УДК 533.9

А. Г. Загородній, І. П. Голод

ІНТЕҐРОВНА МОДЕЛЬ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛЬФЕНІВСЬКИХ ХВИЛЬ У ПЛАЗМІ

Викладено алгебро-геометричну схему побудови розв'язків та досліджено гамільтонову структуру наближених рівнянь магнітної гідродинаміки, що описують поширення нелінійних хвиль Альфена у плазмі. Знайдено солітонні та однозонні періодичні розв'язки.

1. ВСТУП

Плазма, а особливо замагнічена, є унікальним нелінійним середовищем, у якому поширюються найрізноманітніші збудження і виникає багато явищ, які є типовими для інших нелінійних суцільних середовищ (самофокусування хвиль, самостискування хвильових пакетів, генерація нових гармонік, утворення солітонів, вихорів та ударних хвиль), а також інших явищ, в яких плазма проявляє специфічні особливості як система частинок з кулонівською взаємодією. Виникнення та поширення хвиль у плазмі відносять до колективних явищ у багаточастинковій системі. Масштаб цих явищ (просторовий та часовий) є набагато більший, ніж мікроскопічний масштаб, тому природним є опис плазми в гідродинамічному наближенні [1, 2].

Розрізняють два типи нелінійних колективних явищ у плазмі — ламінарні й турбулентні. Для опису явищ першого типу можна запропонувати нелінійні рівняння, які мають гладку лінійну границю, або самі ці рівняння можна проінтеґрувати в класі аналітичних функцій. Явища турбулентності вимагають інших математичних засобів, які на сьогодні ще недостатньо опрацьовані.

Серед нелінійних явищ першого типу, які досить добре вивчені, і для яких існує адекватна математична модель, слід назвати теорію розповсюдження іонно-звукових хвиль у плазмі без зіткнень. В цій теорії важливу роль грає рівняння Кадомцева — Петвіашвілі [3]

$$\partial_z\left(\partial_t\Phi+\Phi\partial_z\Phi+\partial_z^3\Phi\right)=\sigma\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)\Phi, \qquad (1)$$

яке у випадку нехтування залежністю потенціалу Φ (x, y, z, t) від однієї з просторових змінних є інтеґровним рівнянням і добре описує нелінійні іонно-звукові хвилі у двох вимірах. Якщо ж знехтувати залежністю від обох змінних x та y, то рівняння (1) співпаде з добре відомим рівнянням Кортевега-де Вріза (КдВ):

$$\partial_t\Phi+\Phi\partial_z\Phi+\partial_z^3\Phi=0. \qquad (2)$$

При дослідженні цього рівняння вперше було виявлено солітонні розв'язки. Саме в застосуванні до плазми М. Крускал та Н. Забузький [4] моделювали процес розсіяння двох солітонів рівняння КдВ і побачили, що вони розсіюються без зміни форми. Ця робота послужила поштовхом до відкриття методу оберненої задачі.

Слід зазначити, що рівняння КдВ, крім солітонних, має ще й періодичні розв'язки. При малих амплітудах вони переходять у гармонійні періодичні хвилі. Таким чином можна побудувати однопараметричну сім'ю розв'язків, яка починається лінійною гармонійною хвилею і закінчується солітоном [5].

В нашій роботі ми будемо розглядати плазму, яка знаходиться в магнітному полі. В цьому випадку виникає складна картина взаємодії плазми і поля, адже плазма є провідним середовищем і під впливом магнітного поля в ній індукуються електричні поля і струми. Ці струми самі в свою чергу можуть впливати на магнітне поле. Гідродинамічні ефекти та ефекти, пов'язані з впливом магнітного поля, об'єднані в науці під назвою магнітна гідродинаміка. Магнітна гідродинаміка була сформульована в 40-х роках XX ст. Х. Альфеном (H. Alfvén), який показав її велике значення для астрофізики і передбачив теоретично новий вид хвиль, характерних для високопровідного середовища, яке знаходиться в магнітному полі. Це так звані МГД або Альфенівські хвилі, які ми й будемо розглядати в цій роботі.

В загальному вигляді рівняння магнітної гідродинаміки є дуже складними, і розв'язати їх практично неможливо. Проте, здійснивши ряд наближень, можна отримати модельні рівняння, які досить добре описують конкретні типи процесів у плазмі. Так, в роботах [7, 8] було отримано одне з таких модельних рівнянь для опису поширення Альфенівських хвиль. В роботі [9] було показано, що це рівняння належить до класу інтеґровних; до нього можна застосувати метод оберненої задачі розсіяння й одержати багатосолітонні розв'язки. Загальні підходи до побудови періодичних (квазіперіодичних) розв'язків було розвинено в роботі [10], проте явних формул там не представлено.

Метою нашої роботи є розвиток методів інтеґрування нелінійних модельних рівнянь теорії плазми, котрі б давали можливість будувати розв'язки в широкому класі початкових умов. Наша увага зосереджена на рівнянні, яке отримано в роботах [7, 8] для опису поперечних складових магнітного поля в нелінійній Альфенівській хвилі, і має назву нелінійного рівняння Шредінгера з похідною (DNLS-рівняння). Для цього рівняння ми розвиваємо теорію "скінченнозонного" інтеґрування і в явному вигляді будуємо солітонні та "однозонні" періодичні розв'язки.

2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

2.1. Загальні рівняння магнітної гідродинаміки

Предметом нашого розгляду є холодна однократно-іонізована квазінейтральна двокомпонентна плазма. В наближенні дворідинної гідродинаміки плазма розглядається як система двох взаємопроникних невзаємодіючих рідин (газів). При нехтуванні струмом зміщення та розділенням заряду в рівняннях Максвелла, рух такої системи може бути описаний системою рівнянь [1, 2]:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\nabla\cdot(n_e\boldsymbol{v}_e)=0 \qquad (2.1)$$

$$mn_e\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_e\nabla\right)\boldsymbol{v}_e=-en_e\boldsymbol{E}-\frac{e}{c}n_e[\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}] \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot(n_i\boldsymbol{v}_i)=0 \qquad (2.3)$$

$$Mn_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\nabla\right)\boldsymbol{v}_i=en_i\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}n_i[\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}] \qquad (2.4)$$

$$[\nabla\times\boldsymbol{B}]=\frac{4\pi e}{c}n(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_e) \qquad (2.5)$$

$$[\nabla\times\boldsymbol{E}]+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0. \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.1) і (2.2) є рівняннями неперервності для електронної компоненти і рівнянням руху відповідно; m – маса електрона, n_e — концентрація електронів, $\boldsymbol{v}_e$ — швидкість електронів, $\boldsymbol{E}$ — вектор напруженості електричного поля, $\boldsymbol{B}$ — вектор магнітної індукції. Рівняння (2.3) і (2.4) — відповідні рівняння для іонної складової; в них M — маса іонів, n_i — концентрація іонів, $\boldsymbol{v}_i$ — іонна швидкість.

Виключимо з цих рівнянь поля $\boldsymbol{v}_e$ та $\boldsymbol{E}$. З рівняння (2.5) маємо:

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_i-\frac{c}{4\pi e}n^{-1}[\nabla\times\boldsymbol{B}].$$

Підставивши цей вираз у рівняння (2.2), отримаємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=&-\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}]+\frac{1}{4\pi e}n^{-1}[[\nabla\times\boldsymbol{B}]\times\boldsymbol{B}]-\frac{m}{e}\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}+\\&+\frac{mc}{4\pi e^2}\left[\{(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\}\boldsymbol{v}_i+\frac{d}{dt}(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B})\right]-\\&-\frac{mc^2}{16\pi^2e^3}\{(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\}(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}),\end{aligned} \qquad (2.7)$$

де $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla)$ — диференціювання вздовж іонного руху.

