УДК 512.815

Бедратюк Л. П.

РЯДИ ПУАНКАРЕ АЛГЕБР ІНВАРІАНТІВ БІНАРНОЇ І ТЕРНАРНОЇ ФОРМ

Знайдено формули для обчислення рядів Пуанкаре алгебр інваріантів бінарної і тернарної форм.

Ключові слова: інваріанти, ряди Пуанкаре, бінарні форми, тернарні форми, оператори Мак-Магона.

1. Вступ. Розглянемо природну дію підстановками матричної групи $SL(n,\mathbb{C})$ на векторному просторі $\mathcal{V}_{n,d}$ n-арних форм порядку d. Поліноміальні функції з $\mathbb{C}[\mathcal{V}_{n,d}]$, які залишаються на місці при індукованій дії групи $SL(n,\mathbb{C})$ утворюють алгебру інваріантів $\mathcal{I}_{n,d}$. Алгебра $\mathcal{I}_{n,d}$ є скінчено породженою градуйованою алгеброю

$$\mathcal{I}_{n,d} = (\mathcal{I}_{n,d})_0 + (\mathcal{I}_{n,d})_1 + \cdots + (\mathcal{I}_{n,d})_k + \cdots ,$$

де всі векторні простори $(\mathcal{I}_{n,d})_k$ однорідних поліноміальних функцій степеня k є скінчено вимірні. Формальний степеневий ряд

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{n,d}, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \dim((I_{n,d})_k) z^k$$

називається рядом Пуанкаре алгебри інваріантів $\mathcal{I}_{n,d}$. Із скінченої породженості алгебри інваріантів $\mathcal{I}_{n,d}$ випливає, що її ряд Пуанкаре є розкладом за степенями z деякої раціональної функції. Ряд Пуанкаре $\mathcal{P}(A,z)$ скінчено вимірної градуйованої алгебри A містить важливу інформацію про структуру алгебри A. Наприклад, її степінь трансцендентності $\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} A$ рівний порядку полюса $z=1$ раціональної функції $\mathcal{P}(A,z)$. Також із ряду Пуанкаре можна отримати інформацію про верхню межу степенів елементів мінімальної породжуючої системи алгебри A. Тому задача обчислення рядів Пуанкаре для алгебри $\mathcal{I}_{n,d}$ була однією із головних задач класичної теорії інваріантів. Для невеликих значень d, використовуючи відому формулу Келі—Сильвестра, ряди $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d})$ алгебр інваріантів бінарних форм обчислені ще в роботі Сильвестра і Франкліна [1]. Не так давно, Спрінгер вивів (див. [2]) явну формулу для обчислення рядів Пуанкаре алгебр інваріантів бінарної форми, а саме :

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z) = \sum_{0 \le k < d/2} (-1)^k \psi_{d-2\,k}\,(U_k)\,,$$

тут U_k дорівнює

$$\frac{(1-z^2) z^{k(k+1)}((1-z^2)\ldots(1-z^{2k}))^{-1}}{(1-z^2)(1-z^4)\ldots(1-z^{2d-2k})}.$$

Лінійна функція $\psi_n : \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]]$ визначається так:

$$\psi_n(f(z^n)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(e^{\frac{2i\pi k}{n}} z)$$

для довільної раціональної функції $f(z)$.

Використовуючи формулу Спрінгера в [4] обчислені ряди Пуанкаре $P_{2,d}$ для $d < 17$. Розвиваючи ідеї роботи [2] в статті [5] запропоновано алгоритм обчислення рядів Пуанкаре і пораховано ці ряди для парних $d \le 36$.

Інший підхід до обчислення ряду Пуанкаре компактної групи G полягає у застосуванні відомої формули Моліна—Вейля (див. [8]) яка для групи $G{=}SL(2,\mathbb{C})$ записується як

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1} \frac{1-t^{-2}}{\prod_{k=1}^{n}(1-zt^{d-2\,k})}\frac{dt}{t}$$

(див. [3], с. 183). Використовуючи цю формулу, в статті [6] ряди $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z)$ обчислено для $d \le 30$. Явний вигляд цих рядів можна знайти в Інтернеті [11].

