МАТЕМАТИКА

УДК 512.53

Мальцев В. М.

ЗРІЗИ ВІДНОШЕНЬ ГРІНА ТА РЕТРАКТИ НАПІВГРУП PB_n І C_n

Описуються двосторонні ідеали, конгруенції та ретракти, зрізи відношень R, L, і H напівгруп PB_n та C_n.

1. Вступ

Часткова напівгрупа Брауера PB_n та напівгрупа C_n всіх розбиттів $2n$-елементної множини є природними узагальненнями напівгрупи B_n, введеної Брауером в [1] у зв'язку з вивченням зображень ортогональних груп. Напівгрупа PB_n була введена до розгляду Мазорчуком у [2], C_n з'явилася в роботі [3]. Першими працями, присвяченими вивченню саме напівгрупових властивостей цих напівгруп, є [2] та [4]. Зокрема в [2] дано опис усіх ідемпотентів напівгрупи PB_n, її максимальних підгруп, цілком ізольованих піднапівгруп, її групи автоморфізмів та відношень Гріна. В [4] описані напівгрупи ендоморфізмів PB_n та C_n.

Елементами напівгрупи PB_n є всі можливі розбиття множини $\{1, \ldots, n, 1', \ldots, n'\}$ на блоки потужності, не більшої за 2. Для $a, b \in PB_n$ послідовність $x_1, \ldots, x_k$ елементів з $\{1, \ldots, n\}$ назвемо $a-b$ l-з'єднаною (відповідно r-з'єднаною), якщо $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \ldots$ належать b і $\{x'_2, x'_3\}, \{x'_4, x'_5\}, \ldots$ належать a (відповідно $\{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \ldots$ належать b і $\{x'_1, x'_2\}, \{x'_3, x'_4\}, \ldots$ належать a). Добуток ab визначається таким чином: $\{i\} \in ab$ тоді і тільки тоді, коли або $\{i\} \in a$, або $\{i, j'\} \in a$ і існує $a-b$ l-з'єднана послідовність $j, x_2, \ldots, x_k$ така, що $\{x_k\} \in b$ або $\{x'_k\} \in a$; $\{j'\} \in ab$ тоді і тільки тоді, коли або $\{j'\} \in b$, або $\{i, j'\} \in b$ і існує $a-b$ r-з'єднана послідовність $i, x_2, \ldots, x_k$ така, що $\{x_k\} \in b$ або $\{x'_k\} \in a$; $\{i, j\} \in ab$ тоді і тільки тоді, коли або $\{i, j\} \in a$, або існує $a-b$ l-з'єднана послідовність $x_1, \ldots, x_{2k}$ така, що $\{i, x'_1\} \in a$ і $\{j, x'_{2k}\} \in a$; $\{i', j'\} \in ab$ тоді і тільки тоді, коли або $\{i', j'\} \in b$, або існує $a-b$ r-з'єднана послідовність $x_1, \ldots, x_{2k}$ така, що $\{i', x_1\} \in b$ і $\{j', x_{2k}\} \in a$; $\{i, j'\} \in ab$ тоді і тільки тоді, коли існує $a-b$ l-з'єднана послідовність $x_1, \ldots, x_{2k+1}$ така, що $\{i, x'_1\} \in a$ і $\{j', x_{2k+1}\} \in b$.

Елементами напівгрупи C_n є всі можливі розбиття множини $\{1, \ldots, n, 1', \ldots, n'\}$ на блоки. Множення в C_n є природним узагальненням множення в PB_n, за формальним його означенням ми відсилаємо до [3].

Елемент $e = \{\{1, 1'\}, \ldots, \{n, n'\}\}$ є одиницею в обох цих напівгрупах. Для довільного $a \in PB_n$ позначимо

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(a) &= \{i \in \{1, \ldots, n\} : \text{ існує } j \leq n \\ &\qquad \text{таке, що } \{i, j'\} \text{ належить } a\},\\ \operatorname{rank}(a) &= |\operatorname{dom}(a)|,\\ \operatorname{Ker}(a) &= \{1, \ldots, n\} \setminus \operatorname{dom}(a).\end{aligned}$$

Для довільного $x \in C_n$ позначимо через $\operatorname{rank}(x)$ кількість блоків в x вигляду $E \cup G'$. Елементи рангу n в обох напівгрупах утворюють групу оборотних елементів, яка може бути трактована як група S_n, і таке трактування узгоджене з множенням у цих напівгрупах. Маємо такі включення: $S_n \subset B_n \subset PB_n \subset C_n$ та $IS_n \subset PB_n$, де IS_n — інверсна симетрична напівгрупа степеня n.

Для $G \subset \{1, \ldots, n\}$ позначимо

$$a(G) = \{G \cup G', \{k, k'\}_{k \in \{1, \ldots, n\} \setminus G}\},$$
$$b(G) = \{G \cup G', \{k, k'\}_{k \in \{1, \ldots, n\} \setminus G}\},$$

при цьому якщо $G = \{i_1, \ldots, i_s\}$, то замість $a(G)$ та $b(G)$ писатимемо $a(i_1, \ldots, i_s)$ та $b(i_1, \ldots, i_s)$. Назвемо $a(G)$ атомом або p-атомом, якщо $G \subset \{1, \ldots, n\}$ двоелементна або одноелементна відповідно.

Природний антиізоморфізм C_n в себе, який кожному елементу a з елементу a з C_n зіставляє елемент з C_n, утворений заміною кожного i на i', позначатимемо π.

У [5] показано, що множина атомів є незвідною системою твірних напівгрупи $B_n \setminus S_n$ і що двосторонні ідеали B_n утворюють ланцюг за включенням. В пункті 2 ми доведемо, що в свою чергу в напівгрупах PB_n та C_n всі ідеали утворюють ланцюг за включенням, і дамо опис піднапівгрупи, породженої атомами та p-атомами.

Зрізом еквівалентності деякої напівгрупи називається така її піднапівгрупа, що містить рівно по одному представнику з кожного класу за цією еквівалентністю. Ретрактом та зрізом відношення Гріна називається відповідно зріз деякої конгруенції та цього відношення Гріна. В пунктах 3 та 4 ми опишемо конгруенції та ретракти PB_n і C_n, а в пунктах 5 та 6 дамо опис зрізів відношень Гріна R, L, H цих напівгруп, спираючись на роботу [6], в якій описані всі R та L-зрізи напівгрупи IS_n.

2. Системи твірних, двосторонні ідеали PB_n та C_n

Теорема 1. *Атоми разом з p-атомами утворюють незвідну систему твірних для піднапівгрупи* $PB_n \setminus (T \cup S_n)$, *де*

$$T = \{x \in IS_n : |\operatorname{dom}(x)| = n-1, \\ x \text{ не є } p - \text{атомом}\}.$$

Доведення. Візьмемо елемент $a \in PB_n \setminus (T \cup S_n)$, причому нехай a зображається розбиттям

$$\{\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_s, j_s\}, \{p_1, q_1'\}, \ldots, \{p_t, q_t'\}, \\ \{m_1', n_1'\}, \ldots, \{m_u', n_u'\}, \{k_1\}, \ldots, \{k_{n-2s-t}\}, \\ \{l_1'\}, \ldots, \{l_{n-2u-t}'\}\},\ n-t \geq 2.$$

Розкладання елемента a на добуток атомів та p-атомів будемо будувати в три етапи. На першому етапі будуємо ідемпотент $a_1 = a(i_1, j_1) \ldots a(i_s, j_s)\, a(k_1) \ldots a(k_{n-2s-t})\, a(i_1, j_1) \cdot a(i_2)\, a(j_2) \ldots a(i_s)\, a(j_s)\, a(k_1) \ldots a(k_{n-2s-t})$, якщо $s \geq 1$ і $a_1 = a(k_1) \ldots a(k_{n-t})\, a(k_1, k_2)\, a(k_3) \ldots a(k_{n-t})$, якщо $s = 0$.

Другий етап розпадається на кілька кроків. Припустимо, що на деякому кроці вже побудовано елемент $a_2 = \{\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_s, j_s\}, \{k_1\}, \ldots, \{k_{n-2s-t}\}, \{u_1', v_1'\}, \{x_1'\}, \ldots, \{x_{n-t-2}'\}, \{p_1, q_1'\}, \ldots, \{p_m, q_m'\}, \ldots\}$, причому $m < t$ і $\{p_1, q_1'\}, \ldots, \{p_m, q_m'\}$ — це всі блоки вигляду $\{i, j'\}$, які зустрічаються в a і a_2. Наступний елемент a_3 будуємо таким чином. Нехай $q_{m+1} \in \{u_1, v_1\}$, тоді, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $q_{m+1} = u_1$, тоді $a_3 = a_2 a(p_{m+1}, v_1)$. Якщо $q_{m+1} \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{u_1, v_1\}$, то $a_3 = a_2 a(q_{m+1}, u_1)\, a(p_{m+1}, u_1)$. Якщо для отриманого елемента $a_3 = \{\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_s, j_s\}, \{k_1\}, \ldots, \{k_{n-2s-t}\}, \{p_1, q_1'\}, \ldots, \{p_{m+1}, q_{m+1}'\}, \ldots\}$ виконується нерівність $m+1 < t$, то за елементом a_3 будуємо елемент a_4 аналогічно тому, як за елементом a_2 будувався елемент a_3, і т. д. Таким чином, другий етап завершується побудовою елемента $a_r = \{\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_s, j_s\}, \{k_1\}, \ldots, \{k_{n-2s-t}\}, \{p_1, q_1'\}, \ldots, \{p_t, q_t'\}, \ldots\}$.

На третьому етапі завершуємо розкладання елемента a на добуток атомів та p-атомів: $a = a_r\, a(m_1, n_1) \ldots a(m_u, n_u)\, a(l_1) \ldots a(l_{n-2u-t})$.

Отже, атоми разом з p-атомами утворюють систему твірних для $PB_n \setminus (T \cup S_n)$. Але в свою чергу кожний добуток цих ідемпотентів міститься в $PB_n \setminus S_n$ і не належить T, бо інакше він міг би розкладатися лише на добуток p-атомів, що неможливо. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. C_n *породжується підгрупою* S_n *та елементами* $a(1)$ *і* $b(1,2)$.

Доведення. Нехай

$$a = \{E_1, \ldots, E_k, G_1, \ldots, G_m, \\ F_1 \cup H_1', \ldots, F_s \cup H_s'\}$$

є довільний елемент з C_n. Оскільки

$$b(1, \ldots, k) = b(1,2) \ldots b(k-1, k),$$

і тому $S = \langle S_n, a(1), b(1,2) \rangle$ містить $a(i)$ та $b(B)$ для будь-яких $i \in \{1, \ldots, n\}$ та $B \subset \{1, \ldots, n\}$. Тоді для будь-якої підмножини A з $\{1, \ldots, n\}$ S містить $a(A) = \prod\limits_{u \in A} a(u) b(A) \prod\limits_{u \in A} a(u)$. Нехай $\{1, \ldots, n-s\} = X_1 \cup \ldots \cup X_s = Y_1 \cup \ldots \cup Y_s$ — два довільні розбиття (можливо, деякі з множин розбиття порожні), тоді S містить

$$\{X_1 \cup \{s+1\} \cup Y_1 \cup \{(s+1)'\}, \ldots \\ \ldots, X_s \cup \{n\} \cup Y_s \cup \{n'\}\},$$

а тому S містить і

$$x = \{E_1 \cup \ldots \cup E_k \cup G_1' \cup \ldots \cup G_m' \cup F_1 \cup H_1', \\ F_2 \cup H_2', \ldots, F_s \cup H_s'\}$$

і при цьому $a = a(E_1) \ldots a(E_k) x a(G_1) \ldots a(G_m)$, звідки і випливає твердження.