Після цього рівняння для іонної швидкості та магнітного поля набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=&\frac{1}{4\pi}(M+m)^{-1}\frac{1}{n}[[\nabla\times\boldsymbol{B}]\times\boldsymbol{B}]+\\&+\frac{mc}{4\pi e}(M+m)^{-1}\left[\{(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\}\boldsymbol{v}_i+\frac{d}{dt}(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B})\right]-\\&-\frac{mc^2}{(4\pi e)^2}(M+m)^{-1}\frac{1}{n}\{[\nabla\times\boldsymbol{B}]\cdot\nabla\}(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}).\end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-[\nabla\times[\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}]]+\frac{mc}{e}\left[\nabla\times\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right]=0. \qquad (2.9)$$

Перейдемо до безрозмірних величин за такими співвідношеннями [7]:

$$\boldsymbol{v}_i=V\overline{\boldsymbol{v}}_i,\ \boldsymbol{B}=B\overline{\boldsymbol{B}},\ \nabla=L^{-1}\overline{\nabla},\ \frac{\partial}{\partial t}=\omega\frac{\partial}{\partial\overline{t}},\ n=N\overline{n},$$

де V, B і N — є характерними значеннями $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{B}$ і n відповідно, L — характерна довжина, на якій ці змінні змінюються несуттєво, ω — характерна частота, подана як $\left(\frac{V}{L}\right)$. Тоді рівняння (2.8) набуває вигляду

$$\begin{aligned}A^2\frac{d\overline{\boldsymbol{v}}_i}{d\overline{t}}=&\frac{1}{\overline{n}}[[\overline{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}}]\times\overline{\boldsymbol{B}}]+\\&+R_e^{-1}\left[\{(\overline{n}^{-1}\overline{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}})\cdot\overline{\nabla}\}\overline{v}_i+\frac{d}{d\overline{t}}(\overline{n}^{-1}\overline{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}})\right]-\\&-A^{-2}R_{ie}^{-2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{1}{\overline{n}}\{[\overline{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}}]\cdot\overline{\nabla}\}(\overline{n}^{-1}\overline{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}}),\end{aligned} \qquad (2.10)$$

де $A=\frac{V}{\{B/\sqrt{4\pi(M+m)N}\}}$ є характерним числом Альфена, $R_e\equiv\omega_{ec}/\omega$ — відношення електронної циклотронної частоти ω_{ec} до характерної частоти ω, яке буде називатись електронним числом Рейнольдса. Подібним чином, відношення іонної циклотронної частоти ω_{ic} до характерної частоти буде називатись iонним числом Рейнольдса i позначатиметься R_i.

$$R_i \equiv \omega_{ic}/\omega, \tag{2.11}$$

R_{ie} — є вiдношення геометричного середнього електронної та iонної циклотронної частоти до характерної частоти i називається *гiбридним* числом Рейнольдса

$$R_{ie} = \frac{(\omega_{ic}\omega_{ec})^{1/2}}{\omega} = (R_i R_e)^{1/2}. \tag{2.12}$$

Вiдзначимо, що коефiцiєнт бiля останнього доданку в рiвняннi (2.10) не залежить вiд $\boldsymbol{B}$ i може бути також представлений як

$$A^{-2}R_{ie}^{-2}\left(1+\frac{m}{M}\right) = (L_D/L)^2(c/V)^2, \tag{2.13}$$

де $L_D = \sqrt{(mV^2)/(4\pi Ne^2)}$ — ефективна довжина Дебая.

Остаточно система основних рiвнянь набуває вигляду:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\boldsymbol{v}_i) = 0, \tag{2.14}$$

$$A^2\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} - n^{-1}[[\nabla\times\boldsymbol{B}]\times\boldsymbol{B}] = R_e^{-1}\left[(d/dt)(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}) + \{(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\}\boldsymbol{v}_i\right] -$$

$$-A^{-2}R_{ie}^{-2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\{n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}\cdot\nabla\}(n^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}), \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - [\nabla\times[\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}]] = -R_i^{-1}\left[\nabla\times\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right], \tag{2.16}$$

в яких риска над безрозмiрними величинами опущена. В границi $R_i\to\infty$ та $R_e\to\infty$, система рiвнянь переходить в систему рiвнянь iдеальної магнiтогiдродинамiки, де знехтувано тиском.

2.2. Одновимiрне поширення Альфенiвських хвиль

При розглядi одновимiрного поширення хвиль, рiвняння (2.14) — (2.16) набувають вигляду

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0, \tag{2.17}$$

$$\frac{du}{dt} + n^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{B_y^2+B_z^2}{2} = 0, \tag{2.18}$$

$$\frac{dv}{dt} - n^{-1}B_x\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\omega_{ec}^{-1}\frac{d}{dt}\left(n^{-1}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right), \tag{2.19}$$

$$\frac{dw}{dt} - n^{-1}B_x\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\omega_{ec}^{-1}\frac{d}{dt}\left(n^{-1}\frac{\partial B_y}{\partial x}\right), \tag{2.20}$$

$$\frac{dB_y}{dt} - B_x\frac{\partial v}{\partial x} + B_y\frac{\partial u}{\partial x} = \omega_{ic}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dt}\right), \tag{2.21}$$

$$\frac{dB_y}{dt} - B_x\frac{\partial w}{\partial x} + B_z\frac{\partial u}{\partial x} = -\omega_{ic}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv}{dt}\right), \tag{2.22}$$

де $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}$, а B, x, t та n нормованi, вiдповiдно на постiйне магнiтне поле B_0, характерну довжину L, обернену характерну частоту ω_0 та середню концентрацiю n_0. Електронна та iонна циклотроннi частоти також нормованi на ω_0. Частота ω_0 задається як V_A/L, де V_A — швидкiсть розповсюдження Альфенiвської хвилi — визначена спiввiдношенням $B_0/[4\pi n_0(m+M)]^{\frac{1}{2}}$. В наведених рiвняннях u, v та w є вiдповiдно x, y i z-компонентами iонної швидкостi, нормованої на V_A. Рiвняння (2.17) — (2.22), одержанi в роботi [7], є основою нашого подальшого розгляду.

Зосередимо нашу увагу на поширеннi Альфенiвських хвиль вздовж постiйного магнiтного поля B_0 в однорiднiй плазмi. Це значить, що в рiвняннях (2.19) — (2.22) слiд покласти $B_x = 1$.

Лiнiйне дисперсiйне спiввiдношення для Альфенiвських хвиль нескiнченно малої амплiтуди, яке випливає з рiвнянь (2.17) — (2.22) має вигляд:

$$\frac{\omega(k)}{k} = 1 \mp \mu k, \tag{2.23}$$

де

$$\mu = \frac{1}{2}(\omega_{ic}^{-1} - \omega_{ec}^{-1}), \tag{2.24}$$

$\omega(k)$ та k — частота та хвильове число, якi нормованi, вiдповiдно, на ω_0 i L^{-1}. В рiвняннi (2.23) верхнiй та нижнiй знаки вiдповiдають лiвим та правим Альфенiвським хвилям. Взявши до уваги лiнiйне дисперсiйне спiввiдношення, введемо новi змiннi за такими масштабними перетвореннями

$$\xi = \varepsilon(x-t), \qquad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{2.25}$$

В рiвняннях (2.17) — (2.22) виконаємо розклад за малим додатнiм параметром ε. Поблизу однорiдного рiвноважного стану розклади динамiчних змiнних мають вигляд [8]:

$$n = 1+\tilde{n} = 1+\varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \ldots, \tag{2.26}$$

$$u = \tilde{u} = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \ldots, \tag{2.27}$$

$$v = \tilde{v} = \varepsilon^{1/2}(v^{(1)} + \varepsilon v^{(2)} + \ldots), \tag{2.28}$$

$$w = \tilde{w} = \varepsilon^{1/2}(w^{(1)} + \varepsilon w^{(2)} + \ldots), \tag{2.29}$$

$$B_y = \tilde{B}_y = \varepsilon^{1/2}(B_y^{(1)} + \varepsilon B_y^{(2)} + \ldots), \tag{2.30}$$

$$B_z = \tilde{B}_z = \varepsilon^{1/2}(B_z^{(1)} + \varepsilon B_z^{(2)} + \ldots). \tag{2.31}$$

Вважатимемо, що плазма знаходиться в рiвновазi при $\xi\to\pm\infty$; тодi $n^{(i)}$, $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$, $B_y^{(i)}$, $B_z^{(i)}$, прямують до нуля, коли ξ прямує до нескiнченностi.

