УДК 517.54+517.538.5

Кашпіровський О. І., Хруцька О. О.

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МНОГОЧЛЕНІВ ФАБЕРА[1]

Розглянуто зображення поліномів Фабера як власних функцій деякого інтегро-диференціального оператора, знайдено зв'язок між коефіцієнтами основних та спряжених многочленів Фабера.

Ключові слова: многочлени Фабера, ряд Лорана, поліноми Чебишева, генератриса, конформні відображення, лемніската, овал Касіні.

Нехай $\mathfrak{M}$ — замкнена обмежена множина з $\mathbb{C}^1$ з кусково гладкою границею $\Gamma = \partial\mathfrak{M}$ та однозв'язним замкненим доповненням

$$C\mathfrak{M} = \left(\overline{\mathbb{C}^1} \setminus \mathfrak{M}\right) \cup \Gamma.$$

Будемо називати $\mathfrak{M}$ допустимим комплексним континуумом. Більш загальне означення допустимого комплексного континуума дається у праці В. К. Дзядика [6].

Нехай функція $w = \Phi(z)$ задає конформне відображення $C\mathfrak{M}$ зовнішності континуума $\mathfrak{M}$ на $C\mathfrak{D}_{R_0}$ зовнішність деякого круга $\mathfrak{D}_{R_0} = \{w : |w| \leq R_0\}$ з центром в точці $w = 0$ і задовольняє умовам

$$\Phi(\infty) = \infty, \ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1 \qquad (1)$$

Функція є аналітичною в області $C\mathfrak{M}$, крім точки $z = \infty$, і має в цій точці простий полюс. Тому її лоранівський розклад в деякому околі цієї точки з урахуванням (1) матиме вигляд:

$$\Phi(z) = z + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k z^{-k}, \alpha_{-1} = 1.$$

Нехай $z = \Psi(w)$ — обернене відображення $\Psi(w) : C\mathfrak{D}_{R_0} \to C\mathfrak{M}$. Тоді $\Psi(w)$ також допускає розвинення в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$:

$$\Psi(w) = w + \beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k z^{-k}, \beta_{-1} = 1.$$

Для довільного $R \geq R_0$ визначимо лінію рівня

$$\Gamma_R = \{z : z \in C\mathfrak{M}, \ |\Phi(z)| = R\}.$$

Нехай $\mathfrak{M}_R$ — континуум, обмежений лінією Γ_R, $C\mathfrak{M}_R$ його замкнене доповнення, $R \geq R_0$. Очевидно, $\mathfrak{M}_{R_0} = \mathfrak{M}$, $C\mathfrak{M}_{R_0} = C\mathfrak{M}$, $\Gamma_{R_0} = \Gamma$.

Нехай функція $f(z)$, що в околі точки $z = \infty$ допускає розвинення в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_k z^k. \qquad (2)$$

Позначимо через $[f(x)]$ ту частину ряду (2), яка містить невід'ємні степені z. Отже,

$$[f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \ z \in \mathfrak{M}_R, \ R > R_0.$$

Розглянемо для цілого невід'ємного $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ степінь $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned} &\Phi^n(z) = \\ &= \left(z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_k z^{-k} + \ldots\right)^n = \\ &= z^n + u_{n1} z^{n-1} + u_{n2} z^{n-2} + \ldots + u_{nn-1} z + u_{nn} + \\ &\quad + b_{n1} z^{-1} + b_{n2} z^{-2} + \ldots + b_{nk} z^{-k} + \ldots \qquad (3) \end{aligned}$$

Отже, для $\Phi^n(z)$ має місце зображення:

$$\Phi^n(z) = \Phi_n(z) + E_n(z), \qquad (4)$$

де $E_n(z) = b_{n1} z^{-1} + b_{n2} z^{-2} + \ldots + b_{nk} z^{-k} + \ldots$ регулярна при $z = \infty$ складова $\Phi^n(z)$, $E_n(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, $\Phi_n(z)$ — поліноміальна складова $\Phi^n(z)$.

