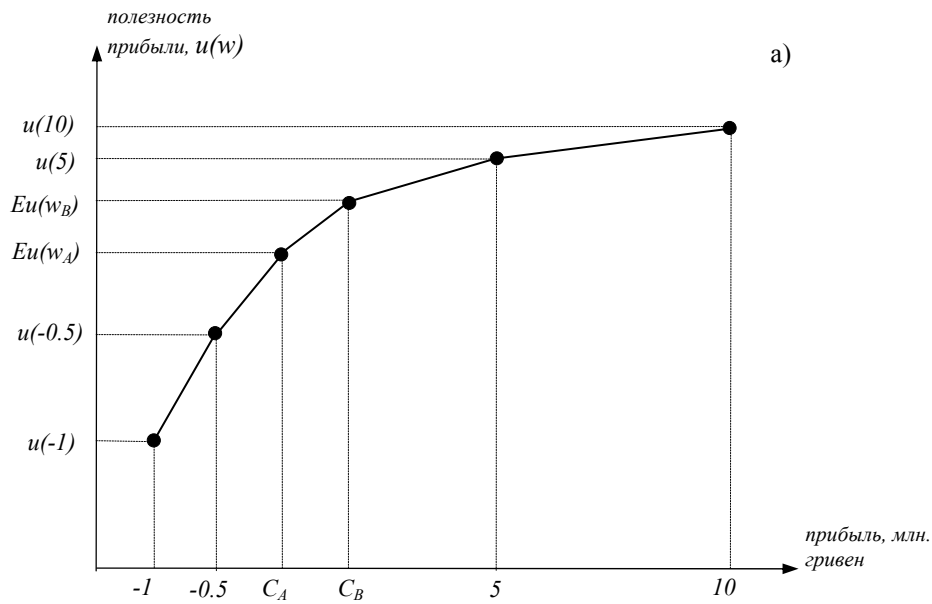


Рисунок 3-10

Выбор при риске определяется степенью вогнутости функции полезности, которая характеризует несклонность к риску данного субъекта. Более несклонный к риску человек (рисунок а), выберет относительно менее рискованный проект (предпочтет проект В проекту А). При меньшей несклонности к риску предпочтения могут быть на стороне проекта А (рисунок б).

ект В (рисунок 3-11б), либо оба проекта могут оказаться одинаково привлекательными (рисунок 3-11в). В соответствии с введенной ранее терминологией, выбор проекта А соответствует поведению относительно более «агрессивного» инвестора, в то время как выбор проекта В характерен для относительно более «консервативного» подхода.

Как и в предыдущем примере, нейтральный или склонный к риску инвестор всегда выберет проект А.

3.2.3. Функция полезности и отношение к риску

Форма функции предпочтений в теории ожидаемой полезности имеет вид:

$$V(P) = E_P[u(w)] \quad (3.5)$$

где w - случайная величина выигрыша (прибыли, богатства и т.п.), P - вероятностное распределение (дискретное или непрерывное) случайной величины, $u(\cdot)$ - функция полезности богатства, $E_P[\cdot]$ - математическое ожидание, рассчитанное по вероятностному распределению P .

В качестве функции полезности может, вообще говоря, рассматриваться любая *выпуклая вверх* (вогнутая) функция. Показатель, характеризующий степень вогнутости функции u :