Про ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z)$ інваріантів тернарної форми до останнього часу було відомо дуже мало. У працях [3] і [7] обчислено ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,3}, z)$ та $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,4}, z)$, а, у дослідженні [12] виведено формулу для обчислення ряду $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z)$ та виписано кілька перших членів розкладу ряду $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z)$ для $d \leq 7$. У спільній праці [16] використовуючи формулу з [12] та техніку операторів Мак-Магона вперше обчислено ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z)$ для випадків $d = 5, 6$.

Метою цієї статті є отримання елементарного доведення формули Спрінгера, знаходження її аналогу для ряду Пуанкаре інваріантів тернарної форми, а також проведення обчислень за цією формулою, застосовуючи комбінаторну техніку Мак-Магона.

2. Формула Спрінгера. На початку наведемо коротке й елементарне доведення формули Спрінгера для ряду Пуанкаре алгебри інваріантів бінарної форми. Розглянемо $\mathbb{C}$-алгебру формальних степеневих рядів $\mathbb{C}[[z]]$ від z. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ задамо $\mathbb{C}$-лінійну функцію

$$\varphi_n : \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]],$$

яка так визначається на базисних мономах:

$$\varphi_n(z^m) := \begin{cases} z^{\frac{m}{n}}, \text{ якщо } m = 0 \pmod{n}, \\ 0, \text{ якщо } m \neq 0 \pmod{n}, \\ 1, \text{ для } m = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що для довільного ряду

$$A = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

ми отримаємо

$$\varphi_n(A) = a_0 + a_n z + a_{2\,n} z^2 + \cdots + a_{s\,n} z^s + \cdots.$$

У явному вигляді функцію φ_n, $n > 0$ можна задати, наприклад, так

Лема 1. *Для довільного* $f \in \mathbb{C}[[z]]$ *і* $n > 0$ *справедливі такі твердження*

$$(i) \quad \varphi_n(f(z)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z\, e^{\frac{2\pi i\, k}{n}})\Big|_{z^n = z};$$

$$(ii) \quad \varphi_n(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ze^{i\theta})}{1 - e^{-i\,n\,\theta}} d\theta \Big|_{z^n = z};$$

$$(iii) \quad \varphi_n(f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(zr)}{(r^n - 1)} \frac{dr}{r}\Big|_{z^n = z}.$$

Інтегрування ведеться по контуру C_n *який охоплює всі корені з* 1 *степеня* n *і не містить 0.*

Доведення. (i) Доведення випливає з відомого співвідношення для суми первісних коренів з одиниці. Нехай $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Маємо

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi^k z)^m = z^m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^m =$$

$$= \begin{cases} z^m, \text{ якщо } m = 0 \pmod{n}, \\ 0, \text{в протилежному випадку}. \end{cases}$$

Звідси й отримаємо

$$\varphi_n(f(z))(z^m) = \begin{cases} z^{\frac{m}{n}}, m = 0 \pmod{n}, \\ 0, m \neq 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Це прямий наслідок формули Сімпсона (див. [9], або [10], с.14).

(ii) Нехай $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$. Тоді, врахувавши, що для цілих n інтеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\,n\theta} d\theta$ рівний нулю, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ze^{i\theta})}{1 - e^{-i\,n\,\theta}} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k,s=0}^{\infty} f_k z^k e^{k\,i\theta} e^{-sn\theta} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{(k-s\,n)i\theta} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} f_{n\,s} z^{n\,s} d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} f_{n\,s} z^{n\,s}.$$

Після заміни z^n на z отримаємо необхідне твердження.

(iii) В інтегралі $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ze^{i\theta})}{1 - e^{-i\,n\,\theta}}\, d\theta$ виконаємо заміну змінної $r = e^{i\theta}$. Тоді, враховуючи аналітичність $f(z)$, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ze^{i\theta})}{1 - e^{-i\,n\,\theta}}\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|r|=1} \frac{r^{n-1} f(zr)}{r^n - 1}\, dr =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\Big(\frac{r^{n-1} f(zr)}{r^n - 1}, r = \xi^k\Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\Big(\frac{f(zr)}{r(r^n - 1)}, r = \xi^k\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(zr)}{(r^n - 1)} \frac{dr}{r}.$$