Поліноміальну частину розвинення (3) називають многочленом Фабера степеня n континуума $\mathfrak{M}$. Отже,

$$\begin{aligned} &\Phi_n(z) = [\Phi^n(z)] = \\ &= z^n + u_{n1} z^{n-1} + u_{n2} z^{n-2} + \ldots + u_{nn-1} z + u_{nn}. \end{aligned} \qquad (5)$$

З формули (5) знайдемо послідовно

$$\Phi_0(z) = 1, \Phi_1(z) = z + \alpha_0;$$

$$\Phi_2(z) = z^2 + 2\alpha_0 z + \alpha_0^2 + 2\alpha_1.$$

Поліноми $\Phi_n(z)$ вперше було розглянуто Г.Фабером у праці [1]. З означення $\mathfrak{M}_R$ і поліномів Фабера випливає, що послідовність поліномів Фабера $\{\Phi_n(z), n \in \mathbb{N}_0\}$ є спільною для всіх континуумів $\mathfrak{M}_R, \ R \geq R_0$.

[1]Стаття частково підтримана Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

Інтерес до поліномів Фабера пов'язаний з тим, що функції $f(z)$ регулярні на континуумі $\mathfrak{M}$, тобто аналітичні у внутрішніх точках $\mathfrak{M}$ з неперервним продовженням на границю Γ допускають розвинення в ряд за поліномами Фабера, який є аналогом ряду Тейлора для круга [4–6].

Враховуючи (4) маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{[\Phi_n(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{[\mathcal{E}_n(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta.$$

Але перший інтеграл справа рівний $\Phi_n(z)$, а другий — нулю. Отже,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (6)$$

Цю формулу можна використовувати як означення многочленів Фабера. Зробимо в інтегралі (6) заміну $\zeta = \Psi(t)$. Тоді отримаємо

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{t^n\Psi'(t)}{\Psi(t)-z}dt.$$

Звідси випливає, що многочлени Фабера є коефіцієнтами Лорана в розкладі функції

$$\Phi(t,z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z},\ |t|>R, \qquad (7)$$

в околі точки $t=\infty$, тобто має місце розклад

$$\Phi(t,z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}},\ |t|>R.$$

Таким чином, функція (7) є генератрисою для многочленів Фабера.

Наведемо приклади обчислень поліномів Фабера для деяких континуумів.

1. *Круг*

   $\mathfrak{D}_R(a) = \{z : |z-a| \le R\}$ — круг, функція $\Phi(z)$ в цьому випадку буде $w=\Phi(z)=z-a$, і отже, $\Phi_n(z) = (z-a)^n$, $n=0,1,2,\ldots$.

2. *Лемніската*

   Нехай $\mathfrak{L}(Q)$ — деяка лемніската, тобто

   $$\mathfrak{L}(Q_m) = \{z : |Q_m(z)| \le R\},$$

   де $Q_m(z)$ деякий поліном, зі старшим коефіцієнтом рівним 1, $R \ge R_0 > 0$.

   Для R не менших деякого R_0 лемніскати утворюють зв'язні допустимі континууми [6], які ми позначимо $\mathfrak{L}_R(Q_m)$. Функція $\Phi(z) = (Q_m(z))^{\frac{1}{m}}$ $\left(\lim\limits_{z\to\infty} z^{-1}(Q_m(z))^{\frac{1}{m}} = 1\right)$ при цьому задовольняє умові (1) і відображає доповнення лемніскати $C\mathfrak{L}_R(Q_m)$ на $C\mathfrak{D}_R$. Звідси випливає, що поліноми Фабера з степенями кратними k допускають представлення:

   $$\Phi_{mn}(z) = Q_m^n(z).$$

3. *Відрізок прямої*

   Нехай $\mathfrak{M} = [-1;1]$. Враховуючи, властивості функції Жуковського [7] для відрізка $[-1;1]$ будемо мати

   $$w = \Phi(z) = \frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1}),$$
   $$(\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{z^2-1}}{z} = 1),$$
   $$z = \Psi(w) = (w+w^{-1}).$$

