СПЕКТРАЛЬНА ТЕОРІЯ ГРАФІВ

ВИКОНАЛА
СТУДЕНТКА 3 КУРСУ
ГОРБАЧОВА ІРИНА

ЧОМУ Я ОБРАЛА ЦЮ ТЕМУ?

- Актуальний розділ математики, який активно розвивається
- Використання спектральної теорії графів у багатьох сферах
- Робота складається з трьох розділів:
  1. Основні означення і твердження
  2. Різні методи обчислення характеристичного многочлена
  3. Спектри графів Динкіна

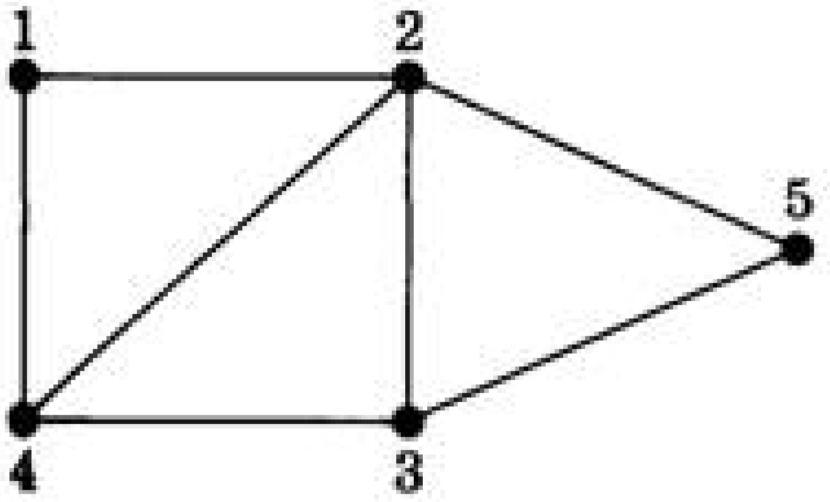
ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ТВЕРДЖЕННЯ

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ТВЕРДЖЕННЯ

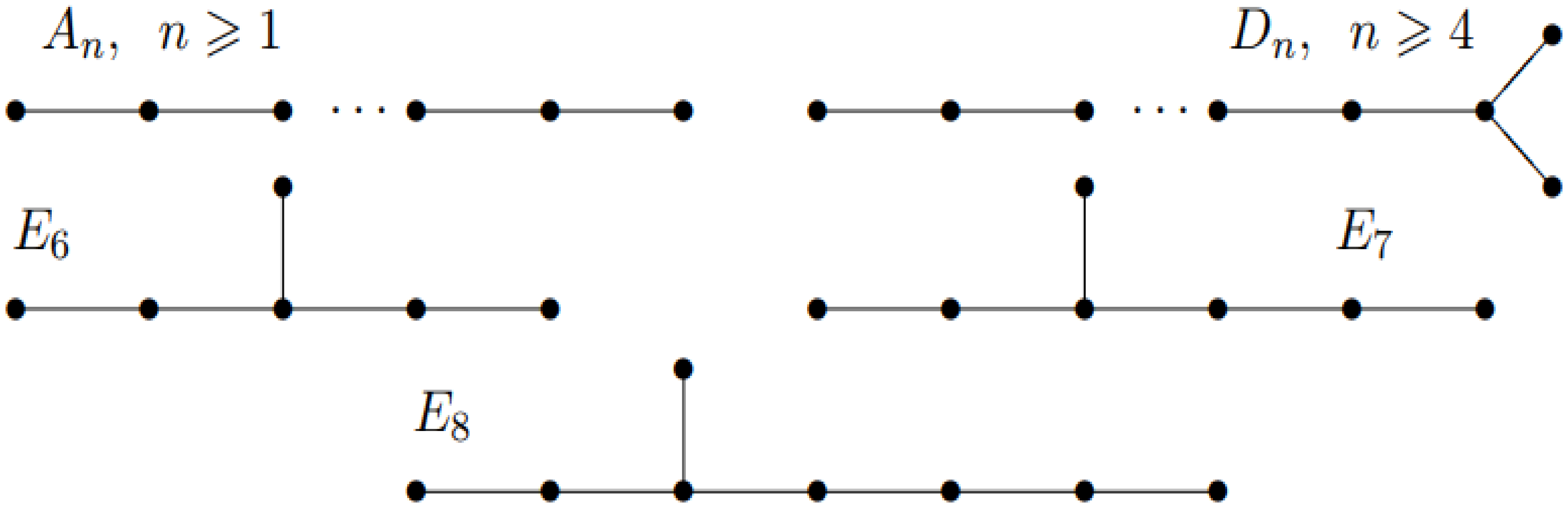
Для розуміння роботи необхідно знати такі терміни, як:

- Граф
- Матриця суміжності
- Спектр графа
- Індекс графа
- Характеристичний многочлен

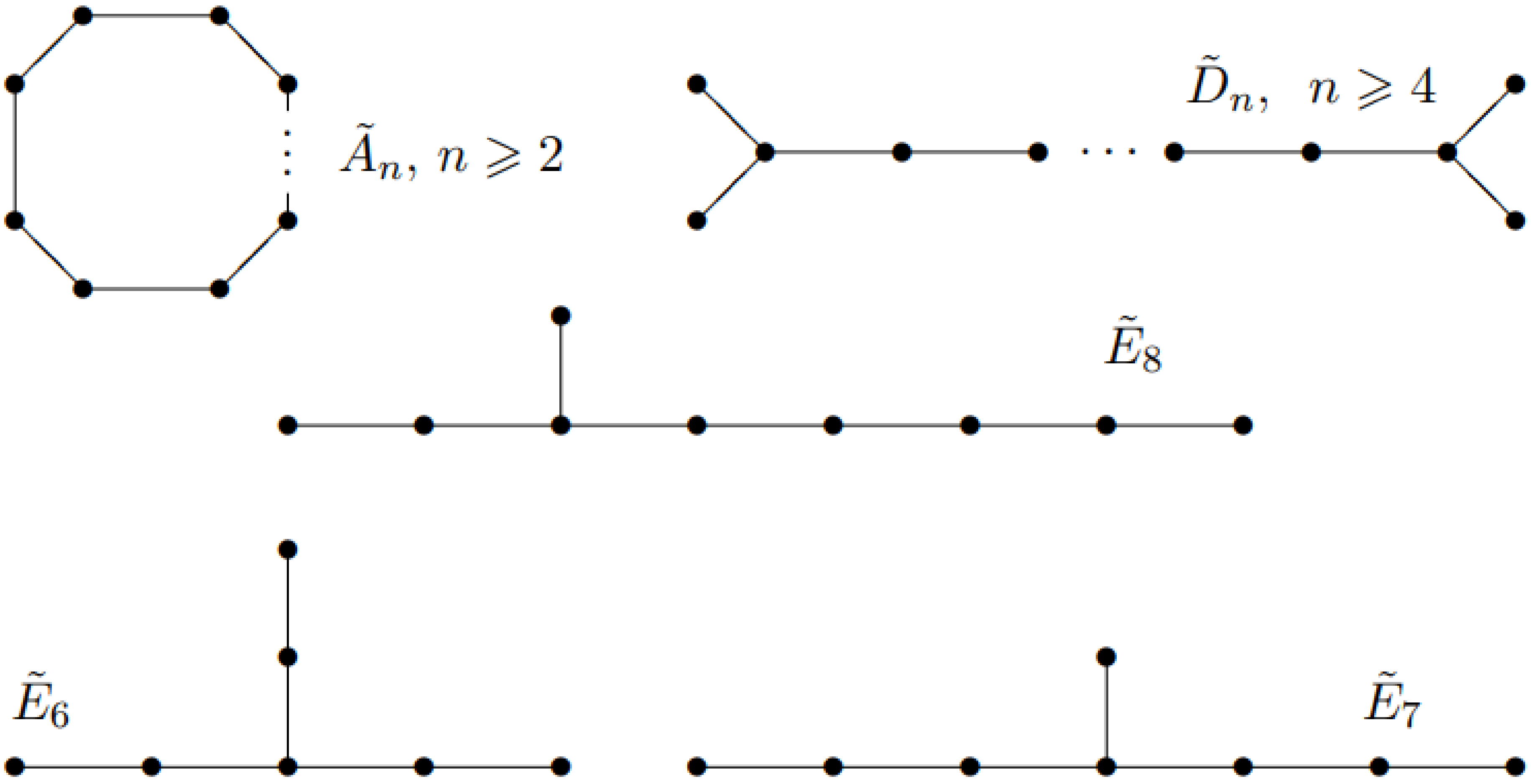


$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

НЕРОЗШИРЕНІ ГРАФИ ДИНКІНА



РОЗШИРЕНІ ГРАФИ ДИНКІНА



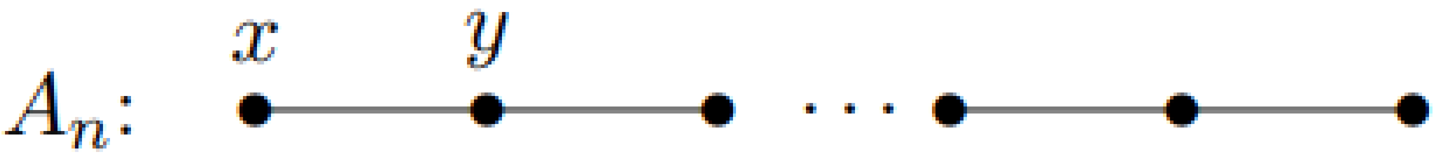
МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

РОЗДІЛ 2

