УДК 512.56+512.64

Дяченко С. М.

ЗОБРАЖЕННЯ НАПІВГРУПИ $T_2 \times T_2$ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВА

Ця робота присвячена вивченню задачі про зображення напівгрупи $T_2 \times T_2$ у модулярному випадку, тобто у випадку, коли характеристика поля ділить порядок напівгрупи. Ця робота продовжує дослідження багатьох математиків, таких як Башев В. А., Бондаренко В. М., Бреннер С., Дрозд Ю. А., Кругляк С. А. та ін., які досліджували зображення груп у модулярному випадку. В роботі доводиться, що напівгрупа $T_2 \times T_2$ має дикий зображувальний тип.

Ключові слова : *зображення напівгруп, модулярний випадок, дика задача.*

Вступ

Відомо, що групова алгебра є напівпростою, якщо характеристика поля не ділить порядок групи. Ситуація ускладнюється у так званому модулярному випадку — коли характеристика поля ділить порядок групи. У такому випадку задача про зображення майже всіх груп є дикими. Першою роботою на цю тему була робота Башева. У своїй роботі [1] він довів, що така задача про опис зображень групи $C_2 \times C_2$ ручна. Ця стаття присвячена дослідженню зображень напівгруп у модулярному випадку. Досліджується задача про зображення напівгрупи $T_2 \times T_2$, де T_2 — це напівгрупа всіх відображень двоелементної множини в себе. Ця задача є природним продовженням попереднього дослідження, оскільки напівгрупа $T_2 \times T_2$ містить ідеал, фактор за яким ізоморфний $C_2 \times C_2 \cup \{0\}$.

Нехай T — деяка напівгрупа, тобто множина з визначеною на ній асоціативною бінарною операцією. І нехай задано деяке базове поле k. Тоді *зображенням* напівгрупи розмірності n називається довільний гомоморфізм φ: $T \to \mathbf{M}_n(k)$, де $\mathbf{M}_n(k)$ позначає множину всіх квадратних матриць порядку n над полем k. Два зображення φ та $\widetilde{\varphi}$ називаються еквівалентними, якщо існує оборотна матриця $S \in GL_n(k)$ така, що для всіх $t \in T$ виконується

$$\varphi(t) = S^{-1}\widetilde{\varphi}(t)S.$$

Далі в цій статті поле k буде полем характеристики два і ми будемо вивчати зображення напівгруп над цим полем.

Нехай T_2 — напівгрупа всіх відображень двоелементної множини $M = \{1, 2\}$ в себе. Вона складається з чотирьох елементів $T_2 = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$,

$$\begin{array}{llll} f_0(1) = 1, & f_1(1) = 2, & f_2(1) = 2, & f_3(1) = 1, \\ f_0(2) = 2, & f_1(2) = 1, & f_2(2) = 2, & f_3(2) = 1. \end{array}$$

З наступною табличкою множення (при композиції fg першим виконується f):

	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_0	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_2	f_3
f_3	f_3	f_2	f_2	f_3

Елементи $\{f_0, f_1\}$ утворюють підгрупу, яка ізоморфна циклічній групі $C_2 = S_2$, яка є групою перестановок множини M. Необоротні елементи f_2, f_3 утворюють ідеал напівгрупи, який ми позначимо $\mathcal{J}$. При цьому, $T_2/\mathcal{J} \simeq C_2 \cup \{0\}$.

Розглянемо напівгрупу

$$T_2^n = \underbrace{T_2 \times \ldots \times T_2}_{n}.$$

Вона містить ідеал $\mathcal{J}(n)$, який складається з таких n-ок, що хоча б на одному місці стоїть необоротний елемент, а $T_2^n \backslash \mathcal{J}(n) = C_2^n$ є підгрупою оборотних елементів. При цьому $T_2^n/\mathcal{J}(n) \simeq C_2^n \cup \{0\}$. Отже, зображувальний тип напівгрупи T_2^n тісно пов'язаний з зображувальним типом групи C_2^n.

Зображення скінченних груп у модулярному випадку вивчалися багатьма авторами [1]–[4]. В цих роботах доведено, що група C_2 скінченного типу, $C_2 \times C_2$ – ручного типу, а C_2^n дика для $n > 2$. Із цих результатів випливає (оскільки $T_2^n/\mathcal{J}(n) = C_2^n \cup \{0\}$), що T_2^n має дикий зображувальний тип при $n > 2$.

Зауваження. У роботі [4] доведено, що група $C_p \times C_p$, для p простого, має дикий зображувальний тип. Звідси випливає, що $T_p \times T_p$ має дикий зображувальний тип, оскільки

$$T_p \times T_p/\mathcal{J}' = S_p \times S_p \cup \{0\} \supset C_p \times C_p \cup \{0\},$$

де $\mathcal{J}'$ — ідеал необоротних елементів, S_p — симетрична група (ми використали відомий факт, що з дикості підгрупи випливає дикість групи).