Пiсля пiдстановки розкладiв в основнi рiвняння i прирiвнювання членiв при однакових степенях ε одержуємо:

$$v^{(1)} = -B_y^{(1)}, \tag{2.32}$$

$$w^{(1)} = -B_z^{(1)}, \tag{2.33}$$

$$n^{(1)} = u^{(1)}, \tag{2.34}$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{2}(B_y^{(1)2} + B_z^{(1)2}). \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial B_y^{(2)}}{\partial \xi}=\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau}-\omega_{ec}^{-1}\frac{\partial^2 B_z^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial B_z^{(2)}}{\partial \xi}=\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \tau}+\omega_{ec}^{-1}\frac{\partial^2 B_y^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial B_y^{(2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi}=\frac{\partial B_y^{(1)}}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \xi}(u^{(1)}B_y^{(1)})+\omega_{ic}^{-1}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial B_z^{(2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \xi}=\frac{\partial B_z^{(1)}}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \xi}(u^{(1)}B_z^{(1)})-\omega_{ic}^{-1}\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2}. \quad (2.39)$$

Підставляючи рівняння (2.32) — (2.35) в рівняння (2.36) — (2.39) ми отримуємо рівняння відносно ξ і t. Повертаючись у рівняннях до попередніх просторових і часових координат x і t, маємо:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[B_y(4+B_y^2+B_z^2)\right]-\mu\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}=0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[B_z(4+B_y^2+B_z^2)\right]-\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}=0, \quad (2.41)$$

де використано співвідношення $B_y\approx\varepsilon^{\frac{1}{2}}B_y^{(1)}$ та $B_z\approx\varepsilon^{\frac{1}{2}}B_z^{(1)}$ з рівнянь (2.30) і (2.31). Рівняння (2.40) та (2.41) разом з рівняннями (2.32) — (2.36) є основними рівняннями для розглядуваних нелінійних Альфенівських хвиль. Ввівши позначення:

$$\beta=B_y\pm iB_z,\quad u_0=\frac{\partial^2\omega(k)}{\partial k^2}=\mp 2\mu,$$

де остання рівність випливає з лінійного закону дисперсії. Перепишемо рівняння (2.40) та (2.41) у вигляді

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(4+|\beta|^2\right)\right]-\frac{iu_0}{2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}=0. \quad (2.42)$$

Це рівняння і буде предметом нашого подальшого розгляду.

3. DNLS-РІВНЯННЯ ЯК ІНТЕҐРОВНА ГАМІЛЬТОНОВА СИСТЕМА

В попередньому параграфі одержано нелінійне рівняння (2.42), яке описує еволюцію поперечних складових магнітного поля в Альфенівській хвилі, яка поширюється в напрямку осі ox. Зауважимо, що конкретні значення коефіцієнтів цього рівняння не мають суттєвого значення, оскільки масштабними перетвореннями поля $\beta\to k_1\beta$ та координати $x\to k_2 x$ можна зробити їх якими завгодно. Якщо покласти $k_1=u_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}$, $k_2=-\sqrt{u_0}$, то рівняння (2.45) набуде вигляду:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{i}{2}\left[\beta_x+i\left(\frac{2}{\sqrt{u_0}}-|\beta|^2\right)\beta\right]_x. \quad (3.1)$$

Це рівняння подібне до нелінійного рівняння Шредінгера і має назву нелінійного рівняння Шредінгера з похідною (DNLS-рівняння). Воно виявляється інтеґровною гамільтоновою системою. Цей факт було встановлено в роботі [9].

Відправною точкою досліджень інтеґровності та побудови солітонних розв'язків було представлення рівняння (3.1) у вигляді умови сумісності пари лінійних систем рівнянь, які залежать від довільного комплексного параметра λ.

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i\lambda^2 & \beta\lambda\\ \beta^*\lambda & i\lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} \quad (3.2а)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i(2\lambda^4+\lambda^2|\beta|^2) & 2\lambda^3\beta+\zeta(|\beta|^2\beta+i\beta_x^*)\\ 2\lambda^3\beta^*+\zeta(|\beta|^2\beta^*-i\beta_x^*) & i(2\lambda^4+\lambda^2|\beta|^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} \quad (3.2б)$$

Умова сумісності рівнянь (3.2) має вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial x}+[L,A]=0, \quad (3.3)$$

де L та A — матриці в правих частинах відповідно першої та другої системи рівнянь в (3.2), $[L,A]=LA-AL$ — комутатор.

Надалі функції $\beta(x,t)$ та $\beta^*(x,t)\equiv\gamma(x,t)$ будемо розглядати як незалежні. Тоді замість рівняння (3.1) матимемо систему двох рівнянь

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{i}{2}\left[\beta_x+i\left(c\beta-\beta^2\gamma\right)\right]_x,$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-\frac{i}{2}\left[\gamma_x-i\left(c\gamma-\gamma^2\beta\right)\right]_x, \quad (3.4)$$

які можна подати у вигляді гамільтонової системи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\delta H}{\delta\beta}\\ \frac{\delta H}{\delta\gamma}\end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

де $H=-\frac{i}{2}\int(\beta\gamma_x+\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2-c\beta\gamma)dx$ — гамільтоніан, c — довільна стала.

Гамільтоновість системи (3.4) вимагає деяких пояснень. Перш за все, це не є канонічна гамільтонова структура, оскільки не має пари канонічно спряжених змінних. Проте в класі нескінченно-диференційовних швидкоспадних або періодичних функцій $\beta(x),\gamma(x)$ добре означений матричний оператор

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & \partial/\partial x\\ \partial/\partial x & 0\end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

який є кососиметричним у вказаному класі. Тому на множині функціоналів від функцій β (x), γ (x) означена дужка Пуасона:

$$\{F,G\}=\int\left\langle\left(\frac{\delta F}{\delta\beta},\frac{\delta F}{\delta\gamma}\right),\Omega\left(\frac{\delta G}{\delta\beta},\frac{\delta G}{\delta\gamma}\right)^T\right\rangle dx, \quad (3.7)$$

яка задовільняє тотожності Якобі.

Будемо розвивати гамільтонів формалізм у фазовому просторі, який складається з періодичних функцій $\beta(x+2l)=\beta(x)$, $\gamma(x+2l)=\gamma(x)$ з періодом $2l$. Випадок швидкоспадних початкових умов розглядатимемо як граничний при $l\to\infty$. Рівняння нульової кривизни (3.3) дають можливість збудувати нескінченну низку інтеґралів руху для системи (3.5) і довести їх попарну комутативність стосовно дужки (3.7). Вибір інтеґралів є неоднозначним. Найчастіше на роль останніх обирають коефіцієнти за ступенями параметра λ^{-2} діагональних матричних елементів матриці монодромії рівняння (3.2а). Матриця монодромії $T_l(\lambda)=T(l,-l,\lambda)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial t}T_l(\lambda,t)=\left[A(l,t,\lambda),T_l(\lambda,t)\right]. \tag{3.8}$$

Звідси легко бачити, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{tr}T_l(\lambda,t)=0, \tag{3.9}$$

тобто слід матриці монодромії при кожному λ є інтеґралом руху [11].