РОЗКЛАД ПО ВИСЯЧІЙ ВЕРШИНІ

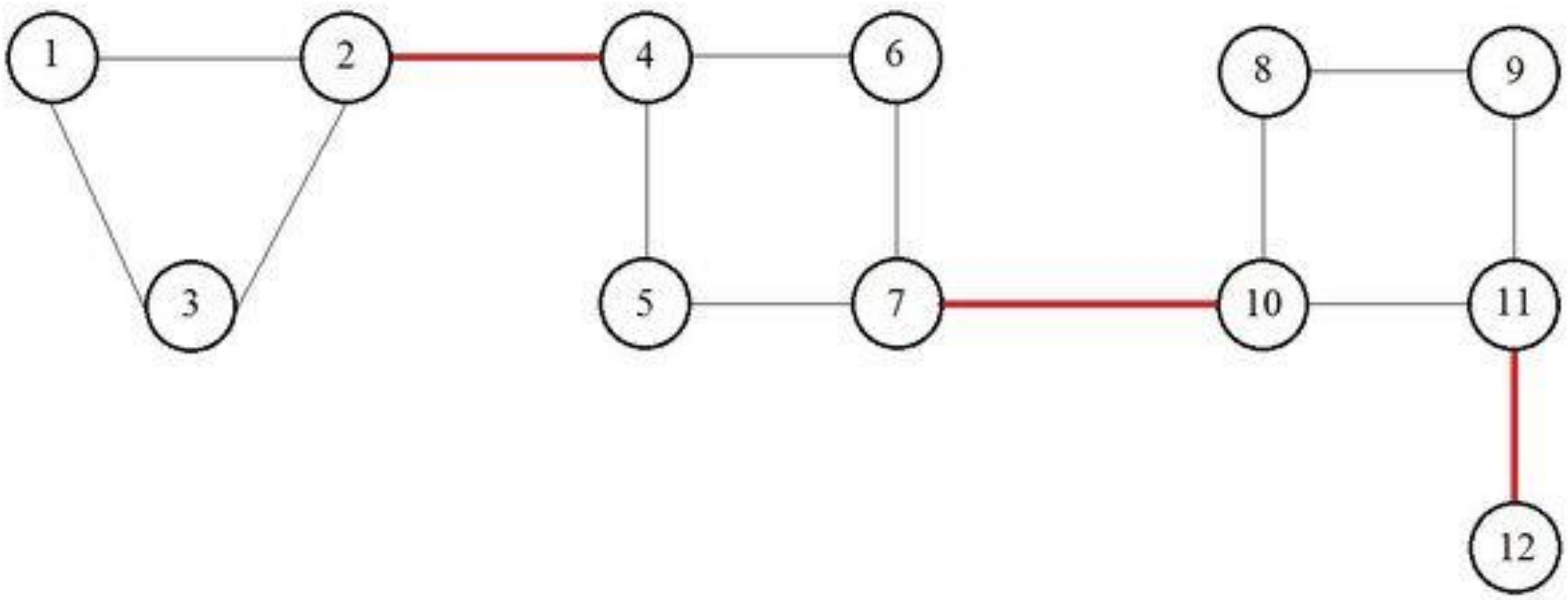
- **Лема 1.** Нехай вершина x – висяча вершина графа G і y вершина суміжна з вершиною x. Тоді: $\mathbf{P_G(\lambda) = \lambda P_{G-x}(\lambda) - P_{G-x-y}(\lambda)}$
- **Твердження 1.** Характеристичний многочлен графа Динкіна A_n ($P_n(\lambda)$) задовольняє наступному рекурентному співвідношенні:

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda),\ n > 3,\ P_1(\lambda) = \lambda \text{ і } P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$



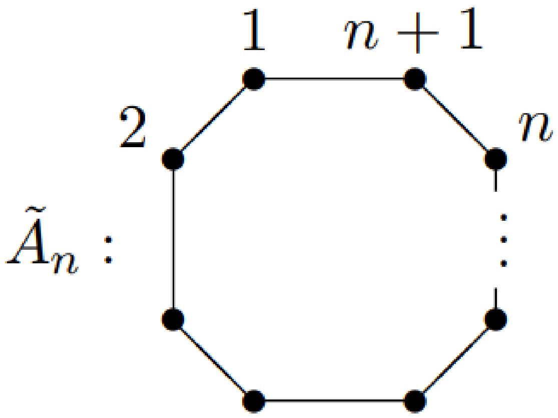
РОЗКЛАД ПО МОСТУ

Лема 2. $P_G(\lambda) = P_{G1}(\lambda)P_{G2}(\lambda) - P_{G1-x}(\lambda)P_{G2-y}(\lambda)$



ХАРАКТЕРИСТИЧНИЙ МНОГОЧЛЕН ЦИКЛА

Лема 3. $P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \lambda P_{A_n}(\lambda) - 2P_{A_{n-1}}(\lambda) - 2.$



$$P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & & & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \cdots & & \bigcirc & \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ & \bigcirc & & \cdots & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & & & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}_n}(\lambda) &= \lambda P_n - P_{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{1+n} - (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n+3} - P_{n-1} \\ &= \lambda P_n(\lambda) - 2P_{n-1}(\lambda) - 2. \end{aligned}$$

СПЕКТРИ ГРАФІВ ДИНКІНА

РОЗДІЛ 3

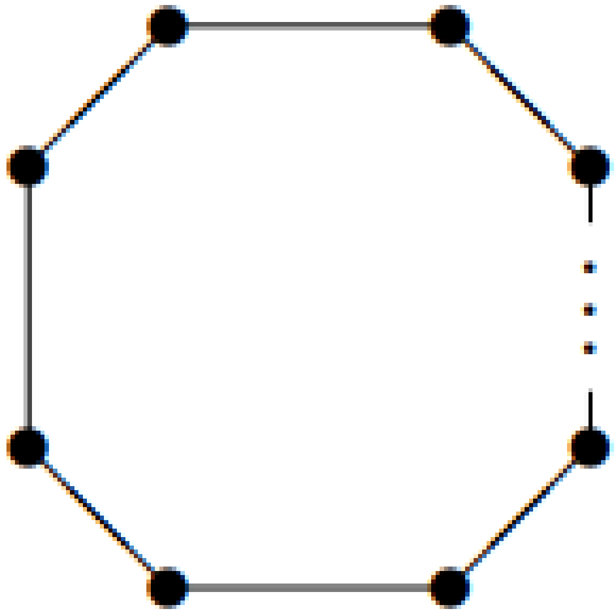
СПЕКТР ГРАФА A_n

- Спектр графа A_n ($n \geq 1$) : $\sigma(A_n) = \{2\cos\frac{j\pi}{n+1} | j = 1, \ldots, n\}$