У цій статті буде доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Задача про опис зображень напівгрупи $T_2 \times T_2$ є дикою задачею.*

Напівгрупа $T_2 \times T_2$ та її задання твірними та співвідношеннями

Напівгрупа T_2 породжується елементами $\{f_0, f_1, f_2\}$, для яких виконуються наступні співвідношення:

1) f_0 є одиницею, тобто $f_0 f_i = f_i f_0 = f_i$, де $i = 0, 1, 2$;
2) $f_1^2 = f_0$;
3) $f_2^2 = f_2$;
4) $f_1 f_2 = f_2$.

Легко перевірити, що напівгрупа, яка породжена елементами $\{f_0, f_1, f_2\}$ та співвідношеннями 1–4 має чотири елемента $\{f_0, f_1, f_2, f_2 f_1\}$, а отже, ізоморфна напівгрупі T_2.

Таким чином, напівгрупа $T_2^2 = T_2 \times T_2$ породжується такими елементами:
$a_{10} = (f_1, f_0)$, $a_{20} = (f_2, f_0)$,
$a_{01} = (f_0, f_1)$, $a_{02} = (f_0, f_2)$, $a_{00} = (f_0, f_0)$,
з такими співвідношеннями:

(A) a_{00} — одиниця, тобто $a_{00} a_{i0} = a_{i0} a_{00} = a_{i0}$, $a_{00} a_{0i} = a_{0i} a_{00} = a_{0i}$, де $i = 0, 1, 2$;

(B) комутація: $a_{i0} a_{0j} = a_{j0} a_{0i}$, де $i, j = 0, 1, 2$;

(C) $a_{10}^2 = a_{01}^2 = a_{00}$;

(D) $a_{20}^2 = a_{20}$, $a_{02}^2 = a_{02}$;

(E) $a_{01} a_{02} = a_{02}$, $a_{10} a_{20} = a_{20}$.

Задача про опис зображень напівгрупи $T_2 \times T_2$

Розглянемо тепер довільне зображення напівгрупи $T_2 \times T_2$, тобто відповідність, яка ставить кожному елементу напівгрупи матрицю порядку n. Оскільки зображення є гомоморфізмом, то воно однозначно задається образами твірних, і для образів твірних виконуються ті ж співвідношення, що виконуються у напівгрупі. Умова еквівалентності зображень дозволяє нам змінювати матриці в кожному фіксованому зображенні — зводити їх до зручного для нас вигляду (наприклад, до діагонального вигляду, або до Жорданової форми).

На *першому кроці* приведемо матрицю, що відповідає елементу a_{00}. Оскільки $a_{00}^2 = a_{00}$, то матрицю можна звести до такого вигляду:

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Після цього зі співвідношень (A) буде випливати, що матриці, відповідні елементам $a_{10}, a_{20}, a_{01}, a_{02}$ мають, відповідно, такий вигляд:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{10} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} A_{20} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{01} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} A_{02} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

причому виконуються такі співвідношення:

(B’) комутація: $A_{i0} A_{0j} = A_{j0} A_{0i}$, де $i, j = 1, 2$;

(C’) $A_{10}^2 = A_{01}^2 = E$;

(D’) $A_{20}^2 = A_{20}$, $A_{02}^2 = A_{02}$;

(E’) $A_{01} A_{02} = A_{02}$, $A_{10} A_{20} = A_{20}$.

Оскільки поле k має характеристику два, в ньому справедлива рівність $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Отже, співвідношення (B’) можна переписати так: $(A_{10} + E)^2 = 0$, $(A_{01} + E)^2 = 0$, (D’) можна переписати так: $(A_{01} + E)A_{02} = 0$, $(A_{10} + E)A_{20} = 0$. Уведемо наступні матриці: $M_{01} = A_{01} + E$, $M_{10} = A_{10} + E$, $M_{20} = A_{20}$, $M_{02} = A_{02}$. Для них виконується:

(α) комутація: $M_{i0} M_{0j} = M_{j0} M_{0i}$, де $i, j = 1, 2$;

(β) $M_{10}^2 = M_{01}^2 = 0$;

(γ) $M_{20}^2 = M_{20}$, $M_{02}^2 = M_{02}$;

(δ) $M_{01} M_{02} = 0$, $M_{10} M_{20} = 0$.

Для доведення того, що остання задача дика, ми виділимо серед усіх зображень цієї задачі деяку підмножину, яка знаходиться у взаємно-однозначній відповідності із зображеннями іншої задачі, яка є дикою.

А саме, розглянемо наступний клас зображень $M(X,Y,Z)$:

$M_{10}(X)$: $M_{01}(Y,Z)$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & X \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Z \\ \hline 0 & 0 & 0 & Y \end{array}\right),$$

$M_{20}(X)$: $M_{02}(Y,Z)$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Виконання умов $(\alpha - \delta)$ буде означати виконання наступних умов для матриць X, Y, Z:

(α') $ZX = 0$, $YX = XY$;

(β') $X^2 = 0$, $Y^2 = 0$, $ZY = 0$.