Матричні елементи матриці $L(x,\lambda)$ залежать від λ поліноміально (квадратично – діагональні матричні елементи, лінійно – антидіагональні). З рівняння (3.8) тоді випливає, що матричні елементи матриці переходу (а також матриці монодромії) є цілими функціями від λ. Зокрема, діагональні матричні елементи є цілими аналітичними функціями від x^2. Коефіцієнти розкладу діагональних матричних елементів за степенями $(\lambda^{-2})^n$ в околі нескінченності дають нескінченну послідовність інтеґралів руху. Перші два члени цієї послідовності

$$H_1=\int\gamma\beta\,dx,\quad H_2=-\frac{i}{2}\int(\beta\gamma_x+\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2)dx\,.$$

Обчислення вищих інтеґралів в рамках викладеної схеми є досить громіздким. В наступному параграфі буде розвинений інший підхід.

4. СКІНЧЕННОЗОННЕ ІНТЕҐРУВАННЯ DNLS-РІВНЯННЯ

1. Відомо, що метод оберненої задачі розсіяння дає явний розв’язок задачі Коші лише для певного класу початкових умов. Наприклад, для рівняння Кортевега-де Вріза такими початковими умовами є потенціали $U(x)$ стаціонарного рівняння Шредінгера

$$\left[-\partial_x^2+U(x)\right]\Psi=E\Psi, \tag{4.1}$$

для яких спектр лінійної задачі (4.1) має скінченне число ізольованих власних значень, а задача розсіювання на потенціалі $U(x)$ дає нульовий коефіцієнт відбиття. Такі початкові умови дають N-солітонні розв’язки рівняння КдВ.

Розв’язуючи задачу Коші для рівняння КдВ в класі періодичних початкових умов, С. П. Новіков в роботі [12] ввів поняття “скінченнозонних” розв’язків (або скінченнозонних початкових умов). Він зауважив, що для кожного гамільтонового рівняння вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\Omega\frac{\delta H[U]}{\delta U(x)} \tag{4.2}$$

при наявності певної кількості інтеґралів руху $H_1, H_2, \ldots, H_N$ у функціональному фазовому просторі, до якого належать допустимі початкові умови $U(x)$, існує інваріантний (стосовно гамільтонового потоку (4.2)) підпростір, який описується варіаційним рівнянням

$$\frac{\delta}{\delta U}\sum_{i=0}^{N}C_iH_i[U]=0\,. \tag{4.3}$$

Якщо інтеґралів $H_i[U,U_x,\ldots]$ нескінченно багато і вони попарно комутують, то число N у рівнянні (4.3) можна необмежено збільшувати. Новіков також показав, що для періодичних чи квазіперіодичних потенціалів $U(x)$, які є розв’язками варіаційної задачі (4.3), спектр оператора Шредінгера (4.1) має скінченне число дозволених зон. Доведено також і обернене твердження. Звідти пішов термін скінченнозонні початкові умови, скінченнозонні розв’язки, а вся теорія побудови таких розв’язків дістала назву теорії скінченнозонного інтеґрування.

Очевидно, що солітонні розв’язки є частковим випадком скінченнозонних. Перехід до солітонів означає стягування дозволених зон в спектрі оператора Шредінгера (4.1) до точок, або, що те саме, прямування періодів чи квазіперіодів функцій $U(x)$ до нескінченності.

Важливим результатом С. П. Новікова було доведення того факту, що рівняння (4.3) є Лагранжевою формою деякої канонічної скінченновимірної гамільтонової системи, яка є інтеґровною за Ліувіллем. Тобто система (4.3) має свій набір стаціонарних інтеґралів $h_1, h_2 \ldots h_N$, які комутують стосовно канонічної дужки Пуассона, є функціонально незалежними і тому забезпечують повну інтеґровність системи (4.3). Спільна поверхня рівня інтеґралів $h_1, h_2 \ldots h_N$ дифеоморфна (гладко еквівалентна) алгебраїчному тору і тому розв’язки системи (4.3) описуються в термінах θ-функцій від N-арґументів.

Інший підхід до опису скінченнозонних початкових умов було запропоновано в роботах [13, 14]. Було помічено, що рівняння типу (4.3) зручніше писати відразу в гамільтоновій формі, причому природною гамільтоновою структурою для них є неканонічна гамільтонова структура Лі — Пуассона. Записані в такій формі скінченнозонні рівняння мають вигляд рівнянь Ейлера руху “твердого тіла” у багатовимірному просторі. Фазовий простір такої неканонічної гамільтонової системи є орбітою коприєднаної дії деякої нескінченновимірної алгебри Лі, а необхідний для інтеґрування набір інтеґралів в інволюції одержується із функцій Казіміра цієї алгебри. Нова точка зору виявила теоретико-групову природу інтеґровності рівняння (4.3) і дає змогу суттєво узагальнити теорію скінченнозонного інтеґрування.

2. В цьому пункті ми коротко викладемо схему побудови інтеґровних гамільтонових систем на орбітах алгебри формальних рядів Лорана з коефіцієнтами в простій алгебрі $sl(2)$.

Нехай $g \equiv sl(2)$ – алгебра комплексних матриць 2×2 з нульовим слідом

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in g\,.$$

Нехай $\tilde{g}$ — алгебра формальних рядів Лорана з коефіцієнтами в g, тобто

$$A=\sum_{i=-\infty}^{N}\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & -\alpha_i \end{pmatrix}\lambda^i=\sum_{i=-\infty}^{N}A_i\lambda^i\in\tilde{g}\qquad A_i\in g\,.$$

Більш точно, елементами алгебри $\tilde{g}$ вважатимемо матричнозначні ряди вигляду

$$A=\sum_n\begin{pmatrix} \alpha_{2n} & 0 \\ 0 & -\alpha_{2n} \end{pmatrix}\lambda^{2n}+\sum_n\begin{pmatrix} 0 & \beta_{2n+1} \\ \gamma_{2n+1} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{2n+1}.$$

Очевидно, що така підмножина є замкнутою стосовно операції комутування

$$[A,B]=\sum_{i,j}[A_i,B_j]\lambda^{i+j}\,,$$

де $[A_i,B_j]$ – звичайний комутатор в g.

Розіб’ємо алгебру $\tilde{g}$ в пряму суму двох підалгебр

$$\tilde{g}=\tilde{g}_+\oplus\tilde{g}_-\,,\quad \tilde{g}_+=\sum_{i=0}^{\infty}A_i\lambda^i\,,\quad \tilde{g}_-=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\lambda^{-i}\,.$$

Означимо на $\tilde{g}$ дві ad-інваріантні білінійні форми (два скалярні добутки, або просто дві дужки).

$$\langle A,B\rangle_1=\frac{1}{2}\sum_i \mathrm{Tr}\,A_iB_{-i}\,,\quad \langle A,B\rangle_2=\frac{1}{2}\sum_i \mathrm{Tr}\,A_iB_{2N+2-i}\,,\qquad (4.4)$$

де N — довільне ціле додатне число.