$$A_n, \quad n \geqslant 1$$

СПЕКТР ГРАФА $\widetilde{A}_n$

- **Спектр графа $\widetilde{A}_n$ (n ≥ 2):** $$\sigma(\tilde{A}_n) = \{2\cos\frac{2j\pi}{n+1} | j = 0, \ldots, n\}$$

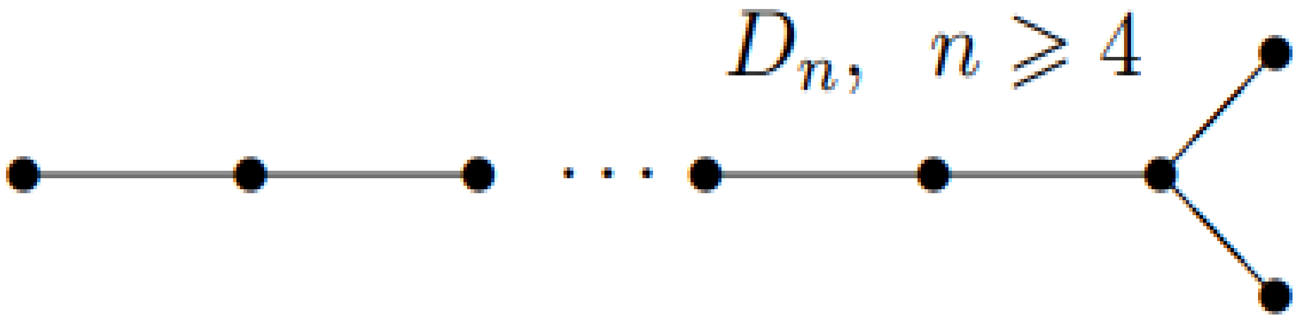


$\tilde{A}_n,\ n \geqslant 2$

СПЕКТР ГРАФА D_n

- **Спектр графа D_n ($n \geq 4$):** $$\sigma(D_n) = \{2\cos\frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)} | j = 0, \ldots, n-2\} \cup \{0\}$$

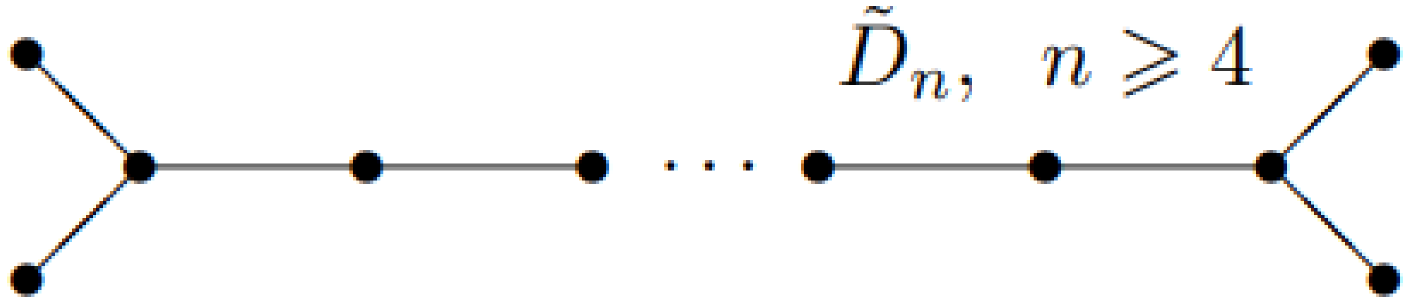
$$\lambda_{D_n} = 2\cos\frac{\pi}{2(n-1)}.$$