Напівгрупа S називається простою, якщо вона не має ідеалів, відмінних від S. Напівгрупа S з нулем 0 називається 0-простою, якщо $S^2 \neq 0$ і 0 є єдиним власним ідеалом в S. Нарешті, напівгрупа називається напівпростою, якщо кожний її головний фактор або простий або 0-простий. Відомо, що кожний головний фактор довільної напівгрупи або простий, або 0-простий, або є напівгрупою з нульовим добутком; у кожній напівгрупі S, що має головний ряд

$$S = S_1 > S_2 > \ldots > S_m > S_{m+1} = \varnothing,$$

факторнапівгрупами

$$S_1 \,/\, S_2, \ldots, S_{m-1} \,/\, S_m, S_m \,/\, S_{m+1} = S_m$$

вичерпуються всі її головні фактори, при цьому S_m/S_{m+1} є єдиним простим головним фактором ([7], с. 103–108).

Позначимо

$$A_k = \{x \in PB_n \colon \operatorname{rank}(x) \leq n-k\} \text{ і}$$
$$I_k = \{x \in C_n \colon \operatorname{rank}(x) \leq n-k\}$$

для $0 \leq k \leq n$.

Теорема 3. *Кожний ідеал напівгруп PB_n та C_n є головним і збігається для деякого $s \leq n$ з A_s або I_s відповідно.*

Доведення. Справді, нехай I — ідеал в PB_n і t — найбільше з чисел $|\operatorname{dom}(a)|$, $a \in I$. Виберемо таке $p \in I$, що $|\operatorname{dom}(p)| = t$. D-клас, що містить p, міститься в $PB_n p PB_n$. Але множенням на відповідні елементи з IS_n отримаємо представників усіх інших D-класів, що містяться в A_{n-t}, тобто I містить A_{n-t}, а інших елементів I містити не може. Міркування щодо C_n аналогічні.

Наслідок 1. *Ідеали напівгруп PB_n і C_n утворюють ланцюги*

$$PB_n = A_0 > A_1 > \ldots > A_n > A_{n+1} = \varnothing \text{ та}$$
$$C_n = I_0 > I_1 > \ldots > I_n > I_{n+1} = \varnothing$$

відповідно.

Теорема 4. *PB_n і C_n — напівпрості напівгрупи.*

Доведення. Доведення проведемо лише для напівгрупи PB_n. Кожний головний фактор має вигляд A_i/A_{i+1} для деякого $i \leq n$, причому лише A_n/A_{n+1} є простою напівгрупою. Отже, нам достатньо довести, що при $i < n$ фактор A_i/A_{i+1} не є напівгрупою з нульовим добутком. Фактор A_i/A_{i+1} можна уявляти як $(A_i \setminus A_{i+1}) \cup \{0\}$, де з нулем ототожнюються всі елементи з A_{i+1}. Але завжди існують $x, y \in A_i \setminus A_{i+1}$, що $xy \in A_i \setminus A_{i+1}$. Для цього достатньо взяти довільний $x \in A_i \setminus A_{i+1}$, а як y елемент $\pi(x)$. Тоді x та y, вже як елементи фактора $A_i \,/\, A_{i+1}$, такі, що $xy \neq 0$. Теорему 4 доведено.

В наступному твердженні ми для позначення вінцевого добутку двох груп підстановок G та H використовуватимемо запис $G \wr H$ (див. [9]).

Теорема 5. *При $n \neq 3, 7$, $\operatorname{Aut}(A_1/A_2)$ ізоморфна $S_n \wr S_{n-1}$, де S_n діє перестановками на n-елементній множині, а S_{n-1} діє на собі спряженнями. При $n = 7$ група $\operatorname{Aut}(A_1/A_2)$ є напівпрямим добутком $S_7 \wr S_6$ та Z_2 з тими самими діями симетричних груп. При $n = 3$ $\operatorname{Aut}(A_1/A_2)$ є підгрупою індексу 2 в $S_3 \wr S_2$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n \neq 3, 7$. Нехай $\varphi \in \operatorname{Aut}(A_1/A_2)$, тоді φ індукує перестановку на n-елементній множині ненульових ідемпотентів. Тоді нехай $\mu \in S_n$ така підстановка, що $\varphi(a(i)) = a(\mu(i))$. Якщо тепер $\{s\} \in a$ і $\{t'\} \in a$, то $\{\mu(s)\} \in \varphi(a)$ і $\{\mu(t)'\} \in \varphi(a)$, оскільки $a(s)aa(t) \neq 0$, а тому $a(\mu(s))\varphi(a)a(\mu(t)) \neq 0$. Зокрема, тепер можна вважати, що μ є одиничною підстановкою. Тоді кожна максимальна підгрупа $H(i)$, що визначається ідемпотентом $a(i)$, переходить в себе при автоморфізмі, і оскільки вона ізоморфна S_{n-1}, а $n-1 \neq 2, 6$, то для кожного i, $1 \leq i \leq n$ існує однозначно визначена підстановка $\pi_i \in S_{\{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}}$, така, що обмеження φ на $H(i)$ збігається з відображенням спряження елементом π_i. Доведемо, що при кожному такому заданні набору підстановок з S_{n-1} однозначно визначається автоморфізм. Позначимо

$$A_{ij} = \{x \in A_1 \setminus A_2 : \{i\} \in x \text{ і } \{j'\} \in a\}.$$

Тоді $A_{ii} = H(i)$ і $\varphi(A_{ij}) = A_{ij}$. Нехай той елемент із A_{ij}, який визначається підстановкою $\pi \in S_{n-1}$, переходить у елемент, який визначається підстановкою $\alpha(\pi)$ із S_{n-1}. Тоді для довільних $x, \pi \in S_{n-1}$ мають виконуватись наступні співвідношення:

$$\alpha(x\pi) = \alpha(x){\pi_j}^{-1}\pi\pi_j \text{ і}$$
$$\alpha(x\pi) = {\pi_i}^{-1}x\pi_i\alpha(\pi).$$

Тоді виконується

$$\alpha(\pi) = \alpha(e){\pi_j}^{-1}\pi\pi_j, \text{ і тому}$$
$${\pi_i}^{-1}x\pi_i\alpha(e){\pi_j}^{-1}\pi\pi_j = \alpha(e){\pi_j}^{-1}x\pi\pi_j.$$

Тоді маємо

$${\pi_i}^{-1}x\pi_i\alpha(e){\pi_j}^{-1} = \alpha(e){\pi_j}^{-1}x,$$

що рівнозначно

$${\pi_i}^{-1}x\pi_i = \left(\pi_j(\alpha(e))^{-1}\right)^{-1}x\pi_j(\alpha(e))^{-1}.$$

Тепер, оскільки для довільної групи G виконується $\operatorname{Inn}(G) \cong G/Z(G)$, а S_{n-1} при $n \neq 3$ є групою без центру, то $\pi_j(\alpha(e))^{-1} = \pi_i$, що рівносильно $\alpha(e) = {\pi_i}^{-1}\pi_j$. Отже, кожне таке задання однозначно визначає бієкцію, залишилось довести її гомоморфність. Нехай $x \in A_{ij}$, $y \in A_{st}$, тоді якщо $j \neq s$, то $xy = 0$ і $\varphi(x)\varphi(y) = 0$, бо $\varphi(x) \in A_{ij}$, $\varphi(y) \in A_{st}$. Якщо ж $j = s$, то якщо π та τ — підстановки, якими визначаються x та y відповідно, то $\varphi(xy)$ визначається підстановкою $\pi_i{}^{-1}\pi\tau\pi_t$, а $\varphi(x)\varphi(y)$ —

$$\pi_i{}^{-1}\pi\pi_j\pi_s{}^{-1}\tau\pi_t = \pi_i{}^{-1}\pi\tau\pi_t.$$

При $n = 7$ теж можна вважати, що $\varphi(A_{ij}) = A_{ij}$. Якщо тепер обмеження σ автоморфізму φ на $H(i)$ є невнутрішнім автоморфізмом, а τ — обмеження φ на $H(j)$, то $\tau \in \mathrm{Inn}(S_6)\sigma$. Справді, для довільних x та π виконується

$$\alpha(x\pi) = \alpha(x)\tau(\pi) \text{ і } \alpha(x\pi) = \sigma(x)\alpha(\pi).$$

Звідси $\alpha(x) = \sigma(x)\alpha(e)$ і тому

$$\sigma(x\pi)\alpha(e) = \sigma(x)\alpha(e)\tau(\pi),$$

звідки $\tau(\pi) = (\alpha(e))^{-1}\sigma(\pi)\alpha(e)$, тобто $\tau = \sigma\varphi_{\alpha(e)}$. Нехай γ — обмеження φ на $H(7)$. Тоді існують однозначно визначені підстановки $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ з S_6 такі, що обмеження φ на $H(i)$ збігається з $\gamma\varphi_{\alpha_i}$. Тоді $\alpha(e) = \alpha_i{}^{-1}\alpha_j$ і

$$\alpha(x) = \sigma(x)\alpha(e) = \\ = \alpha_i{}^{-1}\gamma(x)\alpha_i\alpha_i{}^{-1}\alpha_j = \alpha_i{}^{-1}\gamma(x)\alpha_j.$$

Отже, $\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_6$ однозначно задають бієкцію, її гомоморфність перевіряється безпосередньо. З рівності

$$|\mathrm{Aut}(A_1/A_2)| = 7!((6!)^7 + 6!(6!)^6) = 2|S_7 \wr S_6|$$

випливає твердження для $n = 7$. При $n = 3$ твердження випливає з того, що $\mathrm{Aut}(S_2) \cong E$ і що кожен автоморфізм $\mathrm{Aut}(A_1/A_2)$ однозначно задається перестановкою ідемпотентів і відображеннями α множин A_{12} та A_{23}. Теорему 5 доведено.

3. Конгруенції напівгруп PB_n та C_n

Нехай ρ — деяка конгруенція на PB_n. Позначимо

$$I(M) = \bigcup_{m \in M} \{(m, m)\}.$$

У [2] показано, що D-класи напівгрупи PB_n мають вигляд $D_k = \{x \in PB_n : \mathrm{rank}(x) = n - k\}$, $0 \leq k \leq n$.

Лема 1. *Якщо* $s \in S_n$, $b \in PB_n \setminus S_n$ *і* $s\rho b$, *то* $\rho = PB_n \times PB_n$.

Доведення. З $s\rho b$ випливає, що $e = s^{n!}\rho b^{n!} = a \in PB_n \setminus S_n$. Якщо $a \in PB_n \setminus B_n$, то існує p-атом x такий, що або $ax = a$, або $xa = a$. В будь-якому разі $e\rho x$ і, оскільки для довільного $g \in S_n$ $e\rho g^{-1}xg$, то e еквівалентний кожному p-атому. Тоді $e\rho y = a(1)\ldots a(n)$, тому для довільного $t \in S_n$ $e\rho y = yt\rho t$. Також виконується

$$a(i,j)\rho y a(i,j) y = y\rho e.$$

Оскільки довільний p-атом та довільний атом разом з S_n породжують PB_n, то PB_n міститься в одному ρ-класі. Якщо ж $a \in B_n \setminus S_n$, то існує атом $a(i,j)$ такий, що $aa(i,j) = a$, а тому $e\rho a(i,j) = a(i,j)a(i)a(i,j)\rho a(i) \in PB_n \setminus B_n$ і отримуємо попередній випадок.