   Враховуючи, що $\frac{1}{2\Phi(z)} = z-\sqrt{z^2-1}$ в лоранівському розкладі в околі точки $z=\infty$ містить тільки від'ємні степені, отримаємо

   $$\begin{aligned}\Phi_n(z) &= [\Phi^n(z)] = \\ &= 2^{-n}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n\right] = \\ &== 2^{-n}\left(\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \right.\\ &\left. + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right) = \widetilde{T}_n(z). \quad (8)\end{aligned}$$

   Зауважимо, що континууми $\mathfrak{M}_R$ у випадку, коли $\mathfrak{M} = [-1;1]$, збігаються з еліпсами Жуковського:

   $$\mathfrak{M}_R = \{z : z\in\mathbb{C}^1, z = \frac{1}{2}\left(Re^{i\phi}+R^{-1}e^{-i\phi}\right)\}.$$

   Таким чином, для еліпсів поліноми Фабера також збігаються з многочленами Чебишева.

4. *Хрест*

   Нехай $\mathfrak{M} = [-1;1]\cup[-i;i]$ — хрест. Тоді, за [7], маємо:

   $$\begin{aligned}w = \Phi(z) &= \left(\frac{z^2}{2}+\sqrt{\frac{z^4}{4}-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{z^2-1}+\sqrt{z^2+1}\right) \quad (9)\end{aligned}$$
   $$z = \Psi(w) = \sqrt{w^2+w^{-2}}.$$

   Поліноми Фабера парних степенів будуть мати вигляд:

   $$\Phi_{2n}(z) = \widetilde{T}_n(z^2).$$

Нехай функція $w = \Phi(z)$ — деяка функція, що задовольняє умовам (1) і відповідає деякому континууму $\mathfrak{M}$. На многочленах

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{n-k}$$

довільної степені $n \in \mathbb{N}_0$ введемо інтегро-диференціальний оператор

$$\Lambda = \Lambda(\mathfrak{M})$$

за формулою

$$\Lambda P_n(z) = \left[\frac{\Phi}{\Phi'} P_n'(z)\right].$$

Як бачимо, оператор $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{M})$ переводить поліноми степені n в поліноми степені n, причому степінь многочлена зберігається.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $\mathfrak{M} \in \mathbb{C}^1$ — допустимий континуум. Тоді відповідні поліноми Фабера $\{\Phi_n(z),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ є власними функціями оператора Λ*

$$\Lambda \Phi_n = n\Phi_n. \qquad (10)$$

Доведення. Доведення. Запишемо формулу для похідної $\Phi^n(z)$.

$$\frac{d}{dz}\Phi^n(z) = n\Phi^{n-1}(z)\Phi'(z).$$

Помноживши це співвідношення на дріб $\frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}$, одержимо

$$\frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}\left(\Phi^n(z)\right)' = n\Phi^n(z),$$

Виділяючи поліноміальну складову в обох частинах останньої рівності, отримаємо (10).

Розглянемо вигляд оператора Λ на прикладах.

1. У випадку круга $\mathfrak{D}_R$ оператор Λ має вигляд
$$\lambda P_n(z) z P_n'(z).$$
Відповідно, рівність (10) запишеться так
$$z(z^n)' = nz^n.$$

2. Відрізок прямої. У випадку відрізку прямої оператор матиме вигляд
$$\Lambda P_n(z) = \left[\sqrt{z^2-1}P_n'(z)\right].$$
Тоді співвідношення (10) має вигляд
$$[\sqrt{z^2-1}T_n'(z)] = nT_n(z). \qquad (11)$$
Співвідношення, еквівалентне (11), наведено в редакторських примітках В. І. Лєбєдєва у праці С. Пашковського [8].

3. У випадку лемніскати $\mathfrak{L}(Q)$ дія оператора Λ визначається формулою
$$\Lambda P_n(z) = \left[\frac{mQ(z)}{Q'(z)} P_n'(z)\right].$$

4. У випадку хреста дія оператора Λ визначається формулою
$$\Lambda P_n(z) = \left[z^{-1}\sqrt{z^4-1}P_n'(z)\right].$$

Введемо спряжену систему многочленів $\Psi_n(w),\ n \in \mathbb{N}_0$ за формулою

$$\Psi_n(w) = \left[\Psi^n(w)\right].$$

Поліноми $\Psi_n(w)$ є звичайними поліномами Фабера для континуума $\mathfrak{M}^*$, який є областю з $\mathbb{C}^1$, що обмежена лінією рівня

$$|\Psi(w)| = R_0.$$

Проілюструємо на прикладах.