$$\rho(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \quad (3.6)$$

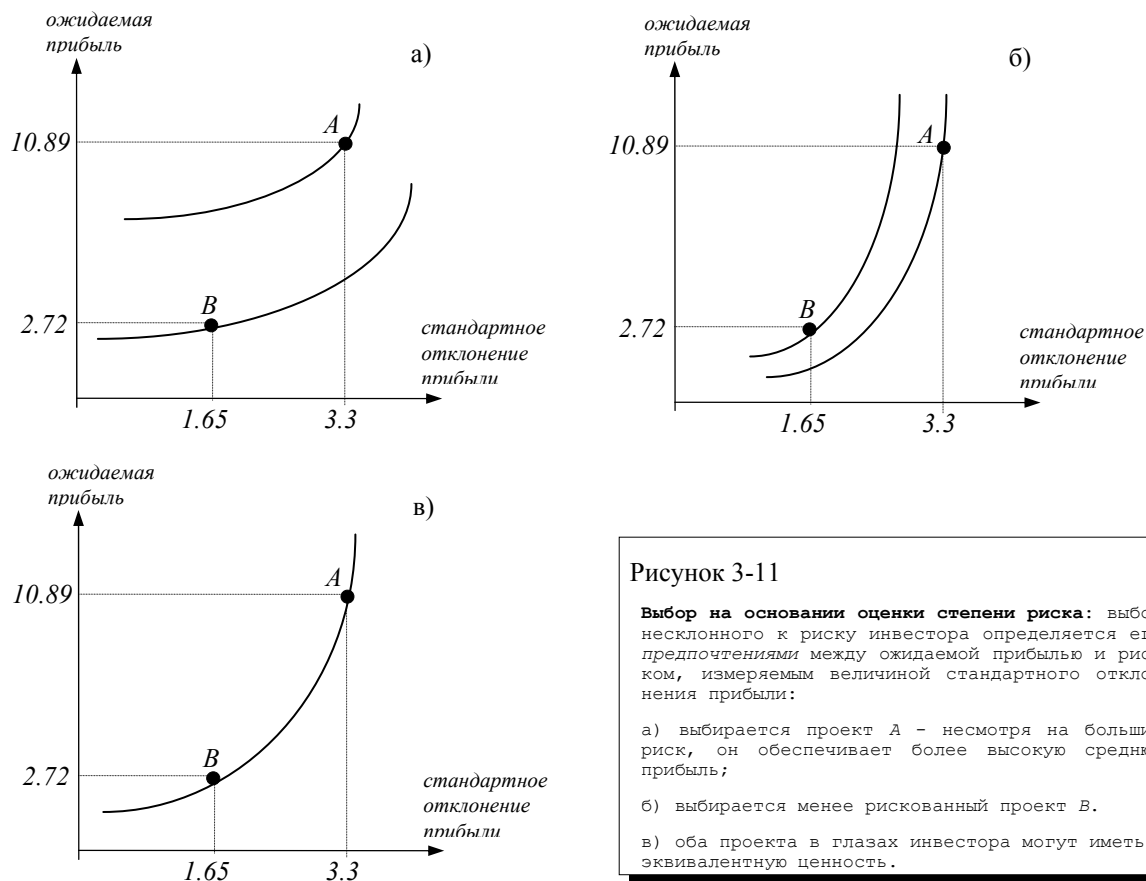
называют *абсолютной локальной степенью несклонности к риску*⁹. Величина:

$$\rho^*(w) = w\rho(w) \quad (3.7)$$

называется *относительной локальной степенью несклонности к риску*. Конкретную форму функции полезности богатства $u(\cdot)$, как правило, выводят из тех или иных предположений о зависимости степени несклонности к риску от величины богатства. Наиболее часто в прикладных и теоретических моделях используются:

- 1) *Функция с постоянной абсолютной несклонностью к риску* (степень абсолютной несклонности к риску не зависит от величины богатства или интервала на котором определен возможный выигрыш): $\rho(w)=k$, где k - константа, характеризующая степень несклонности к риску. Функция полезности в этом случае представляет собой экспоненту:

⁹ Величина $\rho(w)$, рассчитанная по формуле (3.6) называется коэффициентом Пратта-Эрроу (см. K.J.Arrow. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*. Helsinki, 1965; J.W.Pratt. *Risk Aversion in the Small and in the Large*. *Econometrica* 32, 1964, p. 122-136).



$$u(w) = -e^{-kw} \quad (3.8)$$

- 2) Функция с постоянной относительной несклонностью к риску является степенной функцией:

$$u(w) = w^\lambda, \quad (3.9)$$

($0 < \lambda < 1$). Степень относительной несклонности к риску характеризует величина $(1-\lambda)$.

- 3) Функция с убывающей абсолютной несклонностью к риску: как правило, считается, что для большинства людей характерно снижение степени несклонности к риску с увеличением богатства, то есть люди, обладающие большей величиной богатства характеризуются большим желанием рисковать. Наиболее часто используется функция полезности с гиперболической абсолютной несклонностью к риску, то есть $\rho(w)$ выражается соотношением:

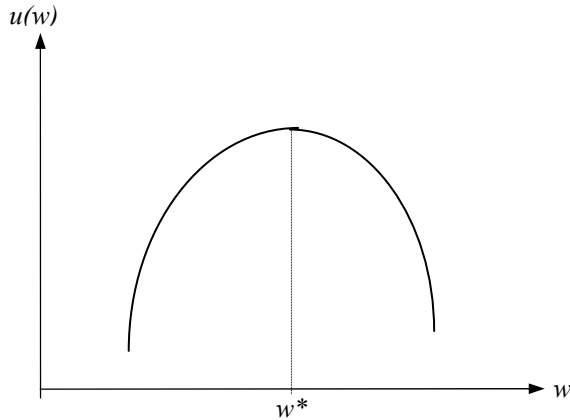


Рисунок 3-12

Квадратичная функция полезности. Данная форма функции полезности богатства имеет смысл только на участке, где она возрастает (то есть до уровня богатства w^*). Снижение полезности при росте богатства противоречит стандартным допущениям экономической теории.

$$\rho(w) = \frac{1}{a + bw}, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (3.10)$$

Тогда:

$$u(w) = \left(w + \frac{a}{b}\right)^{1-\frac{1}{b}}, \quad \text{если } 0 < b < 1. \quad (3.11)$$

$$u(w) = \ln\left(w + \frac{a}{b}\right), \quad \text{если } b = 1. \quad (3.12)$$

$$u(w) = -e^{-w/a}, \quad \text{если } b = 0. \quad (3.13)$$

Заметим, что случай (3.13) аналогичен (3.8) при $k=1/a$, а функция (3.11) при $a=0$ превращается в (3.9), причем $1-\lambda=1/b$. В целом, при $a=0$ относительная несклонность к риску постоянна, при $a>0$ - возрастает, и при $a<0$ - убывает.

- 4) Если единственной мерой риска считать показатель стандартного отклонения или дисперсии - это предполагает квадратичную форму функции полезности¹⁰:

$$u(w) = \alpha w - \beta w^2, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (3.14)$$

Квадратичная форма функции полезности (рисунок 3-12) - один из главных недостатков предположения о *стандартном отклонении*, как единственном показателе, характеризующем *степень риска*¹¹. В этом случае, во-первых, на определенном промежутке значений полезность с увеличением

¹⁰ Действительно: $E[\alpha w - \beta w^2] = \alpha Ew - \beta E[w^2] = \alpha Ew - \beta[(Ew)^2 + \sigma^2]$, где Ew - математическое ожидание случайной величины w , σ - стандартное отклонение.

¹¹ Предположение о том, что стандартное отклонение можно рассматривать как единственный показатель, характеризующий риск, справедливо также в случае, когда распределение результата решения (например - случайной величины богатства) является *нормальным*.

размера богатства снижается, во-вторых, рост богатства увеличивает несклонность к риску, что противоречит эмпирическим наблюдениям.

3.2.4. Оценка отношения к риску

Теория ожидаемой полезности - достаточно мощный инструмент не только в теории, но и для решения практических задач. Она дает возможность определить оптимальные для данного человека решения, основываясь на его индивидуальных отношениях предпочтения - зная степень его несклонности к риску (функцию полезности).

Каким образом можно оценить степень несклонности к риску? Простейшая методика состоит в том, чтобы человек определил свой индивидуальный детерминированный эквивалент для нескольких простых лотерей.

Например, пусть необходимо оценить функцию полезности человека на промежутке от 0 до 1000 гривен. Для определенности примем $u(1000)=1$, $u(0)=0$. Первым вопросом может быть: во сколько вы оцениваете (скажем, за какую минимальную сумму могли бы продать) лотерейный билет, по которому выигрыш составит 1000 или 0 гривен с шансами 50:50? Пусть, к примеру, ответ был - 200 гривен. Этот ответ дает нам возможность определить первую точку на кривой $u(w)$ в промежутке $(0, 1000)$, - это будет точка, где значение $w=200$ гривен соответствует значению полезности 0.5:

$$0.5 = 0.5 \times u(1000) + 0.5 \times u(0),$$

то есть $u(200)=0.5$. Последующие вопросы могут уточнить положение кривой функции полезности и проверить непротиворечивость ответов. Например, пусть на второй вопрос - во сколько можно оценить лотерею, в которой с равными шансами можно выиграть 0 или 200 гривен?, - получен ответ - 30 гривен. Это означает, что

$$u(30) = 0.5 \times u(200) + 0.5 \times u(0) = 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0 = 0.25.$$

Путем аппроксимации полученных точек и исходя из некоторого предположения о форме функции полезности (например, функция с постоянной несклонностью к риску или квадратичная функция), можно определить конкретный вид функции полезности.