Лема 2. *Якщо* $a \in D_s$, $b \in D_l$, $a\rho b$, $s < l$, *то* $A_s \cap IS_n$ *міститься в одному* ρ*-класі. Якщо до того ж* $n - s \geq 2$, *то ідеал* A_s *міститься в одному* ρ*-класі.*

Доведення. Існують π та τ із S_n такі, що $\pi a\tau$ містить $\{s+1, (s+1)'\}, \ldots, \{n, n'\}$, причому $\pi a\tau \in D_l$. Отже, можна вважати, що a містить $\{s+1, (s+1)'\}, \ldots, \{n, n'\}$ і що b має ті самі блоки, що й a на $\{1, \ldots, s, 1', \ldots, s'\}$. Тоді з леми 1 випливає, що $x = a(1)\ldots a(s)\rho a(1)\ldots a(n) = y$, а тому для довільних $s, t \in S_n$ $x\rho sxt$, тому $A_s \cap IS_n$ міститься в одному ρ-класі. Якщо тепер $n - s \geq 2$, то

$$a(1,2)a(3)\ldots a(n) = \\ = a(1,2)ya\,(1,2)\,\rho ya(1,2)\,ya(1,2)y = y.$$

Тоді $a(i,j)y\rho ya(i,j)\rho y$, тобто ядро PB_n міститься в одному ρ-класі. Тоді для будь-якого $z \in A_s$ існують p та q із PB_n такі, що $z = pa(1)\ldots a(s)q\rho pyq\rho y$.

Лема 3. *Нехай* $n \geq 3$. *Якщо обмеження* ρ *на* S_n *не збігається з* $I(S_n)$, *то або*

$$\rho = (A_n \times A_n) \cup (S_n \setminus A_n \times S_n \setminus A_n) \cup \\ \cup (PB_n \setminus S_n \times PB_n \setminus S_n), \text{ або}$$
$$\rho = (S_n \times S_n) \cup (PB_n \setminus S_n \times PB_n \setminus S_n), \text{ або}$$
$$\rho = PB_n \times PB_n.$$

При $n = 4$ *до цих відношень ще додається* $\rho = G \cup (PB_4 \setminus S_4 \times PB_4 \setminus S_4)$, *де*

$$G = \{(a,b) \in S_4 \times S_4 : \ ab^{-1} \in K_4\}.$$

Доведення. Оскільки $n - 1 \geq 2$ і $a(1)\rho a(1)s$, $s \neq e$, $s\rho e$, то $a(1)$ еквівалентний елементу $(a(1)s)^2$, а тому за лемою 2 $PB_n \setminus S_n$ міститься в одному ρ-класі.

Лема 4. *Якщо існують такі елементи* $a, x \in D_s$, *що* $a\rho x$, $n - s \geq 2$, $(a, x) \notin H$, *то ідеал* A_s *міститься в одному* ρ*-класі.*

Доведення. З точністю до множення на підстановки можна вважати, що

$$\mathrm{dom}(a) = \{s+1, \ldots, n\} \text{ та}$$
$$\mathrm{dom}'(a) = \{(s+1)', \ldots, n'\}$$

(адже для довільних $\pi, \tau \in S_n$ $aHb \Leftrightarrow \pi a \tau H \pi b \tau$). Якщо $\mathrm{dom}(x) \neq \{s+1, \ldots, n\}$, то існує $i \in \{s+1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{dom}(x)$. Тоді елемент із D_{s+1} $a(i)a$ еквівалентний елементу із D_s $a(i)x$, і тоді за лемою 2 матимемо, що A_s міститься в одному ρ-класі. Якщо $\mathrm{dom}'(x) \neq \{(s+1)', \ldots, n'\}$, то аналогічно A_s міститься в одному ρ-класі. Отже, можна вважати, що $\mathrm{dom}(x) = \{s+1, \ldots, n\}$ та $\mathrm{dom}'(x) = \{(s+1)', \ldots, n'\}$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що a та x містяться в різних L-класах. Якщо $\{i'\} \in a$, то або $\{i'\} \in x$, або елемент із D_{s+1} $aa(i,n)$ еквівалентний елементу із D_s $xa(i,n)$. Отже, вважатимемо, що $\{i'\} \in a \Leftrightarrow \{i'\} \in x$. Тоді існують різні $u, v \in \{s+1, \ldots, n\}$ такі, що $\{u', v'\} \in a$, але $\{u', v'\} \notin x$. Тоді елемент із D_{s+2} $aa(u, n-1)a(v,n)$ еквівалентний елементу із D_s $xa(u, n-1)a(v,n)$.

З лем 2 та 3 випливає

Лема 5. *Нехай* $n - s \geq 3$, *обмеження* ρ *на* $PB_n \setminus A_s$ *збігається з* $I(PB_n \setminus A_s)$. *Тоді або обмеження* ρ *на* D_s *збігається з* $I(D_s)$, *або ідеал* A_{s+1} *міститься в одному* ρ*-класі.*

Позначимо

$$A = \{(a,b) \in D_n \times D_n : \{i,j\} \in a \Leftrightarrow \{i,j\} \in b\},$$
$$A' = \{(a,b) \in D_n \times D_n : \{i',j'\} \in a \Leftrightarrow \{i',j'\} \in b\},$$
$$B = \{(a,b) \in A_{n-1} \times A_{n-1} : \{i,j\} \in a \Leftrightarrow \{i,j\} \in b\},$$
$$B' = \{(a,b) \in A_{n-1} \times A_{n-1} : \{i',j'\} \in a \Leftrightarrow \{i',j'\} \in b\}.$$

Лема 6. *Обмеження* ρ *на* A_{n-1} *може збігатися лише або з* $I(A_{n-1})$, *або з* $I(D_{n-1}) \cup (D_n \times D_n)$, *або з* $I(D_{n-1}) \cup A$, *або з* $I(D_{n-1}) \cup A'$, *або з* $A_{n-1} \times A_{n-1}$, *або з* B, *або з* B', *або з* $B \cap B'$.

Доведення. Доведемо, по-перше, що якщо не існує $c \in D_{n-1}$ та $d \in D_n$, таких, що $c\rho d$, то обмеження ρ на D_{n-1} збігається з $I(D_{n-1})$. Справді, нехай $a\rho b$, $a, b \in D_{n-1}$. Тоді, якщо $\{i, j'\} \in a$, то, оскільки $a(i)a \in D_n$, то $a(i)b \in D_n$ і тому $i \in \mathrm{dom}(b)$. Аналогічно, $j' \in \mathrm{dom}'(b)$, і тому $\{i, j'\} \in b$. Тепер, якщо $\{s\} \in a$, то $a(s,i)a \in D_n$, тому $a(s,i)b \in D_n$, тобто $\{s\} \in b$. Аналогічно, якщо $\{t'\} \in a$, то $\{t'\} \in b$. Якщо ж $\{p,q\} \in a$, то $a(p,i)a \in D_{n-1}$ і $\{q, j'\} \in a(p,i)a$, тому $a(p,i)b \in D_{n-1}$ і тоді існує $r \in \{1, \ldots, n\}$ — таке, що $\{p, r\} \in b$, і тоді $\{r, j'\} \in a(p,i)b$. Таким само чином, як і раніше, можна отримати, що $q = r$. Отже, якщо $\{p,q\} \in a$, то і $\{p,q\} \in b$. Аналогічно, якщо $\{k', l'\} \in a$, то $\{k', l'\} \in b$. Отже, $a = b$. Зауважимо також, що обмеження ρ на A_n може збігатися або з $D_n \times D_n$, або з A', або з A, або з $I(D_n)$. Це випливає з того, що якщо для елементів ядра a та b $a\rho b$ і $\{i', j'\} \in a$ та $\{s', t'\} \in b$, $\{i', j'\} \neq \{s', t'\}$, то

$$ya(i,j) = ya \prod_{u \neq i,j} a(u) \rho yb \prod_{u \neq i,j} a(u) = y,$$

де $y = a(1) \ldots a(n)$. Тому для довільного $x \in D_n$, якщо $\{i_1', i_2'\}, \ldots, \{i_{2w-1}', i_{2w}'\}$ — всі блоки вигляду $\{e', f'\}$ в x, то

$$x = xya(i_1, i_2) \ldots a(i_{2w-1}, i_{2w})\rho$$
$$\rho xya(i_1, i_2) \ldots a(i_{2w-3}, i_{2w-2})\rho \ldots \rho xy$$

і тому x еквівалентний будь-якому елементу з xA. Отже, якщо жодні два елементи відповідно з D_{n-1} та D_n не еквівалентні, то маємо випадки $I(A_{n-1})$, $I(D_{n-1}) \cup D_n \times D_n$, $I(D_{n-1}) \cup A$, $I(D_{n-1}) \cup A'$. В іншому разі з леми 2 випливає, що $A_{n-1} \cup IS_n$ міститься в одному ρ-класі. З цього випливає, що якщо $x \in D_{n-1}$ і $\{i, j'\} \in x$, то $x\rho aa(i)xa(j)$. Тепер, враховуючи структуру обмежень конгруенцій на D_n, маємо лише випадки $A_{n-1} \times A_{n-1}$, B, B', $B \cap B'$.

Для довільної нормальної підгрупи H з S_{n-k} покладемо $F_k(H)$ таке відношення на D_k, при якому a та b потрапляють в один клас тоді й тільки тоді, коли aHb і $\pi\tau^{-1} \in H$, де π та τ — підстановки з S_{n-k}, утворені блоками на a та b вигляду $\{i, j'\}$.

Лема 7. *При* $n - k \geq 2$ *обмеження* ρ *на* D_k *однозначно задається нормальною підгрупою* H *з* S_{n-k} *і відношенням* $F_k(H)$. *Якщо* $n \geq 3$, $k = n-2$ *і* $H = Z_2$, *то* $a(1) \ldots a(n) \rho a(1) \ldots a(n-1)$.

Доведення. Кожен елемент з D_k можна отримати множенням $a(1) \ldots a(k)$ на підстановки та атоми, звідки випливає перше твердження. Друге твердження очевидне.

Теорема 6. *Якщо* $n \neq 4$, *то конгруенції на* PB_n *вичерпуються списком:*

1. $I(PB_n \setminus A_k) \cup (A_k \times A_k)$,
2. $I(PB_n \setminus A_k) \cup F_k(H) \cup (A_{k+1} \times A_{k+1})$, $0 \leq k \leq n$, *де* H — *нормальна підгрупа в* S_{n-k},
3. $I(PB_n \setminus A_{n-1}) \cup B \cap B'$,
4. $I(PB_n \setminus A_{n-1}) \cup B$,
5. $I(PB_n \setminus A_{n-1}) \cup B'$,

6. $I(PB_n \setminus A_n) \cup A'$,
7. $I(PB_n \setminus A_n) \cup A$,
8. $I(PB_n \setminus A_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup (A_{n-1} \times A_{n-1})$,
9. $I(PB_n \setminus A_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup B \cap B'$},
10. $I(PB_n \setminus A_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup B$,
11. $I(PB_n \setminus A_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup B'$.

При $n = 4$ *до цих конгруенцій ще додається*

$$G \cup (PB_4 \setminus S_4 \times PB_4 \setminus S_4),$$

де $G = \{(a, b) \in S_4 \times S_4 :\ ab^{-1} \in K_4\}$.

Доведення. З лем 1–7 випливає, що всі конгруенції можуть міститися лише серед перелічених. Але ці відношення витримують множення на атоми, p-атоми та на підстановки, а тому є стабільними зліва та справа.

Нехай тепер ρ — деяка конгруенція на C_n.

Лема 1′. *Якщо* $s \in S_n$, $b \in C_n \setminus S_n$ *і* $s\rho b$, *то* $\rho = C_n \times C_n$.