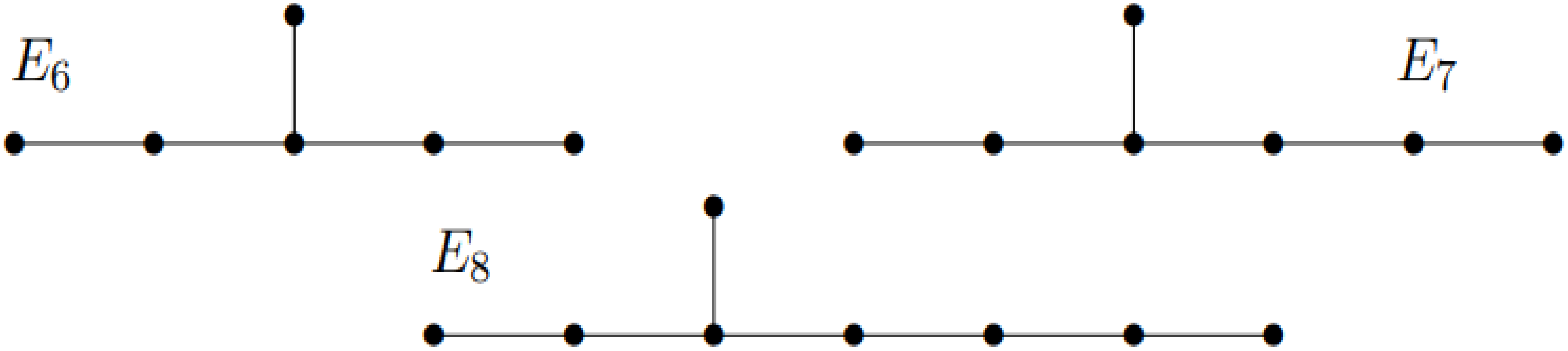
СПЕКТР ГРАФА D_n

- Спектр графа $\widetilde{D}_n$ ($n \geq 4$) : $\sigma(\tilde{D}_n) = \{2\cos\frac{j\pi}{n-2} | j = 1, \ldots, n-3\} \cup [-2, 0, 0, 2]$