Легко бачити, що стосовно першої дужки підалгебри $\tilde{g}_+$ та $\tilde{g}_-$ є взаємно спряженими (взаємно дуальними). Стосовно другої дужки спряженим простором до підалгебри $\tilde{g}_+$ буде простір

$$(\tilde{g}_+)^*=\tilde{g}_-\oplus M^N\,,$$

де

$$M^N=\left\{\hat{\mu}=\sum_{n=0}^{N}\begin{pmatrix} \alpha_{2n} & 0 \\ 0 & -\alpha_{2n} \end{pmatrix}\lambda^{2n+2}+\sum_{n=0}^{N}\begin{pmatrix} 0 & \beta_{2n+1} \\ \gamma_{2n+1} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{2n+1}\right\}.\qquad (4.5)$$

Підпростір M^N, якщо його розглядати як підпростір функціоналів на $\tilde{g}_+$ або $\tilde{g}_-$ залишається інваріантним відносно коприєднаної дії обох алгебр $\tilde{g}_+$ та $\tilde{g}_-$. Нагадаємо, що коприєднана дія в матричних алгебрах лише знаком відрізняється від приєднаної і означається формулою

$$\mathrm{ad}^*_X\cdot\hat{\mu}=[\hat{\mu},X^*]\,,\quad X^*\in\tilde{g}_-\ \text{або}\ \tilde{g}_+\,.\qquad (4.6)$$

Очевидно, що при комутуванні об’єкта $\hat{\mu}$ з матричним рядом X, в якому є довільні від’ємні степені параметра λ, у комутаторі $[\hat{\mu},X]$ появляться доданки з від’ємними степенями λ. Але з точки зору першої дужки – це нульові функціонали. Так само можна сказати про цей комутатор, якщо $X\in\tilde{g}_+$. Тоді доданки зі степенями, більшими за $2N+2$ є нульовими функціоналами для другої дужки.

Простір M^N будемо інтерпретувати як фазовий (поки що комплексний) простір деяких гамільтонових систем, що будуть побудовані нижче. Умови дійсності також будуть обговорені. Означимо на M^N дві дужки Лі — Пуассона

$$\{f_1,f_2\}_1\equiv\left\langle\hat{\mu},\left[X_i^{-s},X_j^{-l}\right]\right\rangle_1\frac{\partial f_1}{\partial\mu_i^s}\frac{\partial f_2}{\partial\mu_j^1}\,,\qquad (4.7)$$

$$\{f_1,f_2\}_2\equiv\left\langle\hat{\mu},\left[X_i^{2N+2-}\,,\ {}_j^{2N+2-}\right]\right\rangle_{21}\frac{\partial f}{\partial\mu_{t\,1}^{s}}\frac{\partial f}{\partial\mu_j}\,,\qquad (4.8)$$

де ${}_i^l=X_i\lambda^l$, X_i — базисні елементи в алгебрі g,

$${}_0=\begin{pmatrix} 1/ & \\ & -1/2 \end{pmatrix},\quad {}_+=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad {}_-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mu_i^s=\langle\hat{\mu},X_i^s\rangle_1=(\alpha_s,\beta_{s+1},\gamma_{s+1})$$

M^N, ^{N} $3\,N+1\ +1$. Дужки $\{f_1,f_2\}_1$ та $\{f_1,f_2\}_2$ – вироджені і неканонічні. Розглянемо ad-інваріантну функцію

$$\mathrm{I}(\hat{\mu}(\lambda))=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{\mu}^2(\lambda))\quad \alpha\ (\lambda)\quad \beta(\lambda)\gamma(\lambda)$$

на просторі M^N і розкладемо її в скінченний ряд за степенями λ. Будова матриці ( ) така, що в цьому ряді будуть лише парні степені параметра λ

$$\mathrm{I}(\hat{\mu}(\lambda))\quad h_0(\mu)\quad \lambda^2h_2+\ldots+\lambda^{4N+4}h_{4N+4}\,.$$

Легко обрахувати, що

$$
\begin{aligned}
&h_0 = \alpha_0^2, \\
&h_2 = 2\alpha_0\alpha_2 + \beta_1\gamma_1, \qquad (4.9)\\
&h_4 = 2\alpha_0\alpha_4 + \alpha_2^2 + \beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3, \\
&h_{4N} = 2\alpha_{2N-2}\alpha_{2N+2} + \alpha_{2N}^2 + \beta_{2N+1}\gamma_{2N-1} + \beta_{2N-1}\gamma_{2N+1}, \\
&h_{4N+2} = 2\alpha_{2N}\alpha_{2N+2} + \beta_{2N+1}\gamma_{2N+1}, \\
&h_{4N+4} = \alpha_{2N+2}^2.
\end{aligned}
$$

Отже, при кожному N маємо $2N+3$ функцій h_k.

Твердження 1. Функції h_α попарно комутують стосовно обох дужок Лі — Пуассона (4.7) та (4.8).

Твердження 2. Функції h_k, $k = 2N+2,\ldots,4N+4$ є ануляторами першої дужки Лі — Пуассона, тобто $\{f, h_k\}_1 = 0$ для будь-якої f.

Функції h_m, $m = 0,2,\ldots,2N+2$ є ануляторами другої дужки Лі — Пуассона, тобто $\{f, h_m\}_2 = 0$ для будь-якої f.

Ці твердження легко довести безпосередніми обчисленнями, використовуючи явний вигляд h_k, та формули (4.7), (4.8) для дужок Лі — Пуассона.

Фіксуємо константу α_{2N+2} і обмежимось підпростором змінних $\{\alpha_0\beta_1\gamma_1; \alpha_2\beta_3\gamma_3;\cdots \ldots\alpha_{2N}\beta_{2N+1}\gamma_{2N+1}\}$, який позначатимемо $\overline{M}^N$. Очевидно, що $\dim\overline{M}^N = 3(N+1)$. Якщо в цьому просторі фіксувати значення інваріантних функцій $h_0 = c_0, h_2 = c_2, \ldots, h_{2N} = c_{2N}$, то будемо мати $N+1$ алгебраїчне рівняння, які задають орбіту $Or_2 \subset \overline{M}^N$ коприєднаної дії алгебри $\tilde{g}_+$, $\dim Or_2 = 2(N+1)$. Функції $h_{2N+2},\ldots,h_{4N},h_{4N+2}$ є функціонально незалежними на Or_2, попарно комутують стосовно дужки Лі — Пуассона (4.8) і тому породжують інтеґровну за Ліувілем гамільтонову систему, якщо одну з цих функцій вибрати на роль гамільтоніана. Кількість комутуючих функцій дорівнює половині розмірності орбіти, яка є фазовим простором.

Аналогічну картину одержимо, якщо фіксуватимемо інваріантні функції $h_{2N+2} = c_{2N+2},\ldots, h_{4N+2} = c_{4N+2}$. (Функція $h_{4N+4} = \alpha_{2N+2}$ фіксована з самого початку.) Відповідний алгебраїчний многовид $Or_1 \subset \overline{M}^N$ буде орбітою коприєднаної дії алгебри $\tilde{g}_-$, $\dim Or_1 = 2(N+1)$. Функції $h_0, h_2, \ldots, h_{2N}$ функціонально незалежні на Or_1, попарно комутують і задають інтеґровну гамільтонову систему.

В просторі $\overline{M}^N$ можливі дві інваріантні дійсні структури. Перша з них фіксує дійсний простір умовами:

$$\alpha_n = ia_n, \quad a_n \text{ — дійсне}, \ \gamma_n = -\beta_n^*. \qquad (4.10)$$

Ця умова дійсності означає, що в комплексній алгебрі $g \approx sl(2, \mathbf{C})$ вибрана дійсна підалгебра $su(2)$. Друга дійсна структура визначає дійсний підпростір умовами:

$$\alpha_n = ia_n, \quad \gamma_n = \beta_n^*. \qquad (4.11)$$

Ця умова дійсності означає, що в $sl(2, \mathbf{C})$ вибрана дійсна підалгебра $su(1,1) \approx sl(2, \mathbf{R})$. Надалі ми продовжуватимемо працювати з комплексними змінними α, β, γ, але матимемо на увазі, що ці змінні задовільняють одній з умов дійсності (4.10) або (4.11).