Доведення. З $s\rho b$ випливає, що

$$e = s^{n!} \rho b^{n!} = a \in C_n \setminus S_n.$$

Якщо $a \in IS_n \setminus S_n$, то знайдеться таке i, що $aa(i) = a$, і тоді $e\rho a(i)$, а тому $e\rho g^{-1}a(i)g = a(j)$, де $g \in S_n$ така підстановка, що $g(i) = j$. Отже, $e\rho y = a(1)\ldots a(n)$. Якщо ж $a \in C_n \setminus IS_n$, то в $\{1, \ldots, n\}$ існує підмножина $\{i_1, \ldots, i_t\}$, $t > 1$, така, що або $aa(i_1, \ldots, i_t) = a$, або $a(i_1, \ldots, i_t)a$ і в будь-якому разі $e\rho a(i_1, \ldots, i_t)$, а тому $e\rho a(i_1, \ldots, i_t)a(i_1)a(i_1, \ldots, i_t)\rho a(i_1)$ і знову $e\rho y$. Але тоді для будь-якого $x \in C_n$ $e\rho y = syxy\rho x$.

Лема 2′. *Якщо* $a \in D_s$, $b \in D_l$, $a\rho b$, $s < l$, $n - s \geq 2$, *то ідеал* I_s *міститься в одному* ρ-*класі.*

Доведення. Існують такі елементи x та y із C_n, що $xay = a(1)\ldots a(s)$, тоді $a(1)\ldots a(s)$ еквівалентний $xby \in I_l$, і тому

$$a(1)\ldots a(s)\rho a(1)\ldots a(s)xbya(1)\ldots a(s).$$

Звідси, за лемою 1′, $a(1)\ldots a(s)\rho y$. Тоді

$$a(1,2)a(3)\ldots a(n)\rho ya(1,2)a(3)\ldots a(n)y = y,$$

тобто $y\rho yb(1,2)\rho b(1,2)y$, а тому і

$$y\rho yb(i,j)\rho b(i,j)y.$$

Отже,

$$b(1,2,\ldots,k)a(k+1)\ldots a(n) = \\ = b(1,2)b(2,3)\ldots b(k-1,k)yb(1,2)\cdot \\ \cdot b(2,3)\ldots b(k-1,k)\rho y, \text{ а тому} \\ b(1,2,\ldots,k)y\rho yb(1,2,\ldots,k)\rho y, \text{ тому} \\ b(i_1,\ldots,i_k)y\rho yb(i_1,\ldots,i_k)\rho y.$$

Тоді для довільного розбиття

$$\{1, \ldots, n\} = \{i_1^1, \ldots, i_{k(1)}^1\} \cup \ldots \cup \\ \cup \{i_1^w, \ldots, i_{k(w)}^w\} \text{ виконується}$$

$$y\rho b(i_1^1, \ldots, i_{k(1)}^1)\ldots b(i_1^w, \ldots, i_{k(w)}^w)y = \\ = a(i_1^1, \ldots, i_{k(1)}^1)\ldots a(i_1^w, \ldots, i_{k(w)}^w),$$

тобто ядро C_n міститься в одному ρ-класі. Тоді для будь-якого $z \in I_s$ існують p та q із C_n такі, що $z = pa(1)\ldots a(s)q\rho py q\rho y$.

Лема 3′. *Нехай* $n \geq 3$. *Якщо обмеження* ρ *на* S_n *не збігається з* $I(S_n)$, *то або*

$$\rho = (A_n \times A_n) \cup (S_n \setminus A_n \times S_n \setminus A_n) \cup \\ \cup (C_n \setminus S_n \times C_n \setminus S_n), \text{ або}$$
$$\rho = (S_n \times S_n) \cup (C_n \setminus S_n \times C_n \setminus S_n), \text{ або}$$
$$\rho = C_n \times C_n.$$

При $n = 4$ *до цих відношень ще додається* $\rho = G \cup (C_4 \setminus S_4 \times C_4 \setminus S_4)$, *де*

$$G = \{(a, b) \in S_4 \times S_4 :\ ab^{-1} \in K_4\}.$$

Лема 4′. *Якщо існують такі елементи* $a, x \in D_s$, *що* $a\rho x$, $n - s \geq 2$, $(a, x) \notin H$, *то ідеал* I_s *міститься в одному* ρ-*класі.*

Доведення. Припустимо, що a та x містяться в різних R-класах. Нехай a містить блок $\{i_1, \ldots, i_r, j_1', \ldots, j_t'\}$, тоді, якщо x містить блок $\{k_1, \ldots, k_u\}$ такий, що $A = \{k_1, \ldots, k_u\} \cap \{i_1, \ldots, i_r\} \neq \varnothing$, то

$$a = \big\{\{i_1, \ldots, i_r\} \cup A', (\{i_1, \ldots, i_r\} \setminus A)', \\ \{l, l'\}_{l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}}\big\}a$$

еквівалентний елементу

$$y = \big\{\{i_1, \ldots, i_r\} \cup A', (\{i_1, \ldots, i_r\} \setminus A)', \\ \{l, l'\}_{l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}}\big\}ax,$$

що містить блок $\{k_1, \ldots, k_u\} \cup \{i_1, \ldots, i_r\}$. Якщо $y \notin I_{s+1}$, то $y \in D_s$ і елемент $a(i_1, \ldots, i_r)y$ із D_s еквівалентний елементу із D_{s+1} $a(i_1, \ldots, i_r)a$. Отже, можна вважати, що $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(x)$. Тоді $z = b(i_1, \ldots, i_r)x\rho b(i_1, \ldots, i_r)a = a$, і тому, якщо $z \notin I_{s+1}$, то x містить блок $B \cup \{i_1, \ldots, i_r\} \cup C'$, де $C \neq \varnothing$ і $B \subset \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$. Якщо при цьому $B \neq \varnothing$, то елемент з D_s z еквівалентний елементу $b(B \cup \{i_1, \ldots, i_r\})a$ із I_{s+1}. Отже, можна вважати, що обмеження блоків розбиття a та x на $\{1,\ldots,n\}\setminus\mathrm{Ker}(a)=\{1,\ldots,n\}\setminus\mathrm{Ker}(x)$ збігаються. Доведемо тепер, що, якщо I_s не міститься в одному ρ-класі, то розбиття a та x на $\mathrm{Ker}(a)=\mathrm{Ker}(x)$ мають теж збігатися. Нехай $\{d_1,\ldots,d_p\}$ — найменший за потужністю блок серед блоків розбиття a та x на $\mathrm{Ker}(a)$, який міститься, скажімо, в a. Тоді

$$a(d_1,\ldots,d_p,i_1,\ldots,i_r)a\in D_{s+1}$$

еквівалентний

$$a(d_1,\ldots,d_p,i_1,\ldots,i_r)x\in D_s,$$

якщо x не містить блока $\{d_1,\ldots,d_p\}$, тобто $\{d_1,\ldots,d_p\}\in x$. Нехай тепер для всіх $w<q$ доведено, що $\{l_1,\ldots,l_w\}\in x\Leftrightarrow\{l_1,\ldots,l_w\}\in a$ і $\{m_1,\ldots,m_q\}\in a$, тоді, оскільки

$$a(m_1,\ldots,m_q,i_1,\ldots,i_r)x$$

еквівалентний

$$a(m_1,\ldots,m_q,i_1,\ldots,i_r)a\in D_{s+1},$$

то x має містити блок $\{m_1,\ldots,m_q\}$.

Лема 5′. *Нехай $n-s\geq 3$, обмеження ρ на $C_n\setminus \mathrm{I}_s$ збігається з $I(C_n\setminus I_s)$. Тоді або обмеження ρ на D_s збігається з $I(D_s)$, або ідеал I_{s+1} міститься в одному ρ-класі.*

Позначимо

$$A=\{(a,b)\in D_n\times D_n:\{i_1,\ldots,i_r\}\in a\Leftrightarrow \{i_1,\ldots,i_r\}\in b\},$$
$$A'=\{(a,b)\in D_n\times D_n:\{i'_1,\ldots,i'_r\}\in a\Leftrightarrow \{i'_1,\ldots,i'_r\}\in b\}.$$

Через $B\subset I_{n-1}\times I_{n-1}$ таке відношення, що клас, що містить $a=\{E_1,E_2,\ldots,E_k,\ldots\}$, з умовою

$$E_1\cup\ldots\cup E_k=\{1,\ldots,n\},$$

складається з aA і усіх елементів x з D_{n-1} таких, що існує $i\in\{1,\ldots,k\}$ таке, що $\{1,\ldots,n\}\setminus\mathrm{Ker}(x)=E_i$ і розбиття на $\mathrm{Ker}(x)$ збігається з $E_1,\ldots,E_{i-1},E_{i+1},\ldots,E_k$.

Лема 6′. *Обмеження ρ на I_{n-1} може збігатися лише або з $I(I_{n-1})$, або $I(D_{n-1})\cup(D_n\times D_n)$, або $I(D_{n-1})\cup A$, або $I(D_{n-1})\cup A'$, або $I_{n-1}\times I_{n-1}$, або B, або B', або $B\cap B'$.*

Доведення. Зауважимо, що, якщо не існує $c\in D_{n-1}$ та $d\in D_n$, таких, що $c\rho d$, то обмеження ρ на D_{n-1} збігається з $I(D_{n-1})$.

Доведення випливає з конструкції доведення леми $4'$. Зауважимо також, що обмеження ρ на I_n може збігатися або з $D_n\times D_n$, або з A', або з A, або з $I(D_n)$. Це випливає з того, що, якщо для елементів ядра a та b $a\rho b$ і a та b містять блоки $\{i_1,\ldots,i_r\}$ та $\{j_1,\ldots,j_t\}$ відповідно такі, що $\{i_1,\ldots,i_r\}\neq\{j_1,\ldots,j_t\}$ і $\{i_1,\ldots,i_r\}\cap\{j_1,\ldots,j_t\}\neq\varnothing$, то нехай $r>1$, тоді

$$a(i_1,\ldots,i_r)y=a\prod_{u\neq i_1,\ldots,i_r}a(u)y\rho$$
$$\rho b\prod_{u\neq i_1,\ldots,i_r}a(u)y=a(j_1,\ldots,j_t)y,$$

тому для будь-якого $z\in\{i_1,\ldots,i_r\}\setminus\{j_1,\ldots,j_t\}$ маємо

$$a(i_1,\ldots,i_r)y\rho a(z)a(j_1,\ldots,j_t)y\rho$$
$$\rho a(z)a(i_1,\ldots,i_r)y,$$

тоді

$$a(i_1,\ldots,i_r)y=(zi_s)a(i_1,\ldots,i_r)y\rho$$
$$\rho(zi_s)a(z)a(j_1,\ldots,j_t)y=a(i_s)a(i_1,\ldots,i_r)y,$$

а тому

$$a(i_1,\ldots,i_r)y\rho a(i_1)\ldots a(i_r)a(i_1,\ldots,i_r)y=y$$

і тоді

$$b(i_1,i_2)y\rho b(i_1,i_2)a(i_1,\ldots,i_r)y\rho y,$$

тоді $b(i,j)y\rho y$, а тому для довільних елементів ядра a та b aAb. Як і в лемі 6, із цих двох зауважень випливає твердження леми.

Аналогічно до попереднього визначимо для довільної нормальної підгрупи H з S_{n-k} відношення $F_k(H)$ на D_k напівгрупи C_n.