$$\lambda_{\tilde{D}_n} = 2.$$



ГРАФИ ДИНКІНА E_6, E_7, E_8



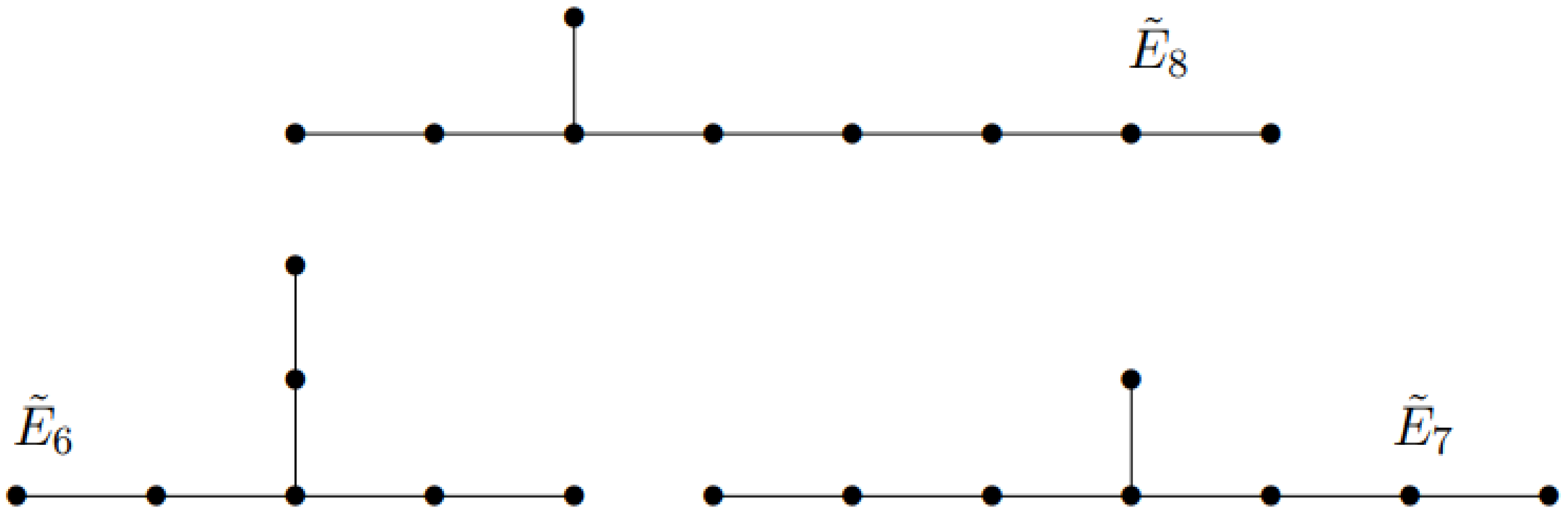
СПЕКТРИ E_6, E_7, E_8 ГРАФІВ ДИНКІНА

- **Спектр графа E_6 :** $\sigma(E_6) = \{2\cos\frac{m_j\pi}{12} | m_j = 1, 4, 5, 7, 8, 11\}$ $\lambda_{E_6} = 2\cos\frac{\pi}{12}$.
- **Спектр графа E_7 :** $\sigma(E_7) = \{2\cos\frac{m_j\pi}{18} | m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17\}$ $\lambda_{E_7} = 2\cos\frac{\pi}{18}$.
- **Спектр графа E_8 :** $\sigma(E_8) = \{2\cos\frac{m_j\pi}{30} | m_j = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

  $\lambda_{E_8} = 2\cos\frac{\pi}{30}$.

СПЕКТРИ $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$ ГРАФІВ ДИНКІНА

- Спектр графа $\widetilde{E}_6$: $\sigma(\tilde{E}_6) = [0, \pm 1, \pm 1, \pm 2]$ $\quad \lambda_{\tilde{E}_6} = 2,$
- Спектр графа $\widetilde{E}_7$: $\sigma(\tilde{E}_7) = \{2\cos\frac{j\pi}{4} | j = 1, 2, 3\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\}$ $\quad \lambda_{\tilde{E}_7} = 2,$
- Спектр графа $\widetilde{E}_8$: $\sigma(\tilde{E}_8) = \{2\cos\frac{j\pi}{5} | j = 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\}$ $\quad \lambda_{\tilde{E}_8} = 2.$



ВИСНОВКИ

- Структурована розширена інформація окремих розділів спектральної теорії графів
- Розуміння як використовувати теорію на практиці
- Поглиблене вивчення графів Динкіна та їх спектрів

Γ	$\sigma(\Gamma)$
A_n	$\{2\cos\frac{j\pi}{n+1} \| j=1,\ldots,n\}$
D_n	$\{2\cos\frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)} \| j=0,\ldots,n-2\}\cup\{0\}$
E_6	$\{2\cos\frac{j\pi}{12} \| j=1,4,5,7,8,11\}$
E_7	$\{2\cos\frac{j\pi}{18} \| j=1,5,7,9,11,13,17\}$
E_8	$\{2\cos\frac{j\pi}{30} \| j=1,7,11,13,17,19,23,29\}$
$\tilde{A}_n$	$\{2\cos\frac{2j\pi}{n+1} \| j=0,\ldots,n\}$
$\tilde{D}_n$	$\{2\cos\frac{j\pi}{n-2} \| j=1,\ldots,n-3\}\cup[-2,0,0,2]$
$\tilde{E}_6$	$[0,\pm1,\pm1,\pm2]$
$\tilde{E}_7$	$\{2\cos\frac{j\pi}{4} \| j=1,2,3\}\cup\{0,\pm1,\pm2\}$
$\tilde{E}_8$	$\{2\cos\frac{j\pi}{5} \| j=1,2,3,4\}\cup\{0,\pm1,\pm2\}$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!