Фіксуємо функцію h_{4N+2} на роль гамільтоніана і запишемо гамільтонову систему на орбіті Or_2 стосовно дужки Лі — Пуассона (4.8)

$$\frac{\partial\mu_k^s}{\partial x} = \{\mu_k^s, h_{4N+2}\}_2 = \left\langle \hat{\mu}, [X_k^{2N+2-s}, X_j^{2N+2-l}]\right\rangle_2 \frac{\partial h_{4N+2}}{\partial \mu_j^l}. \qquad (4.12)$$

Рівняння (4.12) можна записати в компактній формі у вигляді Ейлера — Арнольда

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial x} = [\hat{\mu}, \nabla_2 h_{4N+2}], \qquad (4.13)$$

де

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\nabla_2 h_{4N+2} = \frac{\partial h_{4N+2}}{\partial \alpha_{2N}} X_0 \cdot \lambda^2 + \frac{\partial h_{4N+2}}{\partial \beta_{2N+1}} X_- \cdot \lambda + \frac{\partial h_{4N+2}}{\partial \gamma_{2N+1}} X_+ \cdot \lambda\,.$$

Якщо взяти до уваги, що $\mu_k^s = \left\langle \mu, X_k^{2N+2-s}\right\rangle_2$, то легко бачити, що рівняння у формі (4.12) є координатним записом матричного рівняння (4.13). В координатах $\alpha_{2l}, \beta_{2l+1}, \gamma_{2l+1}$ воно має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha_{2l}}{\partial x} = \beta_{2l-1}\gamma_{2N+1} - \gamma_{2l-1}\beta_{2N+1}, \\
&\frac{\partial\beta_{2l+1}}{\partial x} = 2(\alpha_{2l}\beta_{2N+1} - \beta_{2l-1}\alpha_{2N+2}), \qquad (4.14)\\
&\frac{\partial\gamma_{2l+1}}{\partial x} = -2(\alpha_{2l}\gamma_{2N+1} - \gamma_{2l-1}\alpha_{2N+2}).
\end{aligned}
$$

З явного вигляду рівнянь, які задають орбіту, випливає, що локальними координатами на ній можна вибрати змінні, виразивши решту змінних через них. Наприклад:

$$\alpha_{2N} = \frac{1}{2\alpha_{2N+2}}\left(h_{4N+2} - \beta_{2N+1}\gamma_{2N+1}\right),$$

$$\alpha_{2N-2} = \frac{1}{2\alpha_{2N+2}}\left(h_{4N} - \alpha_{2N}^2 - \beta_{2N+1}\gamma_{2N-1} - \beta_{2N-1}\gamma_{2N+1}\right). \qquad (4.15)$$

Окрім того, структура рівняння (4.14) така, що змінні β_{2l+1}, γ_{2l+1} при $l = 0, 1,\dots,N-1$ можна виразити через змінні β_{2N+1}, γ_{2N+1} та похідні від них. Наприклад:

$$\beta_{2N-1} = \frac{1}{2\alpha_{2N+2}}\left(2\alpha_{2N}\beta_{2N+1} - \frac{\partial}{\partial x}\beta_{2N+1}\right),$$

$$\gamma_{2N-1} = \frac{1}{2\alpha_{2N+2}}\left(2\alpha_{2N}\gamma_{2N+1} - \frac{\partial}{\partial x}\gamma_{2N+1}\right). \quad (4.16)$$

При таких редукціях система рівняння (4.14) переходить в систему двох рівнянь $N+1$-го порядку стосовно змінних. При $\alpha_0 = 0$ цю систему можна записати у вигляді варіаційної задачі

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta\beta_{2N+1}} S[\beta_{2N+1},\gamma_{2N+1}] \\ \frac{\delta}{\delta\gamma_{2N+1}} S[\beta_{2N+1},\gamma_{2N+1}] \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.17)$$

де $S[\beta_{2N+1},\gamma_{2N+1}]$ – функціонал дії, якому відповідає лагранжіан з вищими похідними. Останній одержується перетвореннями Лежандра з гамільтоніану h_{2N}. При $N = 1$ функціонал дії цієї варіаційної задачі співпадає з сумою двох перших інтеґралів руху нескінченновимірної гамільтонової системи (3.5).

Очевидно, що рівняння (4.17) є аналогом рівняння Новікова (4.3). Але при їх отриманні ми стартували не з набору інтеґралів руху H_k, а з гамільтонової системи (4.14) при $\alpha_0 = 0$. *Тому представлення системи рівнянь (4.14) у вигляді (4.17) дає можливість знайти явний вигляд інтеґралів руху.*

Отже, після представлення нами системи (4.14) у вигляді варіаційної задачі (4.17) ми можемо стверджувати, що рівняння (4.14) це вищі стаціонарні DNLS-рівняння в неканонічній гамільтоновій формі.

3. В цьому пункті ми означимо ще одну гамільтонову систему на орбіті Or_1 (або на Or_2), гамільтоніаном якої буде функція $-h_{2N-2}$ (або функція h_{4N}, якщо систему будувати на орбіті Or_2). В координатах α_{2l}, β_{2l+1}, γ_{2l+1} ця система має вигляд

$$\frac{\partial\alpha_{2l}}{\partial\tau} = (\beta_{2l-1}\gamma_{2N-1} - \gamma_{2l-1}\beta_{2N-1}) + (\beta_{2l-3}\gamma_{2N+1} - \gamma_{2l-3}\beta_{2N+1}),$$

$$\frac{\partial\beta_{2l+1}}{\partial\tau} = 2(\alpha_{2l-2}\beta_{2N+1} + \alpha_{2l}\beta_{2l-1}) - 2(\alpha_{2N+2}\beta_{2l-3} + \alpha_{2N}\beta_{2l-1}), \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial\gamma_{2l+1}}{\partial\tau} = 2(\alpha_{2l-2}\gamma_{2N+1} + \alpha_{2l}\gamma_{2l-1}) - 2(\alpha_{2N+2}\gamma_{2l-3} + \alpha_{2N}\gamma_{2l-1}).$$

Як і систему (4.14) рівняння (4.18) можна подати у вигляді рівняння Ейлера — Арнольда:

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial\tau} = [\hat{\mu}, \nabla_2 h_{4N}], \quad (4.19)$$

де

$$\nabla_2 h_{4N} = \begin{bmatrix} \lambda^4\alpha_{2N+2} + \lambda^2\alpha_{2N} & \lambda^3\beta_{2N+1} + \lambda\beta_{2N-1} \\ \lambda^3\gamma_{2N+1} + \lambda\gamma_{2N-1} & -\lambda^4\alpha_{2N+2} - \lambda^2\alpha_{2N} \end{bmatrix}.$$

Якщо рівняння (4.19) звузити на траєкторії системи (4.14), і скориставшись формулами (4.15), (4.16), виразити змінні α_{2N}, β_{2N-1}, γ_{2N-1} через β_{2N+1}, γ_{2N+1} та похідні від них, то легко побачити, що матричний градієнт $\nabla_2 h_{4N}$ співпадає з матрицею A, а градієнт $\nabla_2 h_{4N+2}$ – з матрицею L в рівнянні нульової кривизни (3.3). В нашому підході рівняння

$$\frac{\partial\nabla_2 h_{4N+2}}{\partial\tau} - \frac{\partial\nabla_2 h_{4N}}{\partial x} + [h_{4N+2}, h_{4N}] = 0 \quad (4.20)$$

є очевидним наслідком комутативності гамільтоніанів h_{4N+2} та h_{4N}, оскільки в цьому випадку похідні $\frac{\partial}{\partial\tau}$ та $\frac{\partial}{\partial x}$ комутують.