Лема 7′. *При $n-k\geq 2$ обмеження ρ на D_k однозначно задається нормальною підгрупою H з S_{n-k} і відношенням $F_k(H)$. Якщо $n\geq 3$, $k=n-2$ і $H=Z_2$, то $a(1)\ldots a(n)\rho a(1)\ldots a(n-1)$.*

Доведення. Нехай клас, що містить $a(1)\ldots a(k)$ збігається з $a(1)\ldots a(k)H$, де H нормальна підгрупа в $S_{\{k+1,\ldots,n\}}$. Тоді якщо $\{1,\ldots,k\}=E_1\cup\ldots\cup E_{n-k}=G_1\cup\ldots\cup G_{n-k}$ — довільні розбиття на блоки (можливо, деякі з них порожні), то для довільних підстановок x та y з $S_{\{k+1,\ldots,n\}}$, $y\in H$, виконується

$$b(E_1\cup\{k+1\})\ldots b(E_{n-k}\cup\{n\})a(1)\ldots a(k)x\cdot$$
$$\cdot b(G_1\cup\{k+1\})\ldots b(G_{n-k}\cup\{n\})\rho$$
$$\rho b(E_1\cup\{k+1\})\ldots b(E_{n-k}\cup\{n\})a(1)\ldots a(k)xy\cdot$$
$$\cdot b(G_1\cup\{k+1\})\ldots b(G_{n-k}\cup\{n\}),$$

тому для довільних розбиттів

$$\{1, \ldots, n\} = F_1 \cup \ldots \cup F_{n-k} = H_1 \cup \ldots \cup H_{n-k}$$

елементи $\{F_1 \cup H'_{\pi(1)}, \ldots, F_{n-k} \cup H'_{\pi(n-k)}\}$ еквівалентні для всіх $\pi \in H$, а тому для кожних a та b з D_k, aHb, $a\rho b$ тоді і тільки тоді, коли $st^{-1} \in H$, де s та t — підстановки з S_{n-k}, утворені блоками на a та b вигляду $E \cup G'$.

Теорема 7. *Якщо $n \neq 4$, то конгруенції на C_n вичерпуються списком:*

1. $I(C_n \setminus I_k) \cup (I_k \times I_k)$,
2. $I(C_n \setminus I_k) \cup F_k(H) \cup (I_{k+1} \times I_{k+1})$, $0 \leq k \leq n$, *де H — нормальна підгрупа в S_{n-k}*,
3. $I(C_n \setminus I_{n-1}) \cup (B \cap B')$,
4. $I(C_n \setminus I_{n-1}) \cup B$,
5. $I(C_n \setminus I_{n-1}) \cup B'$,
6. $I(C_n \setminus I_n) \cup A'$,
7. $I(C_n \setminus I_n) \cup A$,
8. $I(C_n \setminus I_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup (I_{n-1} \times I_{n-1})$,
9. $I(C_n \setminus I_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup (B \cap B')$,
10. $I(C_n \setminus I_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup B$,
11. $I(C_n \setminus I_{n-2}) \cup F_{n-2}(Z_2) \cup B'$.

При $n = 4$ до цих конгруенцій ще додається $G \cup (C_4 \setminus S_4 \times C_4 \setminus S_4)$, де

$$G = \{(a, b) \in S_4 \times S_4 : ab^{-1} \in K_4\}.$$

Доведення. З лем $1'$–$7'$ випливає, що всі конгруенції можуть міститися лише серед перерахованих. Але ці відношення витримують множення на атоми, $b(1,2)$, p-атоми та на підстановки, а тому є стабільними зліва та справа.

4. Ретракти напівгруп PB_n та C_n

Теорема 8. *Якщо $n \neq 2, 4$, то ретракти на PB_n вичерпуються списком:*

1) *довільний ідемпотент;*
2) *e та довільний ідемпотент з $PB_n \setminus S_n$;*
3) *e, інволюція $(i_1 j_1) \ldots (i_{2k-1} j_{2k-1})$ та ідемпотент $x \in PB_n \setminus S_n$, такий, що, якщо $\{s, t\} \in x$ ($\{s', t'\} \in x$), то $\{s, t\} = \{i_u, j_u\}$ ($\{s', t'\} = \{i'_u, j'_u\}$) для деякого u, а також $\{i_1, j_1, \ldots, i_{2k-1}, j_{2k-1}\}$ та $\{i'_1, j'_1, \ldots, i'_{2k-1}, j'_{2k-1}\}$ містяться в $\mathrm{Ker}(x)$ та $\mathrm{Ker}'(x)$ відповідно;*
4) *S_n та $y = a(1) \ldots a(n)$;*
5) *PB_n.*

При $n = 4$ до цих ретрактів ще додаються $S_{\{1,\ldots,4\} \setminus \{i\}} \cup y$ і $S_{\{1,\ldots,4\} \setminus \{i\}} \prod\limits_{u \neq i} a(i)$, $1 \leq i \leq 4$.

При $n = 2$ до ретрактів 1)–5) ще додаються:

1. $\{e, a(1)a(2), a(1,2)a(1)\}$,
2. $\{e, a(1)a(1,2), a(1,2)\}$,
3. $\{e, a(1)a(2), a(1)a(1,2)\}$,
4. $\{e, a(1,2)a(1), a(1,2)\}$,
5. $\{e, a(1)a(2), a(1,2)a(1), a(1)a(1,2)\}$,
6. $\{e, a(1)a(2), a(1,2)a(1), (12)\}$,
7. $\{e, a(1)a(1,2), a(1,2), (12)\}$,
8. $\{e, a(1)a(2), a(1)a(1,2), (12)\}$,
9. $\{e, a(1,2)a(1), a(1,2), (12)\}$,
10. $\{e, a(1)a(2), a(1,2)a(1), a(1)a(1,2), (12)\}$,
11. IS_2,
12. $IS_2 \cup a(1,2)a(1)$,
13. $IS_2 \cup a(1)a(1,2)$,
14. $S_2 \cup a(1,2)a(1)$,
15. $S_2 \cup a(1)a(1,2)$.

Доведення. Нехай S — ретракт, а ρ — конгруенція, з якої його отримано. Розглянемо спочатку випадок $n \geq 3$. Тоді є дві можливості.

Обмеження ρ на S_n збігається з $I(S_n)$, тоді S містить S_n. Якщо

$$\rho = I(S_n) \cup (PB_n \setminus S_n \times PB_n \setminus S_n),$$

то $S = S_n \cup \{a\}$, де a — ідемпотент, для якого $sa = as = a$ для будь-якого $s \in S_n$. Тоді a не може містити блоків вигляду $\{i, j\}$ або $\{s', t'\}$, але тоді в свою чергу має виконуватися $|\mathrm{Ker}(a)| = |\mathrm{Ker}'(a)| = n$, тобто $a = y$, і отримуємо випадок 4).

Якщо ж $\rho \neq I(S_n) \cup (PB_n \setminus S_n \times PB_n \setminus S_n)$, то S містить елемент із D_1, а тому S містить IS_n, що при $n \geq 3$ можливо лише тоді, коли клас, що містить атом $a(1,2)$, міститься в D_2 і збігається з $a(1,2)H$, де H — нормальна підгрупа в $S_{\{3,\ldots,n\}}$. Тому $a(1,2) \in S$, і, оскільки IS_n та $a(1,2)$ породжують PB_n, то $S = PB_n$ і отримуємо випадок 5).

Обмеження ρ на S_n не збігається з $I(S_n)$. Тоді маємо очевидним чином випадки 1)–3), і при $n = 4$ додається можливість $K \cup \{b\}$, де K — підгрупа з S_4, ізоморфна S_3, а b — ідемпотент з $PB_4 \setminus S_4$ такий, що $sb = bs = b$ для будь-якого $s \in K$. З будови ретрактів напівгрупи B_n випливає, що $b \in PB_4 \setminus B_4$. Якщо тепер b має блок вигляду $\{i, j\}$ ($\{i', j'\}$), то кількість підстановок $\pi \in S_4$ таких, що $\pi b = b$ ($b\pi = b$) не перевищує 4. Отже, $b \in IS_4 \setminus S_4$. Якщо $b \in PB_4 \setminus A_3$, то кількість підстановок $\pi \in S_4$ таких, що $\pi b = b$, не перевищує 2. Отже, або $b = y$, або $b = \prod\limits_{u \neq i} a(i)$ для деякого $i \in \{1,2,3,4\}$. У першому випадку S має збігатися з $S_{\{1,\ldots,4\} \setminus \{i\}} \cup y$ і кожна така напівгрупа є ретрактом. У другому випадку S має збігатися з $S_{\{1,\ldots,4\} \setminus \{i\}} \cup \prod\limits_{u \neq i} a(i)$, що є ретрактом за конгруенцією, що визначається розбиттям S_4 за підгрупою $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Розглянемо тепер випадок $n=2$. Окрім випадків 1)–5), можливі ще такі:

1. $\rho=(S_2\times S_2)\cup B$, тоді $a(1,2)a(1)\rho a(1,2)$, $a(1)a(1,2)\rho a(1)a(2)\rho x$, де x — довільний з $IS_2\setminus S_2$. Тоді якщо S містить елемент a з $IS_2\setminus S_2$, то $a=a(1)a(2)$, бо
$$aa(1,2)a(1)=aa(1,2)a=a(1)a(2).$$
Тоді $S=\{e,\ a(1)a(2),\ a(1,2)a(1)\}$. Якщо ж S містить $a(1)a(1,2)$, то $S=\{e,\ a(1)a(1,2),\ a(1,2)\}$.
2. $\rho=(S_2\times S_2)\cup B'$. Аналогічно до попереднього маємо випадки $S=\{e,\ a(1)a(2),\ a(1)a(1,2)\}$ та $S=\{e,\ a(1,2)a(1),\ a(1,2)\}$.
3. $\rho=(S_2\times S_2)\cup(B\cap B')$, тоді очевидним чином $S=\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1),a(1)a(1,2)\}$.
4. $\rho=I(S_2)\cup(B\cap B')$, $\rho=I(S_2)\cup B$, а також $\rho=I(S_2)\cup B'$, тоді аналогічно до 1–3 отримуємо
$$\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1),(12)\},$$
$$\{e,a(1)a(1,2),a(1,2),(12)\},$$
$$\{e,a(1)a(2),a(1)a(1,2),(12)\},$$
$$\{e,a(1,2)a(1),a(1,2),(12)\},$$
$$\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1),a(1)a(1,2),(12)\}.$$
5. $\rho=I(S_2)\cup(A_1\times A_1)$, тоді маємо випадки $\{e,(12),a(1,2)\}$, $\{e,(12),a(1,2)a(1)\}$, $\{e,(12),a(1)a(1,2)\}$, $\{e,(12),a(1)a(2)\}$.
6. $\rho=I(PB_2\setminus D_2)\cup(D_2\times D_2)$. Тоді S містить $IS_2\cap D_1$ і тому всю IS_2, тобто $a(1)a(2)\in S$ і звідси $S=IS_2$.
7. $\rho=I(PB_2\setminus D_2)\cup A$, тоді знову S містить $IS_2\cap D_1$ і тому всю IS_2, тобто $S=IS_2\cup a(1,2)a(1)$.
8. $\rho=I(PB_2\setminus D_2)\cup A'$, тоді аналогічно до 7 маємо $S=IS_2\cup a(1)a(1,2)$.

Теорема 9. *Якщо $n\neq 2,4$, то ретракти на C_n вичерпуються списком:*

1) довільний ідемпотент;
2) e та довільний ідемпотент з $C_n\setminus S_n$;
3) e, інволюція $(i_1j_1)\dots(i_{2k-1}j_{2k-1})$ та ідемпотент $x\in C_n\setminus S_n$, такий, що не змінюється при множенні на цю інволюцію;
4) $S_n\cup y$, $S_n\cup a(1,\dots,n)$, $S_n\cup a(1,\dots,n)y$, $S_n\cup ya(1,\dots,n)$, $S_n\cup b(1,\dots,n)$;
5) C_n.

При $n=4$ до цих ретрактів ще додаються $S_{\{1,\dots,4\}\setminus\{i\}}\cup a$, де a є таким ідемпотентом із $C_n\setminus S_n$, що не змінюється при множенні на $S_{\{1,\dots,4\}\setminus\{i\}}$, $1\le i\le 4$.