Для роботи з формальними степеневими рядами від двох змінних визначимо $\mathbb{C}$-лінійну функцію

$$\Psi_{m,n} : \mathbb{C}[[t, z]] \to \mathbb{C}[[z]],$$

$m, n \in \mathbb{N}$ подібним чином:

$$\Psi_{n_1,n_2}(t^{m_1} z^{m_2}) = z^s,$$

якщо $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2} = s \in \mathbb{N}$. В протилежному випадку покладемо $\Psi_{n_1,n_2}\big(t^{m_1} z^{m_2}\big) = 0$. Для довільного степеневого ряду

$$A = a_{0,0} + a_{1,0}t + a_{0,1}z + a_{2,0}t^2 + \cdots ,$$

очевидно, маємо

$$\Psi_{n_1,n_2}(A) = a_{0,0} + a_{n_1,n_2}z + a_{2\,n_1,2\,n_2}z^2 + \cdots .$$

Виявляється, що у деяких випадках, обчислення функції $\Psi_{m,n}$ можна звести до обчислення функцій типу φ, які ми природно продовжимо з кільця $\mathbb{C}[[z]]$, на кільце $\mathbb{C}[[t,z]]$. Має місце наступне твердження

Лема 2.

(i) $\Psi_{m,n} = \Psi_{1,1} \circ \varphi_m \circ \varphi_n$;

(ii) *Для* $R \in \mathbb{C}[[z]]$ *і для* $m, n, k \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$\Psi_{m,n}\!\left(\frac{R}{1 - t^m z^k}\right) = \begin{cases} \varphi_{n-k}(R), n \geq k, \\ 0, \text{ якщо } n < k. \end{cases}$$

Доведення. (i) Нехай $f = \sum\limits_{k,s=0}^{\infty} f_{k,s} t^k z^s$. Тоді, за означенням, маємо

$$\Psi_{m,n}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k\,m,k\,n}\, z^k.$$

З іншого боку, послідовно обчислюючи, отримаємо

$$\varphi_n(f) = \sum_{k,s=0}^{\infty} f_{k\,n,s} t^{k\,n} z^s,$$

$$\varphi_m(\varphi_n(f)) = \sum_{k,s=0}^{\infty} f_{k\,n,s\,m} t^{k\,n} z^{s\,m},$$

$$\Psi_{1,1}(\varphi_m(\varphi_n(f))) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k\,m,k\,n} z^k.$$

Отже, $\Psi_{m,n} = \Psi_{1,1} \circ \varphi_m \circ \varphi_n$.

(ii) Нехай $R = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j z^j$. Тоді для $k < n$ маємо

$$\Psi_{m,n}\left(\frac{R}{1 - t^m z^k}\right) = \\ = \Psi_{m,n}\Big(\sum_{j,s\geq 0} f_j z^j (t^m z^k)^s\Big) = \\ = \Psi_{m,n}\Big(\sum_{s\geq 0} f_{s(n-k)} (t^m z^n)^s\Big) = \sum_{s\geq 0} f_{s(n-k)} z^s.$$

З іншого боку, $\varphi_{n-k}(R) = \varphi_{n-k}\Big(\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j z^j\Big) = \sum\limits_{s\geq 0} f_{s(n-k)} z^s$.

Головна ідея обчислень цієї роботи полягає в тому, що ряд Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z)$ алгебри інваріантів бінарної форми можна легко виразити в термінах функції Ψ. Справджується наступне просте, але важливе твердження.

Лема 3.

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z) = \Psi_{1,d}\big(f_d(z, t^2)\big),$$

де

$$f_d(z,t) = \frac{1-t}{(1-z)(1-zt)\dots(1-zt^d)} = \\ = \frac{1-t}{(z,t)_{d+1}},$$

тут $(a,q)_n = (1-a)(1-a\,q)\cdots(1-a\,q^{n-1})$ *–* q*-зсунутий факторіал.*

Доведення. Для довільного ряду A з кільця $\mathbb{C}[[t,z]]$ під символом $[t^n z^m]A$ позначатимемо його коефіцієнт біля $t^n z^m$. З формули Келі–Сильвестра випливає (доведення див. [12]), що розмірність простору $(\mathcal{I}_{2,d})_n$ рівна $[(tz^{d/2})^n] f_d(t,z)$. Тоді

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(I_{2,d})_n z^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \big([(tz^{d/2})^n] f_d(t,z)\big) z^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \big([(tz^d)^n] f_d(t,z^2)\big) z^n = \Psi_{1,d}(f_d(t,z^2)).$$

Тепер ми можемо дати елементарне доведення формули Спрінгера для обчислення ряду Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z)$.

Теорема 1 (Спрінгер).