1. У випадку круга звичайні та спряжені многочлени Фабера збігаються:
$$\Phi_n(z) = z^n,\ \Psi_n(w) = w^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

2. Відрізок прямої. Для відрізку прямої обернена функція $z = \Psi(w)$ має вигляд
$$z = \Psi(w) = \left(w + w^{-1}\right).$$
Тоді спряжена система поліномів визначається наступним чином:
$$\Psi_0(w) = 1,\ \Psi_1(w) = w,$$
$$\Psi_2(w) = w^2 + 2,\ \Psi_3(w) = w^3 + 3w,$$
$$\Psi_4(w) = w^4 + 4w^2 + 6, \ldots$$
$$\ldots \Psi_n(w) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k w^{n-2k}.$$

3. Нехай континуум $\mathfrak{M}$ обмежений астроїдою $x = 4\cos^3\theta,\ y = 4\sin^3\theta,\ \theta \in [0; 2\pi]$, тоді функція $z = \Psi(w)$ визначається формулою ([4, с. 58]):

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{3w^3}, |w| > 1. \qquad (12)$$

Тоді спряжені многочлени Фабера для даного континуума мають вигляд:

$$\Psi_0(w) = 1, \Psi_1(w) = w, \Psi_2(w) = w^2,$$
$$\Psi_3(w) = w^3, \Psi_4(w) = w^4 + \frac{4}{3}$$
$$\Psi_5(w) = w^5 + \frac{5}{3}w \ldots$$
$$\ldots \Psi_n(w) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{4}]} C_n^k \frac{1}{3^k} w^{n-4k}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $\mathfrak{M}$ — деякий допустимий континуум, $\mathfrak{U}$ і $\mathfrak{V}$ — дві нескінченновимірні нижньотрикутні матриці коефіцієнтів розвинень по степеням z і w многочленів $\Phi_m(z)$ і $\Psi_n(w)$, відповідно, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Тоді має місце*

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U}^{-1}.$$

Доведення. Доведення теореми 2 слідує з рівності

$$[\Phi_n(\Psi(w))] = w^n,$$

наведеної в [4, с. 63].

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{u}_{nk} z^k,$$

$$\Phi_n(\Psi(w)) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{u}_{nk} \Psi^k(w),$$

$$[\Phi_n(\Psi(w))] = \left[\sum_{k=0}^{n} \mathfrak{u}_{nk} \Psi^k(w)\right] = w^n.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathfrak{u}_{nk} \mathfrak{v}_{kj} = \delta_{nj},$$

де $j = \overline{0, n}, \delta_{nj}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = j; \\ 0, & \text{якщо } n \neq j. \end{cases}$$

1. Faber G. Über polynomische Entwicklungen / G. Faber // Math. Annalen. — 1903. — V. 57. — P. 389–408; — 1907 — V. 64. — P. 116–135.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том II. / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1967. — 628 с.
3. Смирнов В. И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. — М. : Наука, 1964. — 440 с.
4. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1984. — 336 с.
5. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Пер. с нем.; Д. Гайер. — М. : Мир, 1986. — 216 с.
6. Дзядик В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядик. — М. : Наука, 1977. — 508 с.
7. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1965.— 749 с.
8. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / Пер. с польск.; С. Пашковский. — М. : Наука, 1983. — 384 с.

O. Kashpirovsky, O. Khrutska

ABOUT SOME PROPERTIES OF FABER POLYNOMIALS

The Faber polynomials images are considered as the eigenfunctions of certain integro-differential operator. The connection between the coefficients of main and conjugated Faber polynomials system is discovered.

Keywords: Faber polynomials, Laurent series, Chebyshev polynomials, generating function, conformal mappings, lemniscate, Cassini oval.