При $n=2$ до ретрактів 1)–5) ще додаються:

1. $\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1)\}$,
2. $\{e,a(1)a(1,2),a(1,2)\}$,
3. $\{e,a(1)a(2),a(1)a(1,2)\}$,
4. $\{e,a(1,2)a(1),a(1,2)\}$,
5. $\{e,a(1),b(1,2)a(1)\}$,
6. $\{e,a(2),b(1,2)a(2)\}$,
7. $\{e,a(2)b(1,2),b(1,2)\}$,
8. $\{e,a(1)b(1,2),b(1,2)\}$,
9. $\{e,a(1),a(1)b(1,2)\}$,
10. $\{e,a(2),a(2)b(1,2)\}$,
11. $\{e,b(1,2)a(2),b(1,2)\}$,
12. $\{e,b(1,2)a(1),b(1,2)\}$,
13. $\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1),a(1)a(1,2)\}$,
14. $\{e,a(1),a(1)b(1,2),b(1,2)a(1),b(1,2)\}$,
15. $\{e,a(2),a(2)b(1,2),b(1,2)a(2),b(1,2)\}$,
16. $\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1),(12)\}$,
17. $\{e,a(1)a(1,2),a(1,2),(12)\}$,
18. $\{e,a(1)a(2),a(1)a(1,2),(12)\}$,
19. $\{e,a(1,2)a(1),a(1,2),(12)\}$,
20. $\{e,a(1)a(2),a(1,2)a(1),a(1)a(1,2),(12)\}$,
21. IS_2,
22. $IS_2\cup a(1,2)a(1)$,
23. $IS_2\cup a(1)a(1,2)$,
24. $S_2\cup a(1,2)a(1)$,
25. $S_2\cup a(1)a(1,2)$.

Доведення. Нехай S — ретракт, а ρ — конгруенція, з якої його отримано. Розглянемо спочатку випадок $n\geq 3$. Тоді є дві можливості.

Обмеження ρ на S_n збігається з $I(S_n)$, тоді S містить S_n. Якщо
$$\rho=\mathrm{I}(S_n)\cup(C_n\setminus S_n\times C_n\setminus S_n),$$
то ідемпотент, для якого $sa=as=a$ для будь-якого $s\in S_n$. Тоді a не може містити блоків вигляду $\{i_l,\dots,i_r\}$ або $\{i'_l,\dots,i'_r\}$, $1<r<n$ і отримуємо випадок 4). Якщо ж $\rho\neq I(S_n)\cup(C_n\setminus S_n\times C_n\setminus S_n)$, то S містить елемент із D_1, а тому S збігається з C_n і отримуємо випадок 5).

Обмеження ρ на S_n не збігається з $I(S_n)$. Тоді маємо очевидним чином випадки 1)–3), і при $n=4$ додається можливість $K\cup b$, де K — підгрупа з S_4, ізоморфна S_3, а b — ідемпотент з $C_4\setminus S_4$ такий, що $sb=bs=b$ для будь-якого $s\in K$.

Розглянемо тепер випадок $n=2$. Окрім випадків 1)–5), можливі ще такі:

1. $\rho=(S_2\times S_2)\cup B$, тоді
$$b(1,2)\rho b(1,2)a(1)\rho b(1,2)a(2)\rho b(1,2),\ \text{і}$$
$$a(1)a(1,2)\rho a(1)a(2)\rho a(1)b(1,2)\rho a(2)b(1,2)\rho x,$$

де x — довільний з $IS_2 \setminus S_2$. Тоді, якщо S містить елемент a з $IS_2 \setminus S_2$, то або $a = a(1)a(2)$, або $aa(1,2)a(1) = aa(1,2)a = a(1)a(2)$, і тоді $S = \{e,\ a(1)a(2),\ a(1,2)a(1)\}$, або $a = a(1)$ $(a = a(2))$, і тоді $S = \{e,\ a(1),\ b(1,2)a(1)\}$ $(S = \{e,\ a(2),\ b(1,2)a(2)\})$, або $a = a(1)b(1,2)$ $(a = a(2)b(1,2))$, і тоді $S = \{e,\ a(1)b(1,2),\ b(1,2)\}$ $(S = \{e,\ a(2)b(1,2),\ b(1,2)\})$. Якщо ж S містить $a(1)a(1,2)$, то $S = \{e, a(1)a(1,2), a(1,2)\}$.

2. $\rho = (S_2 \times S_2) \cup B'$. Аналогічно до попереднього маємо випадки:

$$S = \{e, a(1)a(2), a(1)a(1,2)\},$$
$$S = \{e, a(1), a(1)b(1,2)\},$$
$$S = \{e, a(2), a(2)b(1,2)\},$$
$$S = \{e, b(1,2)a(1), b(1,2)\},$$
$$S = \{e, b(1,2)a(2), b(1,2)\},$$
$$S = \{e, a(1,2)a(1), a(1,2)\}.$$

3. $\rho = (S_2 \times S_2) \cup (B \cap B')$, тоді очевидним чином маємо випадки:

$$S = \{e, a(1)a(2), a(1,2)a(1), a(1)a(1,2)\},$$
$$S = \{e, a(1), a(1)b(1,2), b(1,2)a(1), b(1,2)\},$$
$$S = \{e, a(2), a(2)b(1,2), b(1,2)a(2), b(1,2)\}.$$

4. Обмеження ρ на $C_2 \setminus D_2$ збігається з $I(C_2 \setminus D_2)$. Тоді S містить D_1, і тому $S = Z_2$.

5. Зрізи відношень Гріна напівгрупи PB_n

Для довільного розбиття $\{1, \ldots, n\} = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ на непорожні блоки з лінійним порядком $m_1^i, \ldots, m_{|M_i|}^i$ на кожному блоці M_i, покладемо для кожної пари i, j, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le |M_i|$,

$$c(i,j) = \{\{m_j^i\}, \{(m_1^i)'\}, \{m_1^i, (m_2^i)'\}, \ldots, \{m_{j-1}^i, (m_j^i)'\}, \{k, k'\}_{k \ne m_1^i, \ldots, m_j^i}\},$$

а також для різних s та t

$$d(s,t) = a(s,t)c(l,r)c(p,q),$$

де l, r, p, q такі, що $s = m_r^l$ і $t = m_q^p$, однозначно визначені. Позначимо тепер

$$R_p(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k}) = \langle\, c(i,j), d(s,t) : 1 \le i \le k, 1 \le j \le |M_i|, 1 \le s < t \le n \,\rangle \cup \{e\}$$

напівгрупу, що залежить від розбиття $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ на блоки з лінійним порядком на кожному блоці. В [6] доведено, що усіма R-зрізами IS_n є

$$R(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k}) = \langle\, c(i,j) : 1 \le i \le k, 1 \le j \le |M_i| \,\rangle \cup \{e\}.$$

Теорема 10. *Відображення*

$$(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k}) \mapsto R_p(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k})$$

є бієкцією множини розбиттів n-елементної множини з лінійним порядком на кожному блоці на множину всіх R-зрізів напівгрупи PB_n.

Доведення. Нехай R — R-зріз PB_n. Оскільки $R \cap D_1$ містить представника кожного R-класу, то для довільного $i \in \{1, \ldots, n\}$ R містить елемент із D_1, що містить блок $\{i\}$, а тому, якщо $x \in R \cap D_s$ і x містить $\{i_1\}, \ldots, \{i_s\}$, то $x \in IS_n \cap D_s$, бо x можна подати у вигляді добутку s елементів з $R \cap D_1$. Тоді кожен елемент $x \in R$ не може містити блок вигляду $\{i', j'\}$, бо інакше для елемента $y \in R \cap D_x$ такого, що y містить блоки $\{z\}$, $z \in \mathrm{Ker}'(x)$, виконувалося б $xRxy$ і при цьому xy не містить блоків вигляду $\{s', t'\}$. Зокрема, тоді $IS_n \cap R$ має бути R-зрізом IS_n.

Отже, існує таке розбиття

$$\{1, \ldots, n\} = M_1 \cup \ldots \cup M_k,$$

що $IS_n \cap R = R(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k})$. Доведемо, що тоді $R = R_p(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k})$. Якщо $|M_i| \ge 2$, то для довільних різних s, t з M_i нехай $x(s,t)$ — той елемент з $R \cap D_2$, який містить $\{s,t\}$, тоді, оскільки $a = \prod_{u \in M_i} a(u) \in R(\overrightarrow{M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_k})$, то $ax(s,t) \in R \cap D_{|M_i|}$ такий елемент, що містить блоки $\{z\}$, $z \in M_i$, а тому $ax(s,t) = a$, і тому $x(s,t)$ містить блоки $\{k, k'\}$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus M_i$. Нехай $\{u'\} \in x(s,t)$ і $\{v'\} \in x(s,t)$, тоді

$$x(s,t)c(i,e)c(i,f)Rx(s,t),$$

де $u = m_e^i$, $v = m_f^i$, тому

$$x(s,t)c(i,e)c(i,f) = x(s,t),$$

звідки $\{u,v\} = \{m_1^i, m_2^i\}$. Аналогічно, кожен елемент із D_s, який містить блоки $\{k,k'\}$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus M_i$, містить $\{m_1^i\}, \ldots, \{m_s^i\}$. Оскільки тепер для довільного $p \le \min(e,f) - 1$ елемент

$$c(i,1) \ldots c(i,p)x(s,t)$$

має містити $\{(m_1^i)'\}, \ldots, \{(m_{p+2}^i)'\}$, то $x(s,t)$ містить блоки

$$\{m_q^i, (m_{q+2}^i)'\},\ 1 \le q \le \min(e,f) - 1,$$

але до того ж $c(i,1)\dots c(i,\min(e,f))x(s,t)$ містить $\{m_1^i\},\dots,\{m^i_{\min(e,f)}\},\{m^i_{\max(e,f)}\}$, а тому збігається з $c(i,1)\dots c(i,\min(e,f))$, тобто $x(s,t)$ має містити блоки

$$\{m_q^i,(m_{q+1}^i)'\},\ \min(e,f)<q<\max(e,f) \text{ і } \{m_r^i,(m_r^i)'\},\ r>\max(e,f).$$

Отже, $x(s,t)=a(s,t)c(i,e)c(i,f)=d(s,t)$. Якщо $k\geq 2$ і маємо різні i та j з $\{1,\dots,k\}$, то нехай $x(s,t)$ – той елемент з $R\cap D_2$, який містить $\{s,t\}$, $s=m_e^i$, $t=m_f^j$, тоді, оскільки

$$a=\prod_{u\in M_i\cap M_j} a(u)\in R(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k}),$$

то $ax(s,t)\in R\cap D_{|M_i|+|M_j|}$ такий елемент, що містить блоки $\{z\}$, $z\in M_i\cap M_j$, а тому $ax(s,t)=a$ і звідси $x(s,t)$ містить блоки $\{k,k'\}$, $k\in\{1,\dots,n\}\setminus(M_i\cup M_j)$. Оскільки тепер $c(i,1)\dots c(i,|M_i|)x(s,t)$ містить $\{m_1^i\},\dots,\{m^i_{|M_i|}\},\{m_f^j\}$, то

$$c(i,1)\dots c(i,|M_i|)x(s,t)= = c(i,1)\dots c(i,|M_i|)c(j,f)$$

і тому містить

$$\{(m_1^j)'\},\{m_1^j,(m_2^j)'\},\dots,\{m_{f-1}^j,(m_f^j)'\}, \{m_{f+1}^j,(m_{f+1}^j)'\},\dots,\{m^j_{|M_j|},(m^j_{|M_j|})'\}.$$

Аналогічно, $x(s,t)$ містить

$$\{(m_1^i)'\},\{m_1^i,(m_2^i)'\},\dots,\{m_{e-1}^i,(m_e^i)'\}, \{m_{e+1}^i,(m_{e+1}^i)'\},\dots,\{m^i_{|M_i|},(m^i_{|M_i|})'\}.$$

Отже, в цьому разі теж $x(s,t)=d(s,t)$. Але, оскільки

$$\langle c(i,j),d(s,t):1\leq i\leq k,1\leq j\leq|M_i|, 1\leq s<t\leq n\rangle$$

містить представників усіх R-класів $PB_n\setminus S_n$, то має бути $R=R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$. Залишилось довести, що $R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$ є R-зрізом. Як уже зазначалося, $R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$ містить хоча б по одному представнику з кожного R-класу. Якщо $x\in R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$, то на кожній множині M_i' x може містити лише перші декілька серед $\{(m_1^i)'\},\dots,\{(m^i_{|M_i|})'\}$. Це випливає з того, що якщо $y\in R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$ має таку властивість, то вона справедлива і для $yc(s,t)$ та $yd(l,m)$, $1\leq s\leq k, 1\leq t\leq|M_s|, 1\leq l<m\leq n$. Але з конструкції елементів $c(s,t)$ та $d(l,m)$ випливає, що якщо елемент з $R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$ містить блок вигляду $\{p,q'\}$, то існує $i\in\{1,\dots,k\}$ таке, що $p,q\in M_i$ і якщо $p=m_e^i$, а $q=m_f^i$, то $e\leq f$. Отже, якщо $a,b\in R_p(\overrightarrow{M_1},\dots,\overrightarrow{M_k})$ і aRb, то $a=b$.