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d}, z) = \\ = \sum_{0\leq k<d/2} \varphi_{d-2\,k}\left(\frac{(-1)^k z^{k(k+1)}(1-z^2)}{(z^2,z^2)_k\,(z^2,z^2)_{d-k}}\right).$$

Доведення. Розкладемо раціональний дріб $f_d(t,z)$ на елементарні дроби

$$f_d(t,z) = \sum_{k=0}^{d} \frac{R_k(z)}{1 - tz^k}.$$

Прямими обчисленнями знаходимо явний вигляд функцій $R_k(z)$:

$$R_k(z) = \lim_{t\to z^{-k}} \big(f_d(t,z)(1-tz^k)\big) = \\ = \lim_{t\to z^{-k}} \left(\frac{(1-z)}{(t,z)_{d+1}}(1-tz^k)\right) = \\ = \frac{(-1)^k z^{\frac{k(k+1)}{2}}(1-z)}{(z,z)_k (z,z)_{d-k}}.$$

Застосувавши леми 1 і 2 знайдемо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{2,d},z)=$$
$$=\Psi_{1,d}\big(f_d(t,z^2)\big)=\Psi_{1,d}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{R_k(z^2)}{1-tz^{2\,k}}\right)=$$
$$=\sum_{0\le k<d/2}\varphi_{d-2\,k}\left(\frac{(-1)^k z^{k(k+1)}(1-z^2)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d-k}}\right).$$

3. Формула для тернарної форми. Виведемо аналогічну формулу для ряду Пуанкаре алгебри інваріантів тернарної форми.

У праці [12] доведено, що розмірність градуйованої компоненти $\dim\big(\mathcal{I}_{3,d}\big)_n$ рівна $[\big(z(pq)^{\frac{d}{3}}\big)^n]f_d(z,p,q)$, де

$$f_d(z,p,q)=\frac{b_3(p,q)}{\prod\limits_{k+l\le d}(1-zp^kq^l)}=\frac{b_3(p,q)}{\prod\limits_{s=0}^{d}(zq^s,p)_{d+1-s}},$$

і $b_3(p,q)=1+p\,q+\dfrac{q^2}{p}-2\,q-q^2.$

У кільці $\mathbb{C}[[z,p,q]]$ визначимо $\mathbb{C}$-лінійну функцію $\Phi_{n_1,n_2,n_3},\ n_i\ \ge\ 0$, яка на лексикографічно впорядкованому мономі

$$z^{m_1}p^{m_2}q^{m_3}$$

набуває значення z^s, якщо

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3}=s\in\mathbb{N},m_i\ge 0,$$

і рівна нулю, в протилежному випадку. Повністю аналогічно до леми 2 та леми 3 доводиться твердження:

Лема 4.

(i) *Для довільного ряду* $R\in\mathbb{C}[[p,q]]$ *справедлива формула:*

$$\Phi_{n_1,n_2,n_3}\left(\frac{R}{1-z^{n_1}p^kq^l}\right)=$$
$$\begin{cases}\Psi_{n_2-k,n_3-l}(R)\ \textit{для}\ n_2\ge k,n_3\ge l,\\[2ex] 0,\ \textit{якщо}\ n_2<k,\ \textit{або}\ n_3<l;\end{cases}$$

(ii) $\Phi_{m,n,k}=\Psi_{1,1,1}\circ\varphi_m\circ\varphi_n\circ\varphi_k;$

(iii) $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d},z)=\Phi_{1,d,d}\big(f_d(z,p^3,q^3)\big).$

Тут ми вважаємо, що дія функції $\Psi_{n,m}$ на $\mathbb{C}[[p,q]]$ ідентична її дії на $\mathbb{C}[[t,z]]$, тобто $\Psi_{n,m}(f(p,q)):=\Psi_{n,m}(f(t,z))$.

Тепер ми можемо довести аналог формули Спрінгера для ряду Пуанкаре алгебри інваріантів тернарної форми.

Теорема 2.