Оскільки змінні $\alpha_{2l}, \beta_{2l+1}, \gamma_{2l+1}$ виражаються через $\beta_{2N+1}, \gamma_{2N+1}$ та похідні від них, то в рівнянні (4.18) достатньо слідкувати за еволюцією змінних β_{2N+1} та γ_{2N+1}. Для них маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta_{2N+1}}{\partial\tau} &= 2(\alpha_{2N-2}\beta_{2N+1} - \alpha_{2N+2}\beta_{2N-3}), \\ \frac{\partial\gamma_{2N+1}}{\partial\tau} &= 2(\alpha_{2N-2}\gamma_{2N+1} - \alpha_{2N+2}\gamma_{2N-3}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Але з рівняння (4.14) випливає, що

$$\frac{\partial\beta_{2N-1}}{\partial x} = 2(\alpha_{2N-2}\beta_{2N+1} - \alpha_{2N+2}\beta_{2N-3}),$$

$$\frac{\partial\gamma_{2N-1}}{\partial x} = 2(\alpha_{2N-2}\gamma_{2N+1} - \alpha_{2N+2}\gamma_{2N-3}),$$

тобто

$$\frac{\partial\beta_{2N+1}}{\partial\tau} = \frac{\partial\beta_{2N-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\gamma_{2N+1}}{\partial\tau} = \frac{\partial\gamma_{2N-1}}{\partial x},$$

з урахуванням формул (4.15), (4.16) маємо

$$\frac{\partial\beta_{2N+1}}{\partial\tau}=-\frac{1}{2\alpha_{2N+2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta_{2N+1}+\frac{1}{\alpha_{2N+2}}(\beta_{2N+1}\gamma_{2N+1}-h_{2N+2})\beta_{2N+1}\right).$$

Аналогічне рівняння справедливе і для γ_{2N+1}. При покладанні $\alpha_{2N+2}=i=\sqrt{-1}$, $\beta_{2N+1}=\beta$, $\gamma_{2N+1}=\gamma$ ці рівняння співпадуть з рівняннями (3.4), а при покладанні $\gamma=-\beta^*$ — з рівнянням (2.45).

Наведена вище схема побудови нелінійного рівняння типу DNLS-рівняння дає спосіб його інтеґрування. Для цього потрібно знайти розв'язки системи звичайних диференційних рівнянь (4.14) і на його траєкторіях задати еволюцію згідно рівнянь (4.18).

4. Для успішного інтеґрування рівнянь (4.14) необхідно звузитись на поверхню рівня усіх інтеґралів руху h_k, $k=0,\dots,4N+2$. Для цього необхідно перейти до підходящих змінних, в термінах яких рівності $h_k=c_k$ перетворювалися б у тотожності. Такі змінні використовувались у роботах [10], [15]. Ми скористаємося результатами цих робіт.

Перейдемо від змінних $\beta_1,\beta_3,\dots,\beta_{2N+1}$ до змінних s_j, $j=1,2,\dots,N$, які є нулями полінома $\beta(\lambda)$, тобто покладемо

$$\beta(\lambda)=\lambda\beta_{2N+1}\prod_{j=1}^{N}\left(\lambda^2-s_j\right). \qquad (4.23)$$

За теоремою Вієта всі величини $\frac{\beta_{2l+1}}{\beta_{2N+1}}$ виражаються через симетричні функції від нулів s_j, зокрема

$$\frac{\beta_{2N-1}}{\beta_{2N+1}}=-\sum_{j=1}^{N}s_j. \qquad (4.24)$$

Зробимо вказану заміну змінних у рівняннях (4.13) та (4.14). З рівняння (4.13) маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\beta(\lambda)=\frac{2\lambda\alpha\beta_{2N+1}-2\lambda^2\beta\alpha_{2N+2}}{\lambda\beta_{2N+1}\prod_j\left(\lambda^2-s_j\right)}=$$

$$=\frac{2\lambda\alpha\beta_{2N+1}-2\lambda^2\beta\alpha_{2N+2}}{\lambda\beta_{2N+1}\prod_j\left(\lambda^2-s_j\right)}=\frac{2\alpha}{\prod_j\left(\lambda^2-s_j\right)}-2\lambda\alpha_{2N+2}. \qquad (4.25)$$

З іншого боку, розклад (4.23) дає

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\beta(\lambda)=\frac{\partial}{\partial x}\ln\beta_{2N+1}-\sum_j\frac{\frac{\partial s_j}{\partial x}}{\left(\lambda^2-s_j\right)}. \qquad (4.26)$$

Домножуючи (4.25) та (4.26) на λ^2-s_k і спрямувавши $\lambda^2\to s_k$, матимемо

$$-\frac{\partial s_j}{\partial x}=\frac{2\alpha}{\prod_{k\neq j}\left(s_k-s_j\right)}. \qquad (4.27)$$

Аналогічно, з рівняння (4.19) випливає:

$$-\frac{\partial s_j}{\partial\tau}=\frac{2\alpha(s_k)}{\prod_{k\neq j}\left(s_k-s_j\right)}\left(s_k+\frac{\beta_{2N-1}}{\beta_{2N+1}}\right)=$$

$$=\frac{2\alpha(s_k)}{\prod_{k\neq j}\left(s_k-s_j\right)}\left(s_k+\sum_{j=1}^{N}s_j\right). \qquad (4.28)$$

Зазначимо, що змінні s_k це ті змінні, які використовувала С. Ковалевська при інтеґруванні рівнянь руху несиметричної дзиги в полі тяжіння. Ці ж змінні виникають і при інтеґруванні рівнянь Кортевега-де Вріза [15].

В рівняннях (4.27) та (4.28) зробимо редукцію

$$\alpha(\lambda)=-ia(\lambda),\quad \gamma=-\beta^*.$$

Тоді $a^2+|\beta|^2=-\left(h_0+\lambda^2h_2+\dots+\lambda^{4N+4}h_{4N+4}\right)=P(s)$, $P(s)$ – поліном степеня $2N+2$ стосовно змінної $s=\lambda^2$. Якщо покласти $\lambda^2=s_k$ і врахувати, що $\beta(s_k)=0$, то

$$a(s_k)=\pm\sqrt{P(s_k)}=\pm\sqrt{-\left(h_0+s_kh_2+\dots+s_k^{2N+2}h_{4N+4}\right)}.$$

Таким чином всі величини в рівняннях (4.27) та (4.28) визначені.

Теорія інтеґрування рівнянь типу (4.27), (4.28) добре розроблена. Їх слід розглядати як рівняння на алгебраїчній рімановій поверхні гіпереліптичного типу, яка задається алгебраїчним рівнянням:

$$w^2=P(s)=\prod_{j=1}^{N+1}\left(s-e_j\right)\left(s-e_j^*\right).$$

Рівняння (4.27), (4.28) лінеаризується підстановкою Абеля [10].

Після того, як функції $s_k(x,t)$ знайдені, функцію $\beta_{2N+1}\equiv\beta$ знайдемо з рівняння

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\ln\beta_{2N+1}=2\left(a_{2N}-\frac{\beta_{2N-1}}{\beta_{2N+1}}\right), \qquad (4.29)$$

яке легко одержується з (4.14). Якщо покласти $\beta_{2N+1}=\left|\beta_{2N+1}(x)\right|e^{i\varphi(x)}$ і врахувати, що $2a_{2N}=-\left(h_{4N+2}+\left|\beta_{2N+1}\right|^2\right)$, то з рівняння (4.29) матимемо:

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\left|\beta_{2N+1}\right|\right)=2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{N}s_k\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)=-\left(h_{4N+2}+\left|\beta_{2N+1}\right|^2\right)+\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N}s_k\right). \qquad (4.30)$$

При $N=1$ маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = -\left(h_6 + |\beta_3|^2\right) + \mathrm{Re}(s(x)). \qquad (4.31)$$

Функція $\varphi(x)$ знаходиться прямим інтеґруванням правої частини рівняння (4.30).