Теорема 11. *При $n\geq 4$ PB_n не містить H-зрізів. У PB_1 та PB_2 єдиними H-зрізами є відповідно PB_1 та $\{e\}\cup PB_2\setminus S_2$. У напівгрупи PB_3 кожен H-зріз має вигляд $H\cup(PB_3\setminus IS_3)$, де H — довільний H-зріз напівгрупи IS_3.*

Доведення. Якщо при $n\geq 4$ PB_n має H-зріз S, то $S\cap B_n$ буде H-зрізом B_n, що неможливо, звідки випливає перше твердження. При $n\leq 2$ кожен H-клас елементів з $PB_n\setminus S_n$ і кожен H-клас елементів з $PB_3\setminus IS_3$ містить рівно один елемент. Отже, при $n\leq 3$ H-зрізи можуть міститися лише серед перерахованих, які є H-зрізами.

Зауважимо, що будову H-зрізів напівгрупи IS_3 описано у [8].

6. Зрізи відношень Гріна напівгрупи C_n

Для довільного лінійного порядку $\prec$ $m_1,\dots,m_n$ на $\{1,\dots,n\}$ покладемо для i, $1\leq i\leq n$,

$$c(i)=\{\{m_i\},\{m_1{}'\},\{m_1,m_2{}'\},\dots, \{m_{i-1},m_i{}'\},\{k,k'\}\},\ k\neq m_1,\dots,m_i,$$

а також для $E\subset\{1,\dots,n\}$, $|E|>1$,

$$d(E)=b(E)\prod_{u\in E\subset x} c(u),$$

де x — найбільший відносно встановленого порядку елемент з E. Позначимо тепер

$$R_c(\prec)=\langle c(i),d(E):1\leq i\leq n, E\subset\{1,\dots,n\}\rangle\cup\{e\}.$$

Позначимо

$$R_2=\{e,a(1)b(1,2),a(2)b(1,2), a(1)a(2)a(1,2),a(1,2)\},$$

R_3 множину підмножин $S\subset C_3$ таких, що S містить рівно по одному представнику з кожного R-класу, містить e, $a(1)b(1,2)$ та $a(2)b(1,2)$, кожен елемент з $S\setminus\{e\}$ містить або блоки $\{1',2'\}$ та $\{3'\}$, або $E\cup\{1',2'\}$ та $F\cup\{3'\}$, або $E\cup\{1',2',3'\}$,

$$\begin{aligned}R_4=\langle\, & e,b(2,3),\{\{1,2,4'\},\{3,2',3'\},\{4,1'\}\},\\ & \{\{1,1'\},\{2,4'\},\{3,4,2',3'\}\},\\ & \{\{1,4,1'\},\{2,4'\},\{3,2',3'\}\},\\ & \{\{1,3,2',3'\},\{2,4'\},\{4,1'\}\},\\ & \{\{1,1'\},\{2,4,4'\},\{3,2',3'\}\},\\ & \{\{1\},\{2,4'\},\{3,2',3'\},\{4,1'\}\},\\ & a(2)b(2,3),\ a(3)b(2,3),\\ & \{\{4\},\{1,1'\},\{2,4'\},\{3,2',3'\}\},\\ & a(1,2)b(2,3,4)\,\rangle.\end{aligned}$$

Через $R_2(i,j)$, $R_4(i,j,k,l)$, $R_3(i,j,k)$ позначимо піднапівгрупи та класи піднапівгруп з C_n, кожен елемент яких містить відповідно $\{s,s'\}_{s\neq i,j}$, $\{s,s'\}_{s\neq i,j,k,l}$, $\{s,s'\}_{s\neq i,j,k}$ та утворюється заміною $1,2,3,4$ на i,j,k,l у відповідному елементі з R_2, R_4, R_3. Нехай F — впорядкований набір (i,j), або (i,j,k), або (i,j,k,l). Для $G\subset\{1,\ldots,n\}$ таких, що $G\cap F\neq\varnothing$, визначимо $c'(G)$ такий елемент, що якщо $(G\cap F)\cup X'$, $\{w\}\cup X_w{}'$, $w\in F\setminus G$ — блоки однозначно визначеного елемента з $R(F)$, то він містить $G\cup X'$, $\{w\}\cup X_w{}'$, а всі інші блоки у нього, крім $\{t'\}$, t — перші $|G\setminus F|$ серед $\{1,\ldots,n\}\setminus F$ за встановленим порядком, мають вигляд $\{u,v'(u)\}$ і якщо u менший за w, то $v(u)$ менший за $v(w)$ згідно з цим самим порядком. Покладемо

$$d'(G)=c'(G)f,$$

де $f\in R(F)$ такий, що f містить X, а всі його блоки мають вигляд $A\cup B'$, $|A|=1$. Позначимо тепер

$$\begin{aligned}R_c(\prec;F)=\langle\, & c(i),d(E),c'(G),d'(G):\\ & i\in\{1,\ldots,n\}\setminus F, E\subset\{1,\ldots,n\}\setminus F,\\ & G\cap F\neq\varnothing\,\rangle\cup\{e\}.\end{aligned}$$

Теорема 12. *Кожен R-зріз напівгрупи C_n має вигляд або $R_c(\prec)$, або $R_c(\prec;F)$, де F — впорядкований набір, що містить 2, 3 або 4 елементи, причому всі такі R-зрізи — різні.*

Доведення. Нехай R — R-зріз C_n. Припустимо спочатку, що кожен елемент $x\in R$ не може містити блока вигляду $F\cup G'$, $|G|>1$. Оскільки $R\cap D_1$ містить представника кожного R-класу, то для довільного $i\in\{1,\ldots,n\}$ R містить елемент із $IS_n\cap D_1$, що містить блок $\{i\}$, а тому, якщо $x\in R\cap D_s$ і x містить $\{i_1\},\ldots,\{i_s\}$, то $x\in IS_n\cap D_s$, бо x можна подати у вигляді добутку s елементів з $R\cap D_1$. Тоді кожен елемент $x\in R$ не може містити блок вигляду T', $|T|>1$, бо інакше для елемента $y\in R\cap D_x$ такого, що y містить блоки $\{z\}$, $z'\in \mathrm{Ker}'(x)$, виконувалося б $xRxy$, і при цьому xy не містить блоків вигляду G', $|G|>1$. Зокрема, тоді $PB_n\ R$ має бути R-зрізом PB_n. Отже, існує таке розбиття $\{1,\ldots,n\}=M_1\ldots M_k$, що

$$PB_n\cap R=R_p(\overrightarrow{M_1},\ldots,\overrightarrow{M_k}).$$

Доведемо, що тоді $k=1$ і $R=R_c(\prec)$. Якщо $k\geq 2$, то для довільних s,t з M_1 та M_2 існує елемент x з R, який містить $\{s,t\}\cup\{u'\}$, тоді, оскільки $a=\prod_{u\in M_1}a(u)\in R_p(\overrightarrow{M_1},\ldots,\overrightarrow{M_k})$, то $ax\in R_p(\overrightarrow{M_1},\ldots,\overrightarrow{M_k})$ такий елемент, що містить блок $\{t,u'\}$, і аналогічно для $b=\prod_{u\in M_2}a(u)\in R_p(\overrightarrow{M_1},\ldots,\overrightarrow{M_k})$ $bx\in R_p(\overrightarrow{M_1},\ldots,\overrightarrow{M_k})$ містить блок $\{s,u'\}$, але одночасно це неможливо. Отже, $k=1$. Кожен елемент з $R\cap D_s$ має блоки $\{m_1{}'\},\ldots,\{m_s{}'\}$, тому, якщо елемент з R містить $\mathrm{E}\cup\{u'\}$ і це єдиний блок потужності, більшої за 2, то він збігається з $d(E)$. Але, оскільки $\langle c(i),d(E):1\leq i\leq n, E\subset\{1,\ldots,n\}\rangle$ містить представники усіх R-класів $C_n\subset S_n$, то має бути $R=R_c(\prec)$. Залишилось довести, що $R_c(\prec)$ є R-зрізом. Якщо $x\in R$, то x може містити лише перші декілька серед $\{m_1{}'\},\ldots,\{m_n{}'\}$. Це випливає з того, що якщо $y\in R$ має таку властивість, то вона справедлива і для $yc(i)$ та $yd(E)$, $1\leq s\leq n$, $E\subset\{1,\ldots,n\}$. Але з конструкції елементів $c(i)$ та $d(E)$ випливає, що якщо елемент з R містить блоки $F\cup\{u'\}$ та $G\cup\{v'\}$ і найбільший елемент з F більший за відповідний з G, то u більший за v. Отже, якщо $a,b\in R$ і aRb, то $a=b$. Нехай тепер $x\in R\cap D_n$ такий, що містить $E_1{}',\ldots,E_k{}'$, $\{1,\ldots,n\}=E_1\cup\ldots\cup E_k$. Тоді для будь-якого елемента $y\in R\cap D_n$ $yxRy$ і тому y містить $E_1{}',\ldots,E_k{}'$. Нехай z — той елемент $R\cap D_{n-1}$, що містить $\{1,\ldots,n\}\cup E'$, тоді, оскільки $xz\in D_n$, то E збігається з одним із $E_1,\ldots,E_k$, скажімо E_1. Тоді, оскільки для будь-якого елемента $u\in R\cap D_{n-1}$ виконується $uzRu$, то u містить блок вигляду $F\cup E'$. Якщо тепер $k>1$ і деяка з множин $E_2,\ldots,E_k$, наприклад E_2, містить більш ніж один елемент, то, якщо s — деякий елемент з $E_1=E$, а t — деякий елемент з E_2, то довільний елемент $v\in R\cap D_{n-1-|E|}$, який містить блоки $\{w\}\cup F_w{}'$, $w\in E\setminus\{s\}$, $\{s\}\cup(E_2\setminus\{t\})\cup T_1{}'$ та $\{t\}\cup T_2{}'$ такий, що $zv\in D_{n-1}$, але zv містить блок

$$\{1,\ldots,n\}\cup(T_1\cup T_2\cup\bigcup_{w\in E\setminus\{s\}}F_w)'$$

і $|T_1\cup T_2\cup\bigcup_{w\in E\setminus\{s\}}F_w|>|E|$, що неможливо. Отже, або $k=1$ і $E=\{1,\ldots,n\}$, або $k>1$ і $|E_2|=\ldots=|E_k|=1$.