Лема 1. *Два зображення $M(X,Y,Z)$ та $M(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існують невироджені матриці U, V такі, що*

$$U^{-1}XU = \bar{X}, U^{-1}YU = \bar{Y}, V^{-1}ZU = \bar{Z}.$$

Доведення. За означенням два зображення $M(X,Y,Z)$ та $M(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S, для якої

$$S^{-1}M_{10}(X)S = M_{10}(\bar{X}), \quad S^{-1}M_{20}S = M_{20},$$
$$S^{-1}M_{01}(Y,Z)S = M_{01}(\bar{Y},\bar{Z}), \quad S^{-1}M_{02}S = M_{02}.$$

Із $S^{-1}M_{20}S = M_{20}$, $S^{-1}M_{02}S = M_{02}$ випливає, що матриця S має такий вигляд:

$$S = \left(\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & S_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & S_4 \end{array}\right).$$

Із того, що S — невироджена матриця випливає, що матриці S_1, S_2, S_3, S_4 невироджені. Покладемо $U = S_4$, $V = S_3$, тоді із рівностей $S^{-1}M_{10}(X)S = M_{10}(\bar{X}), S^{-1}M_{01}(Y,Z)S = M_{01}(\bar{Y},\bar{Z})$ одразу випливає твердження леми.

Таким чином, підмножина зображень вигляду $M(X,Y,Z)$ знаходиться у взаємно-однозначній відповідності із зображеннями в задачі про опис з точністю до еквівалентності трійки матриць (X,Y,Z), для яких виконуються співвідношення (α', β'), а еквівалентність задана так: дві трійки (X,Y,Z) та $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існують невироджені матриці U, V такі, що $U^{-1}XU = \bar{X}, U^{-1}YU = \bar{Y}, V^{-1}ZU = \bar{Z}$. Позначимо цю задачу $(*)$.

Лема 2. *Задача $(*)$ є дикою задачею.*

Доведення. Зауважимо, що множення зліва (справа) матриці X на оборотну матрицю S рівносильне послідовному виконанню елементарних перетворень над рядками (стовпцями) матриці X.

Відомо, що якщо після введення додаткових співвідношень для матриць, задача буде дика, то дикою була і початкова задача. Таким чином, ми додамо наступні співвідношення $XY = 0$, $YX = 0$, $XZ = 0$, $YZ = 0$.

Спочатку в об'єднаній матриці

$$P = \left(\frac{X}{Y}\right)$$

виділимо максимальну кількість лінійно незалежних стовпців у матриці P, привівши її таким чином до такого вигляду (матрицю Z розділимо на смуги відповідно до поділу матриць X та Y):

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline X_0 & 0 \\ \hline X_1 & 0 \\ \hline Y_0 & 0 \\ \hline Y_1 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} X_0 \\ X_1 \end{array}}\right\} X \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} Y_0 \\ Y_1 \end{array}}\right\} Y \end{array} \qquad Z = \begin{array}{|c|c|} \hline Z_3 & Z_4 \\ \hline Z_1 & Z_2 \\ \hline \end{array}$$

З умов (α', β') випливає, що $X_0 = Y_0 = Z_4 = 0$, $Z_3 = 0$. І ми додатково припускаємо, що $Z_2 = 0$. Отже, ми отримали задачу про класифікацію четвірки матриць (X_1, Y_1, Z_1), між якими вже немає ніяких алгебраїчних співвідношень. При цьому дві такі четвірки (X_1, Y_1, Z_1) та $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1)$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існують невироджені матриці U_1, U_2, V такі, що $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (U_2^{-1}X_1U_1, U_2^{-1}Y_1U_1, V^{-1}Z_1U_1)$.

Така задача є задачею про опис зображень такого сагайдака:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Така задача дика (див. [5], [6]).

1. Башев В. А. Представления группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ в поле характеристики два / В. А. Башев // ДАН СССР. – 1961. – Т. 141, Вып. 5. – С. 1015–1018.

2. Бондаренко В. М. Представленческий тип конечных групп / В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – Т. 71. – С. 24–41.

3. Brenner S. Modular representations of p-groups. / S. Brenner // J. Algebra. – 1970. – No. 1. – P. 69–102.

4. Кругляк С. А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p. / С. А. Кругляк // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, Вып. 6. – С. 1263–1265.

5. Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. 37, № 4. – С. 752–791.

6. Donovan P. The representation theory of finite graphs and assosiated algebras / P. Donovan, M. R. Freislich // Carleton Lecture Notes. – 1973. – №5. – P. 3–86.

S. Dyachenko

REPRESENTATIONS OF SEMIGROUP $T_2 \times T_2$ OVER THE FIELD OF CHARACTERISTIC TWO

This article devoted to the modular representations of the semigroup $T_2 \times T_2$. This work prolongs investigations of scientists Bashev V. A., Bondarenko V. M., Brenner S., Drozd Yu. A., Kruglyak S. A. in the theory of modular representations groups. It is proved that $T_2 \times T_2$ is of the tame type.
Key words : *representations of semigroup, modular case, wild problem.*