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d},z)=\sum_{0\le k,j\le[\frac{d}{3}]}\Psi_{d-3\,k,d-3j}\left(R_{k,j}(p^3,q^3)\right),$$
$$\textit{де}\ R_{k,j}(p,q)=$$
$$=\frac{(-1)^kp^{\frac{k(k+1)}{2}}b_3(p,q)((p,p)_k)^{-1}}{\left(\prod\limits_{s=0,s\ne j}^{d}(zq^s,p)_{d+1-s}\right)(p,p)_{d-(k+j)}}.$$

Доведення. Розкладемо на елементарні дроби раціональний дріб $f_d(z,p,q)$:

$$f_d(t,p,q)=\sum_{k+j\le d}\frac{R_{k,j}(p,q)}{1-tp^kq^j},$$

де

$$R_{k,j}(p,q)=$$
$$=\lim_{z\to(p^kq^j)^{-1}}\left(f_d(z,p,q)(1-zp^kq^j)\right)=$$
$$=\lim_{z\to\frac{1}{p^kq^j}}\left(\frac{b_3(p,q)(1-zp^kq^j)}{\left(\prod\limits_{s\ne j}^{d}(zq^s,p)_{d+1-s}\right)(zq^j,p)_{d+1-j}}\right)=$$
$$=\frac{(-1)^kp^{\frac{k(k+1)}{2}}b_3(p,q)((p,p)_{d-k-j})^{-1}}{\left(\prod_{s\ne j}^{d}(p^{-k}q^{s-j},p)_{d+1-s}\right)(p,p)_k}.$$

Використавши попередню лему, отримаємо

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d},z)=\Phi_{1,d,d}\left(\sum_{k+j\le d}\frac{R_{k,j}(p^3,q^3)}{1-tp^{3k}q^{3j}}\right)=$$
$$=\sum_{k+j\le d}\Psi_{d-3k,d-3j}\Big(R_{k,j}(p^3,q^3)\Big)=$$
$$=\sum_{0\le k,j\le[d/3]}\Psi_{d-3k,d-3j}\Big(R_{k,j}(p^3,q^3)\Big).$$

Зауважимо, що знайдена формула відрізняється від формули для ряду Пуанкаре алгебри інваріантів тернарної форми, яка представлена у праці [12].

4. Оператор Мак-Магона. На жаль, безпосереднє застосування виведених формул для обчислення функцій Ψ викликає значні обчислювальні труднощі. Проте ще на початку минулого століття Мак-Магоном була розроблена ефективна комбінаторна техніка яку можна застосувати для роботи з подібними функціями [13]. Із двох введених Мак-Магоном операторів нам буде достатньо використати так званий омега-оператор $\underset{=0}{\Omega}$, який перетворює ряд Лорана, що залежить від p, q

$$\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j,k} p^i q^j z^k, a_{i,j,k} \in \mathbb{C},$$

у степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{0,0,k} z^k.$$

Іншими словами, оператор $\underset{=0}{\Omega}$ виділяє вільний член ряду відносно змінних p, q. Мак-Магон розвинув ефективну техніку обчислень оператора $\underset{=0}{\Omega}$, коли ряд Лорана заданий своєю породжуючою раціональною функцією. Наприклад, можна показати, що

$$\underset{=0}{\Omega} \frac{\left(1 - \dfrac{z}{p}\right)}{\left(1 - \dfrac{z}{q^2}\right)\left(1 - z^2 q\right)} = \frac{1}{1 - z^5}.$$

Наступна теорема пов'язує оператор $\underset{=0}{\Omega}$ та ряди Пуанкаре для алгебр інваріантів тернарних форм.

Теорема 3. *Справедливе наступне співвідношення:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z) = \underset{=0}{\Omega} f_d(z(pq)^{-d}, p, q).$$

Доведення. Нескладно побачити, що вираз для $\dim(\mathcal{I}_{3,d})_k$ можна спростити до вигляду

$$\begin{aligned}
&[(z(pq)^{\frac{d}{3}})^k] f_d(z, p, q) = \\
&= \left[\left(z(pq)^d\right)^k\right] f_d(z, p^3, q^3) = \\
&= \left[z^k\right] f_d\left(\frac{z}{(pq)^d}, p^3, q^3\right).
\end{aligned}$$

Звідси отримаємо, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \dim(\mathcal{I}_{3,d})_k z^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left[z^k\right] f_d\left(\frac{z}{(pq)^d}, p^3, q^3\right)\right) z^k.
\end{aligned}$$

Отже, ряд Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z)$ є вільним членом ряду Лорана $f_d\left(\dfrac{z}{(pq)^d}, p^3, q^3\right)$, який залежить від змінних p, q, що і потрібно було довести.