Розглянемо спочатку перший із цих випадків. Нехай деякий елемент $a \in R \cap D_{n-2}$ містить блоки $P_1 \cup Q_1{}'$ та $P_2 \cup Q_2{}'$, тоді $Q_1 \cup Q_2 = \{1, \ldots, n\}$, оскільки $xa \in D_n$ і тому xa містить $\{1, \ldots, n\}'$. Якщо тепер деякий елемент $b \in R \cap D_{n-2}$ містить блоки $R_1 \cup S_1{}'$ та $R_2 \cup S_2{}'$, то, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $Q_1 \cap S_1 \neq \varnothing$ та $Q_2 \cap S_2 \neq \varnothing$, тоді для довільних $i \in Q_1 \cap S_1$ та $j \in Q_2 \cap S_2$ розглянемо елемент $d \in R$, що містить $\{k\}$, $k \neq i, j$ та $\{i\} \cup F'$, $\{j\} \cup H'$. Тоді, з одного боку, d має містити блок $\{i\} \cup Q_1{}'$, а з іншого – $\{i\} \cup S_1{}'$, бо має бути $bd = b$. Отже, $Q_1 = S_1$ і тому $Q_2 = S_2$. Нехай $q \in R \cap D_{n-1-|Q_2|}$ той елемент, що містить $Q_1 \cup U'$, тоді, оскільки $aq = a$, то $U = Q_1$ і тому R містить $b(Q_1) = q^{|Q_2|}$, тобто $q = b(Q_1)$. Якщо $|Q_1| > 1$ та $|Q_2| > 1$, то для будь-яких s та t, $s \in Q_1$, $t \in Q_2$ елемент r з $R \cap D_1$, що містить $\{s, t\} \cup V'$ такий, що $b(Q_1)r$ містить блок $\{t\} \cup Q_1 \cup W'$, причому $Q_1 \cap W \neq \varnothing$ і $Q_2 \cap W \neq \varnothing$, що неможливо. Отже, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $|Q_2| = 1$. Тоді елемент, що містить блок $Q_2 \cup F'$, містить $Q_2 \cup Q_2'$. Тоді при $n = 2$ $R = R_2$ і при $n = 3$ деяка піднапівгрупа, спряжена до R, належить R_3.

Припустимо, що при $n = 4$ R визначається саме множинами $\{2, 3\}$ та $\{2, 3, 4\}$, тобто $b(2,3) \in R$ та $b(2,3,4) \in R$. Нехай $x \in R \cap R_{b(1,2)}$, $y \in R \cap R_{b(1,3)}$ та $z \in R \cap R_{b(1,4)}$ — однозначно визначені елементи з R, тоді, оскільки елементи $b(1,2)x$, $b(1,2)y$ та $b(1,2)z$ належать $L_{b(1,2,3)}$, то x, y містять блок $\{4, 1'\}$, а z містить блок $\{1, 4, 1'\}$. Якщо $x = \{\{1, 2, 4'\}, \{3, 2', 3'\}, \{4, 1'\}\}$, то $u = \{\{1, 1'\}, \{3, 4, 2', 3'\}, \{2, 4'\}\} \in R$, бо інакше $u' = \{\{1, 1'\}, \{2, 2', 3'\}, \{3, 4, 4'\}\} \in R$ і при цьому $x^2 \neq u'x$ і $x^2 R u'x$. Оскільки тепер ux та $\{\{1, 4, 1'\}, \{2, 2', 3'\}, \{3, 4'\}\}^2$ – різні елементи одного R-класу, то

$$z = \{\{1, 4, 1'\}, \{2, 4'\}, \{3, 2', 3'\}\}.$$

Припустимо тепер, що

$$y = \{\{1, 3, 4'\}, \{2, 2', 3'\}, \{4, 1'\}\},$$

тоді, оскільки y^2 та $\{\{1, 1'\}, \{2, 4, 4'\}, \{3, 2', 3'\}\}y$ – різні елементи одного R-класу, то $v = \{\{1, 1'\}, \{2, 4, 2', 3'\}, \{3, 4'\}\} \in R$ і тоді $z^2 \neq vxu$, $z^2 R vxu$, що неможливо, звідки

$$y = \{\{1, 3, 2', 3'\}, \{2, 4'\}, \{4, 1'\}\}.$$

Тоді, оскільки yz та $\{\{1, 1'\}, \{2, 4, 2', 3'\}, \{3, 4'\}\}z$ – різні елементи одного R-класу, то

$$\{\{1, 1'\}, \{2, 4, 4'\}, \{3, 2', 3'\}\} \in R.$$

Нехай $a \in R \cap R_{a(1)}$, $b \in R \cap R_{a(2)}$, $c \in R \cap R_{a(3)}$, $d \in R \cap R_{a(4)}$. Оскільки za належить $L_{b(1,2,3)}$, то a містить $\{4, 1'\}$. Якщо $a = \{\{1\}, \{1, 2', 3'\}, \{3, 4'\}, \{4, 1'\}\}$, то, розглядаючи a^2 та da, отримаємо, що

$$d = \{\{1, 1'\}, \{2, 2', 3'\}, \{3, 4'\}, \{4\}\},$$

і тоді $dxu \neq xa$, $dxuRxa$, що неможливо. Тому

$$a = \{\{1\}, \{2, 4'\}, \{3, 2', 3'\}, \{4, 1'\}\}.$$

Тоді, оскільки ya та

$$\{\{4\}, \{1, 1'\}, \{2, 2', 3'\}, \{3, 4'\}\}$$

– різні елементи одного R-класу, то

$$d = \{\{4\}, \{1, 1'\}, \{2, 4'\}, \{3, 2', 3'\}\}.$$

Оскільки $b(2,3) \in R$ і $b(2,3)b = b(2,3)$ і $b(2,3)c = b(2,3)$, то

$$b = \{\{1, 1'\}, \{2\}, \{3, 2', 3'\}, \{4, 4'\}\},$$
$$c = \{\{1, 1'\}, \{3\}, \{2, 2', 3'\}, \{4, 4'\}\}.$$

Зрозуміло також, що $a(2,3)b(2,3,4) \in R$, тому $R = R_4$. Якщо ж $x = \{\{1, 2, 2', 3'\}, \{3, 4'\}, \{4, 1'\}\}$, то аналогічно отримаємо, що $R = (23)R_4(23)$. Зауважимо тепер, що R_2, R_4 та будь-який елемент R_3 є R-зрізами C_2, C_4 та C_3 відповідно. Доведемо тепер, що при $n > 4$ R-зрізів даного випадку не існує. Справді, інакше існував би такий R-зріз в C_5, який визначався б, скажімо, множинами $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 4\}$. Нехай при цьому $\{x \in R : \{1, 1'\} \in x\} = R_4(2, 3, 4, 5)$, тоді $\{x \in R : \{2, 2'\} \in x\} = R_4(1, 3, 4, 5)$, але при цьому

$$\{\{1, 3, 5'\}, \{2, 2'\}, \{4, 3', 4'\}, \{5, 1'\}\} \cdot$$
$$\cdot \{\{1, 1'\}, \{2, 5, 2'\}, \{3, 5'\}, \{4, 3', 4'\}\}$$

та

$$\{\{1, 1'\}, \{2, 3, 5'\}, \{4, 3', 4'\}, \{5, 2'\}\} \cdot$$
$$\cdot \{\{1, 5, 1'\}, \{2, 2'\}, \{3, 5'\}, \{4, 3', 4'\}\}$$

– різні елементи з одного R-класу і маємо протиріччя. Залишилось розглянути тепер другий випадок. Тоді $|Q_1| \leq 4$ і позначивши $Q_1 = F$, маємо, що якщо $x \in R$ містить $\{f\} \cup E'$, $f \in F$, то x містить $\{f, f'\}$, $f \in F$. Тоді R має містити як піднапівгрупу R-зріз

$$\{y \in C_n : \{f, f'\} \in y, f \in F\} \cong C_{n-|F|}.$$

Тому можна вважати, що на $\{1, \ldots, n\}$ задано лінійний порядок $\prec$ $m_1, \ldots, m_n$ і R містить $c(i)$ та $d(E)$, $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus F$, $E \subset \{1, \ldots, n\} \setminus F$. Нехай $a \in R \cap R_{c'(G)}$,

$G \cap F \neq \varnothing$. Тоді, оскільки $a(\{1, \ldots, n\} \setminus F) \in R$ і $a(\{1, \ldots, n\} \setminus F)a = a(\{1, \ldots, n\} \setminus F)f$, де $f \in R(F) \subset R$ — той елемент, що належить $D_{|G \cap F|-1}$ і визначається множиною $G \cap F$, то блоки в a та $c'(G)$, що містять множину G, збігаються. Аналогічно до доведення теореми 10, усі інші блоки в a та $c'(G)$ теж збігаються. Тому $a = c'(G)$. Звідси випливає, що $d'(G) \in R \cap R_{d'(G)}$. Отже, в цьому випадку $R = R_c(\prec; F)$. Доведення того, що $R_c(\prec; F)$ є R-зрізом, цілком аналогічне доведенням попередніх.

Теорема 13. *При $n \geq 3$ напівгрупа C_n не містить H-зрізів. Єдиними H-зрізами напівгруп C_1 та C_2 є відповідно C_1 та $\{e\} \cup C_2 \setminus S_2$.*

Доведення. При $n \geq 4$ C_n не має H-зрізів, бо при таких n напівгрупа B_n не має H-зрізів. При $n \leq 2$ кожен H-клас елементів з $C_n \setminus S_n$ містить рівно один елемент. Нехай S — деякий H-зріз напівгрупи C_3. Тоді ідемпотенти $b(1,2)$ та $b(1,2)a(2)$ містяться в S, а тому $x = \{\{1\}, \{2,1'\}, \{2'\}, \{3,3'\}\} \in S$, бо інакше $x' = \{\{1\}, \{2,3'\}, \{2'\}, \{3,1'\}\} \in S$ і $b(1,2)x'$ та $b(1,2)a(2)$ — різні елементи одного H-класу. Аналогічно, $y = \{\{1\}, \{2,2'\}, \{3'\}, \{3,1'\}\} \in S$. Але тоді $b(1,2)xb(2,3)$ та $b(1,2)yb(2,3)$ — різні елементи одного H-класу і маємо протиріччя. Отже, C_3 не має H-зрізів.

1. *Brauer R.* On algebras which are connected with semisimple continuous groups // Ann. of Math.– 1937.– 38, № 4.– P. 857–872.
2. *Mazorchuk V.* On the structure of Brauer Semigroup and its Partial Analogue // Problems in Algebra.– 1998.– V. 13.– P. 29–45.
3. *Changchang Xi.* Partition Algebras are Cellular // Composition Math.– 1999.– 119.– P. 99–109.
4. *Mazorchuk V.* Endomorphisms of B_n, PB_n and C_n // Communications in algebra.– 2002.– 30, № 7.– P. 3489–3513.
5. *Мальцев В.* Системи твірних, ідеали та головні ряди напівгрупи Брауера // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.– 2004.– 2.– P. 59–65.
6. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* L- and R-Cross-Sections in IS_n // Communications in algebra. – 2002.– 31, № 9.– P. 4507–4523.
7. *А. Клиффорд, Г. Престон.* Алгебраическая теория полугрупп // М.: Мир, 1972.– Т. 1.
8. *Cowan D., Reilly N.* Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups // Internat. J. Algebra Comput.– 1995.– 5, № 3.– P. 259–287.
9. *Лаллеман Ж.* Теория полугрупп и комбинаторные применения // М.: Мир, 1984.

V. Maltcev

CROSS-SECTIONS OF GREEN RELATIONS AND RETRACTS OF SEMIGROUPS PB_n AND C_n

A description of double-sided ideals, congruences and retracts, cross-sections of relations R, L, and H of the semigroups PB_n and C_n is given.