5. Одержання конкретних явних формул у випадку, коли кількість змінних s_k більша за одиницю, є непростою задачею. Обмежимося випадком $N=1$. Тоді рівняння (4.27) має вигляд

$$-i\frac{\partial s}{\partial x} = 2\sqrt{s^4 - h_6 s^3 - h_4 s^2 - h_2 s - h_0}, \qquad (4.32)$$

де h_0, h_2, h_4, h_6 — дійсні числа, які визначаються вибором початкових умов. Як відомо [16], рівняння типу (4.32) інтеґруються в термінах еліптичних функцій. Явний вигляд розв'язку суттєво залежить від точок галуження радикалу у правій частині, тобто від нулів полінома $P(s)$. Оскільки коефіцієнти h_i — дійсні, то ці нулі мають бути або дійсними, або попарно комплексно спряженими, тобто

$P(s) = (s - e_1)(s - e_1^*)(s - e_2)(s - e_2^*)$.

Для спрощення обрахунків покладемо $e_1 = Re^{i\theta_1}, e_2 = Re^{i\theta_2}$. Тоді

$h_0 = -R^4$,

$h_2 = 2R^3(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$,

$h_4 = -2R^2(1 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2)$,

$h_6 = 2R(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$,

$h_8 = -1$.

Для знаходження зв'язку між змінною s та $|\beta_3|^2$ скористаємося співвідношенням

$a^2 + |\beta|^2 = -(h_0 + \lambda^2 h_2 + \ldots + \lambda^{4N+4}h_{4N+4})$, звідки випливає:

$$\begin{aligned}
h_0 &= -a_0^2,\\
h_2 &= -\left(2a_0a_2 + |\beta_3|^2 ss^*\right),\\
h_4 &= -\left(a_2^2 + 2a_0a_4 - |\beta_3|^2(s + s^*)\right),\\
h_6 &= -\left(2a_2 + |\beta_3|^2\right),\\
h_8 &= -a_4^2.
\end{aligned} \qquad (4.33)$$

Покладемо $a_4 = 1$. Тоді з четвертого та другого співвідношень будемо мати:

$$2a_2 = -\left(h_6 + |\beta_3|^2\right), \quad |\beta_3|^2 = \frac{-h_2 + a_0h_6}{|s|^2 - a_0}. \qquad (4.34)$$

Оскільки $h_2 = R^2h_6$, бачимо, що для отримання ненульового розв'язку необхідно покласти $a_0 = -R^2$.

Розглянемо окремо випадок кратних коренів, тобто покладемо $e_1 = e_2 = Re^{i\theta}$. Тоді $P(s) = (s^2 - 2Rs\cos\theta + R^2)^2$, а рівняння (4.32) набуває вигляду:

$$\frac{ds}{(s^2 - 2Rs\cos\theta + R^2)} = 2idx.$$

Інтеґруючи праву та ліву частину, одержуємо:

$$2i(x - x_0) = \frac{1}{R\sin\theta}arctg\frac{s - R\cos\theta}{R\sin\theta},$$

де x_0 — стала інтеґрування. Остаточно

$s = R(\cos\theta + i\sin\theta\,\mathrm{th}[2R\sin\theta(x - x_0)])$.

Підставивши цей вираз у формулу (4.34), одержимо явний вигляд для $|\beta|^2$, що відповідає солітонному розв'язку:

$$|\beta|^2 = -\frac{8R\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta\,\mathrm{th}^2 u + 1}, \qquad (4.35)$$

де $u = 2R\sin\theta(x - x_0)$. Очевидно, що умови дійсності вимагають $\pi/2 < \theta < \pi$. Залежність $|\beta|^2$ від часу виникає після заміни $x \to x - h_6 t$, звідки видно, що h_{4N+2} грає роль групової швидкості нелінійної хвилі.

Залежність функції β_{2N+1} від часу визначається рівнянням (4.18). При $N=1$ воно має вигляд:

$$\frac{\partial\beta_3}{\partial\tau} = i2a_0\beta_3.$$

Це рівняння лінійне, а тому залежність від часу функції β фігуруватиме у вигляді множника $e^{i2a_0\tau}$. Остаточний розв'язок має вигляд

$$\beta(x,\tau) = |\beta(x - h_6\tau)|e^{i\varphi(x - h_6\tau) + 2ia_0\tau}.$$

У випадку, коли точки галуження правої частини рівняння (4.32) вибрані на колі, $e_1 = Re^{i\theta_1}$, $e_2 = Re^{i\theta_2}$, функція $|\beta|^2$ має вигляд

$$|\beta|^2 = -\frac{4R(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)}{\left|\dfrac{a\,\mathrm{sn} + c}{b\,\mathrm{sn} + d}\right|^2 + 1},$$

де $\mathrm{sn}(u,k)$ — еліптична функція Якобі; $u = \dfrac{2iR(x - x_0)}{ad - bc}$, а коефіцієнти a, b, c, d — задають дробово-лінійне перетворення від рівняння (4.32) до рівняння, якому задовольняє функція Якобі.

Література

1. *Ситенко О. Г., Мальнєв В. М.* Основи теорії плазми.— Київ, Наукова думка, 1994.
2. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М., Наука, 1976.
3. *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере.— М., Энергоатомиздат, 1989.
4. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states.— Phys. Rev. Lett. vol. **15**, N 6 (1965), p. 240—242.
5. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М., Наука, 1979.
6. *Прист Э. Р.* Солнечная магнитогидродинамика.— М., Мир, 1985.
7. *Kakutani T., Ono H., Taniuti T. and Wei C. C.* Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II. Application to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma.— J. Phys. Soc. Japan, v. **24,** N 5 (1968), p. 1159.
8. *Mio K., Ogino T., Minami K. and Takeda S.* Modified Nonlinear Schrödinger Equation for Alfvén Waves Propagation along the Magnetic Field in Cold Plasmas.— J. Phys. Soc. Japan, v. **41,** N 1 (1976), p. 265.
9. *Kaup D., Newell A.* An Exact Solution for a Derivative Nonlinear Schrödinger Equation.— J. Math. Phys., v. **19,** N 4 (1978), p. 798.
10. *Прикарпатский А. К.* Почти-периодические решения модифицированного уравнения Шредингера.— Теор. Мат. Физ. **47**, № 3 (1981), с. 323.
11. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.— М., Наука, 1986.
12. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза.— Функц. анализ и приложения, **8,** вып. 3 (1974), с. 54—66.
13. *Голод И. П.* Интегрируемые гамильтоновы системы на орбитах афинных групп Ли и периодическая задача для модифицированных уравнений Кортевега-де Фриза.— Препринт ИТФ-82-144Р, Киев, 1982.
14. *Голод И. П.* Гамильтоновы системы на орбитах афинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.— Физика многочастичных систем, вып. **7,** Киев, Наукова думка, 1985.
15. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М., Наука, 1980.
16. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций.— М., Наука, 1968.

A. G. Zagorodniy, I. P. Golod

INTEGRABLE MODEL FOR EXPANTION OF NONLINEAR ALFVÉN WAVES IN PLASMA

Is explained the algebraic-geometric scheme for construction of solutions and is investigated a Hamilton structure of the approximated equations of magnetic hydrodynamics, which describe expansion of nonlinear Alfvén waves in plasma. Is obtained soliton's and one-zonal periodic solutions of these equations.