3.2.5. Выбор в условиях риска и инвестиции

В настоящей главе, в качестве показателя эффективности решений мы чаще всего рассматривали некоторый стоимостной показатель - размер дохода за некоторый промежуток времени, общий размер богатства (состояния) индивида, размер прибыли в результате реализации инвестиционного проекта, и т. п. В финансах наиболее универсальным показателем эффективности инвестиций является *доходность* - процент прибыли к общему объему инвестированных средств. Изложенные выше выводы и положения в целом справедливы и для этого случая, но необходимы определенные уточнения. Так, в общем случае невозможно построить функцию полезности показателя *доходности*, - потому, что соотношение полезностей различных результатов будет зависеть не столько от собственно доходности

инвестиций в процентном выражении, сколько от величины стоимостных показателей. Проще говоря, если речь идет о выборе между двумя направлениями инвестиций со ставками доходности 20% и 10% соответственно, в случае, когда мы реально выбираем между величинами 2 доллара или 1 доллар (в абсолютном исчислении) - обе альтернативы будут практически эквивалентны. Если же речь идет о выборе между 2 или 1 *миллионом* долларов - различие может стать существенным¹². Данными рассуждениями можно пренебречь, если исходить из предположения о постоянной несклонности к риску. Индивид с постоянной несклонностью к риску всегда будет предпочитать одни и те же альтернативы, независимо от изменения масштаба величин.

Наиболее распространенным в финансовой теории является предположение о том, что при оценке инвестиционных решений для инвестора важны только два показателя - *ожидаемая ставка доходности* и степень риска, в качестве которой чаще всего рассматривается *стандартное отклонение* случайной величины ставки доходности от своего среднего значения. Это предположение, в частности, лежит в основе *современной портфельной теории*, рассматриваемой в 5-й главе.

Несколько уточняется в финансовой теории и понятие *премии за риск*. Премия за риск по отношению к некоторому инвестиционному решению - это *разница между ожидаемой ставкой доходности данного финансового вложения и ставкой доходности, которую можно получить в отсутствие какого бы то ни было риска*. Последнюю называют *безрисковой ставкой доходности*. Это понятие чрезвычайно важно в современных финансах. Наличие безрисковой ставки предполагает, что всегда существует инвестиционное решение, результат которого (доходность) с определенностью известен заранее. Безрисковая ставка доходности играет роль точки отсчета при оценке эффективности инвестиций. Строго говоря, предположение о существовании безрисковой ставки доходности также является упрощением. Далее мы покажем, что даже те инвестиции, которые традиционно считаются безрисковыми, всегда несут в себе больший или меньший риск.

3.3. Выводы

1. Выбор решений в условиях риска состоит в поиске наилучшей для данного субъекта альтернативы исходя из имеющегося у него информации о вероятностных распределениях результата. Выбор при риске - наиболее адекватная модель реального процесса принятия решений в экономике, так как случаи полной определенности чрезвычайно редки, а выбор при неопределенности (когда любая информация о вероятностях полностью отсутствует) - сводится к ситуации в условиях риска, если все возможные исходы считать равновероятными.
2. Экономическая теория исходит из предположения, что абсолютное большинство экономических агентов не склонны к риску, то есть, согласны идти

¹² Капиталист, который по словам Карла Маркса, пошел бы на любое преступление ради дохода в 300%, вряд ли бы стал что бы то ни было предпринимать, если бы речь шла о максимально достижимом *объеме* прибыли в один доллар.

на риск только в обмен на дополнительный ожидаемый выигрыш. Премия за риск - это часть ожидаемого выигрыша, от которой человек готов отказаться, чтобы избежать риска.

3. Теория ожидаемой полезности является одной из наиболее адекватных и общепринятых в экономике и финансах гипотез, объясняющих решения людей в условиях риска. Согласно теории ожидаемой полезности, предпочтения людей линейны по вероятности, и человек всегда выбирает то решение, которое максимизирует ожидаемую полезность результата.
4. В качестве меры риска во многих экономических моделях используют показатель стандартного отклонения случайной величины, характеризующей результат решения. Такой подход удобен при решении множества теоретических и практических задач современных финансов. Тем не менее, данная гипотеза упрощает действительность, так как неявно предполагает квадратичную форму функции полезности либо нормальное распределение результата решения.

Ключевые понятия

Риск	Ожидаемая полезность	
Неопределенность	Средний выигрыш	
Премия за риск	Стандартное отклонение	вы-
Несклонность к риску	игрыша	
Полезность богатства	Дисперсия выигрыша	
Детерминированный эквивалент	Степень несклонности к риску	