Використовуючи знайдений в Теоремі 2 розклад на елементарні дроби функції $f_d(z, p, q)$, формулу для ряду $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z)$ запишемо у вигляді

$$\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,d}, z) = \sum_{0 \le k, j \le [d/3]} \underset{=0}{\Omega} \frac{R_{k,j}(p^3, q^3)}{1 - z p^{3i-d} q^{3j-d}},$$

який уже є зручнішим для обчислень. Таким чином, задача обчислення ряду Пуанкаре звелася до обчислення значення оператора Мак-Магона $\underset{=0}{\Omega}$, а це добре відома задача. Порівняно недавно були розроблені нові алгоритми обчислення оператора Мак-Магона, імплементовані в популярні системи *Maple* та *Mathematica* [14], [15]. Використовуючи розроблений Ксіном Maple-пакет Ell2, нами було проведено обчислення й отримано у явному вигляді ряди Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,5}, z)$ та $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{3,6}, z)$. Виявилось, що з обчислювальної точки зору формула, отримана у цій статті, ефективніша ніж формула з праці [12]. Через громіздкість результату ми не наводимо тут вирази для отриманих рядів.

1. Sylvester J. J. Tables of the generating functions and groundforms for the binary quantic of the first ten orders / J. J. Sylvester, F. Franklin // Am. J. II. — 1879. — P. 223–251.
2. Springer T. A. On the invariant theory of $SU(2)$ / T. A. Springer // Indag. Math. — 1980. — V. 42. — P. 339–345.
3. Derksen H. Computational Invariant Theory / H. Derksen, G. Kemper. Springer-Verlag. — New York, 2002. — 268 p.
4. Brouwer A. The Poincare series of the polynomial invariants under SU_2 in its irreducible representation of degree $\leq$ 17 / A. Brouwer, A. Cohen // Preprint of the Mathematisch Centrum. — Amsterdam — 1979.
5. Littelmann P. On the Poincaré series of the invariants of binary forms/ P. Littelmann, C. Procesi// J. Algebra. — 1990. — V. 133. — N. 2. — P. 490–499.
6. Dokovic D. A heuristic algorithm for computing the Poincaré series of the invariants of binary forms / D. Dokovic // Int. Journal of Contemp. Math. Sciences. — 2006. — Vol. 1. — P. 557–568.
7. Shioda T. On the graded ring of invariants of binary octavics / T. Shioda // Am. J. Math. — 1967. — V. 89. — P. 1022–1046.
8. Спрингер Т. Теория инвариантов / Т. Спрингер. — М. : Мир, 1981. — 192 с.
9. Simson T. The invention of a general method for determining the sum of every second, third, fourth, or fifth, etc. terms of a series taken in order the sum of the whole series being known / T. Simson // Philosophical transactions of the royal society of London. — 1759. — V. 50. — P. 757–769.
10. Andrews G. Special functions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 71 / G. Andrews, R. Askey, R. Roy — Cambridge University Press, 2000. — 684 p.
11. A. Brouwer, The Poincaré series. — Режим доступу : www.win.tue.nl/ $\sim$ aeb/math/Poincare.html.
12. Бедратюк Л.П. Аналог формули Келлі—Сильвестра та ряди Пуанкаре алгебр інваріантів тернарної форми / Л. П. Бедратюк // Український математичний журнал. — Т. 62 — N. 11 — 2010 — P. 1561–1570.
13. MacMahon. P. A. Combinatory Analysis / P. A. MacMahon. — Cambridge University Press, Cambridge, 1915–1916. — vol. 2. — Reprinted : Chelsea, New York, 1960. — vol. 2. — 340 p.

14. Xin G. A fast algorithm for MacMahon's partition analysis / G. Xin // Electron. J. Combin. — 2004. — V. 11. — R 53.
15. Andrews G. E. MacMahon's partition analysis: the Omega package / G. E. Andrews, P. Paule, A. Riese // European J. Combin. — 2001 — V. 22. — N. 7. — P. 887–904.
16. Bedratyuk L. MacMahon Partition Analysis and the Poincaré series of the algebras of invariants of ternary, quaternary and quinary forms / L. Bedratyuk, G. Xin // preprint, arXiv:1007.1064.

L. Bedratyuk

THE POINCARE SERIES FOR THE ALGEBRAS OF INVARIANTS OF BINARY AND TERNARY FORMS

The formulas for the Poincaré series of the algebra invariants of binary and ternary forms are found.
Keywords: Invariants, Poincare series, binary forms, ternary forms, MacMahon operators