Дискусія про спосіб існування математичних об'єктів: нові прочитання класичної проблеми

Ярослав Петік
Інститут філософії імені Г.С. Сковороди (Київ)

В своїй статті «Реальність математичних об'єктів та випадок теорії множин» Деніел Айзааксон [Isaacson 2011, с. 3] звертається до класичної для філософії математики теми про спосіб існування математичних об'єктів, яка відома в метафізиці ще з часів Платона. Століттями філософи та математики сперечалися про те, чи існують математичні об'єкти подібно до того, як існують об'єкти матеріальні, чи вони існують в окремій реальності, чи вони є лише необхідним продуктом людського інтелекту тощо. Втім, Д. Айзааксон цитує дискусію, яка відбулася значно пізніше, а саме переписку великого логіка-математика Готлоба Фреге та його колеги Давида Гільберта.

Г. Фреге видається реалістом щодо цього питання, оскільки стверджує, що єдиний спосіб довести несуперечливість якоїсь формальної системи це продемонструвати об'єкти, що реально існують, і до яких ця математична структура реферує. Типовим випадком такої демонстрації він вважає формальну арифметику. Пізніше такий філософський погляд було покладено в основу семантики теорії моделей.

Несуперечливість це одна з головних властивостей (поряд із повнотою) будь-якої формальної системи (і математичної, і логічної), яка досліджується в математичній логіці та філософії математики.

Д. Гільберт навпаки стверджує, що математика не опікується безпосереднім існуванням структур, які вона описує й доведення властивості несуперечливості формальної системи в достатній мірі свідчить про існування структури, яку вона описує. Таким чином, його позицію слід вважати ближчою до ідеалістичної філософії Платона. Не можна сказати, що цей погляд прямо корелює із секвенціальними численнями, але певні аналогії можна провести. Тобто якщо розвинути цю думку, модель та теорія моделей зовсім не є обов'язковими для існування логічних формальних систем, що в локальному виді реалізовано в секвенціональних численнях.

Цікаво, що подальші результати, такі як теореми про неповноту Курта Гьоделя вдарили більше по позиції Д. Гільберта, оскільки було продемонстровано, що велика кількість формальних математичних систем, на які ми покладаємося, є суперечливими.

Втім, сучасні результати в розвитку математики свідчать навпаки проти Г. Фреге. Математика стає все більш абстрактною і все більше концентрується на дослідженні інваріантних структур, яким дуже складно віднайти реальні денотати в матеріальному світі. Крім того, з'явилися проекти віднайдення основ математики, які є альтернативними теорії множин, такі як теорія категорій, а, отже, уже немає єдиної теорії множин, під яку можна намагатися редукувати всі наявні математичні системи.

Вілфірд Ходжес стверджує [Hodges, 2004], що природа суперечки лежить у площині філософії, а саме в понятті концептуального аналізу, який Г. Фреге застосовує щодо математичних понять. Г. Фреге оперує поняттям думки, яка є об'єктивно істинною або хибною, і множина яких у достатній мірі описує математику. Інваріантні структури важко звести до таких «думок». Схожої думки щодо позиції Г. Фреге дотримується й Патрісія Бланшет [Blanchette, 1996]. Г. Фреге спирається на логіко-концептуальний аналіз найбільш примітивних понять, таких як «натуральне число», і тільки після того, як повністю їх визначає, починає будувати доведення більш складних математичних істин.

Видається, що в сучасній математиці не можна остаточно стверджувати, що та чи інша позиція є більш адекватною. Як уже згадувалося, сучасні розробки свідчать на користь Д. Гільберта, але водночас математичну науку дуже важко уявити без теорії моделей. Наявною є проблема примирення концепції інваріантних структур та конкретних моделей, що належить як до математики, так і до філософії.

З погляду філософії ми маємо справу з проблемою референції інваріантних математичних структур. До чого насправді реферують ці структури? Ці гіпотетичні об'єкти належать до матеріального світу чи до світу ідей чи до світу концептів на кшталт запропонованого Карлом Поппером? Розробкою цього питання філософія займається з часів Платона. З погляду формальних систем ми маємо проблему співвідношення числень із різними моделями. Чи можна взагалі порівнювати такі системи, і які наслідки несе відповідь на це запитання?

Важко переоцінити важливість цієї дискусії для філософії математики. Втім, цікавою вона є і з погляду історії філософії також. Суперечка, яка відбулася на межі XIX та XX століть містить у собі як минулу історичну філософську традицію (питання про ідеалізм), так і майбутні гострі теми для дискусій (згадана теорія категорій). Д. Айзааксон та інші згадані сучасні дослідники в основному порівнюють позиції Г. Фреге та Д. Гільберта, а потім проектують їхні ідеї на подальший розвиток математики та філософії. Цікавою деталлю, є те, що Д. Айзааксон згадує теорію категорій, тобто реальну математичну формальну систему, як аргумент на користь позиції в межах філософії математики, а не самої математики.

Без сумнівів, відлуння дискусії між двома великими математиками-філософами ще довго буде чутно у філософії математики та історії філософії загалом.

Література:

1) Blanchette P. Frege and Hilbert on Consistency / Blanchette Patricia // Journal of Philosophy. – 1996. – Vol. 7. – P. 317-336.

2) Dummett M. Frege on the Consistency of Mathematical Theories / Dummett Michael // Studien zu Frege. – Stuttgart, 1975. – P. 229-242.

3) Hodges W. The Importance and Neglect of Conceptual Analysis / Hodges Wilfrid // First-Order Logic Revisited. – Berlin: Logos Verlag, 2004. – P. 129-153.

4) Isaacson D. The Reality of Mathematics and the Case of Set Theory / Isaacson Daniel // Truth, Reference and realism. – CEU Press, 2011. – 278 p.

Осмислення міста в європейській філософії: від «Граду Божого» Августина Блаженного до «міста ненависті» Жана Бодріяра

Ольга Петренко
Національний Університет «Києво-Могилянська академія» (Київ)