Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФІВ»**

Виконав: студент 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Ярошепта Богдан Павлович

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент:

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою ___________________________

Секретар ЕК________________________
(підпис)

«______» _________________ 20___р.

Київ - 2023

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук
______________*Олійник Б.В.*
(підпис)
"____"________________ 2021

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
для кваліфікаційної роботи
студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Ярошепті Богдану Павловичу

Тема: «Розфарбування графів»
Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація
1. Вступ
2. Введення означеннь
3. Жадібний алгоритм
4. Реалізація жадібного алгоритму за допомогою
мови програмування Python
5. Доведення: Хроматичне число графа Q_n дорівнює 2
6. Доведення: Хроматичне число графа K_n дорівнює n
7. Доведення: Хроматичний індекс графу $K_{n,n}$ дорівнює n
8. Хроматичний поліном
Висновки
Список літератури

Дата видачі "____"__________ 2022 Керівник ______________
(підпис)
Завдання отримав ______________
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «______» ________________ 2022р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	26.10.2022			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	30.10.2022			
3.	Розробка плану та структури роботи.	12.01.2023			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	16.01.2023			
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	13.03.2023			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	05.04.2023			
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	10.05.2023			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	12.05.2023			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	05.06.2023			

Науковий керівник __________________________
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи __________________________
(ПІБ)

Зміст

Анотація

Дана кваліфікаційна робота присвячена темі "Розфарбування графів". У роботі розглядаються основні означення теорії графів, визначення, пов'язані з розфарбуванням графів, та жадібний алгоритм для розфарбування графів. Також наводяться доведення про хроматичне число та хроматичний індекс графів, включаючи графи Qn, Kn та Kn,n. Досліджується хроматичний поліном, його властивості та застосування. Приводяться приклади використання хроматичного полінома для різних задач. Робота надає загальне уявлення про розфарбування графів та його важливість у теорії графів, а також розглядає алгоритми та концепції, що можуть бути використані для вирішення задач розфарбування графів.

1 Вступ

1.1 Актуальність

Актуальність даної роботи полягає в тому, що проблема розфарбування графів є важливою темою у теорії графів та має широкі застосування в різних галузях. Вивчення розфарбування графів допомагає розширити розуміння основних концепцій графів і розвинути алгоритмічні навички.

У даній роботі особлива увага приділяється жадібному алгоритму для розфарбування графів та важливим результатам, пов'язаним з хроматичним числом та хроматичним індексом графів. Також розглядається реалізація жадібного алгоритму з використанням мови програмування Python.

Крім того, дана робота включає дослідження хроматичного полінома, який є потужним інструментом для вивчення властивостей розфарбування графів. Хроматичний поліном надає інформацію про кількість способів розфарбування графа в залежності від кількості кольорів.

У цій роботі розглядаються рекурентні співвідношення для хроматичного полінома, а також теореми, що описують його властивості. Використання хроматичного полінома ілюструється на конкретних прикладах, таких як задача про розклад для ПМ-4, злиття вершин, видалення ребра та комбінування операцій. Це дозволяє уявити, як хроматичний поліном може бути використаний для розв'язання різних задач з розфарбування графів.

Результати, отримані в рамках дослідження хроматичного полінома, можуть мати практичне значення для розробки ефективних алгоритмів розфарбування графів та вирішення важливих проблем у галузі комп'ютерних наук і оптимізації. Вивчення хроматичного полінома розширює наше розуміння теорії графів і сприяє розвитку нових методів і підходів до розфарбування графів.

Ця робота має значення, оскільки допомагає поглибити розуміння основних понять та методів розфарбування графів. Вона також надає практичні засоби для впровадження цих методів у програмні проекти. Інформація, отримана в результаті дослідження, може бути корисною для студентів, викладачів та дослідників, які цікавляться теорією графів та її застосуваннями.

1.2 Мета, завдання дослідження

Метою даного дослідження є детальне вивчення та аналіз теорії розфарбування графів. Головним завданням роботи є дослідження різних аспектів розфарбування графів, включаючи хроматичне число, хроматичний індекс та хроматичний поліном.

Конкретні завдання дослідження включають:

- Вивчення основних понять теорії графів, включаючи графи, вершини, ребра, степінь вершин та довільні розфарбування графів.
- Дослідження жадібного алгоритму розфарбування графів та його застосування до різних типів графів.
- Доведення теорем про хроматичне число, хроматичний індекс та хроматичний поліном графів.
- Розробка програмної реалізації жадібного алгоритму для розфарбування графів та проведення практичних експериментів з реальними графами.
- Вивчення прикладів використання хроматичного поліному для вирішення різних задач з розфарбування графів.

Дослідження спрямоване на розширення нашого розуміння теорії розфарбування графів, виявлення нових методів та підходів до розфарбування графів та розв'язання важливих проблем. Отримані результати можуть мати практичне значення для розробки ефективних алгоритмів розфарбування графів та вирішення задач у галузі комп'ютерних наук та оптимізації.

2 Введення означень

Введемо основні та необхідні для розуміння означення з теорії графів.
Нехай V – непорожня скінченна множина. Тоді множина $V^{(2)}$ є сукупністю всіх невпорядкованих пар елементів з множини V.

2.1 Основні означення з теорії графів

Означення 1.1 *Графом (неорієнтовним)* G називають пару множин (V, E), де E - довільна підмножина множини $V^{(2)}$. Зазвичай, граф позначають наступним чином: $G = (V, E)$.

Означення 1.2 *Вершинами* графа називають елементи множини V, відповідно V називають *множиною вершин*.

Означення 1.3 *Ребрами* графа називають елементи множини E, і аналогічно E - *множина ребер* графа.

Означення 1.4 *Тривіальним* графом називається граф, який має лише одну вершину.

Означення 1.5 *Порожнім* графом називають той граф, який не має ребер.

Означення 1.6 Вершини називають *суміжними* у тому випадку, якщо $(v, w) \in E$, де E - *множина ребер* довільного не тривіального та не порожнього графа $G = (V, E)$. Інакше вершини називають *не суміжними*.

Означення 1.7 Якщо $e = (v, w)$ - ребро графа, то v і w називаються *кінцями* ребра e.

Означення 1.8 Якщо $e = (v, w)$ - ребро графа, то можемо сказати, що ребро e *з'єднує* кінці v і w.

Означення 1.9 Вершину v і ребро e називають *інцидентними*, якщо v – кінець ребра e.

Означення 1.10 *Суміжні* ребра - ті, які мають спільну вершину.

Означення 2.1 *Степенем* $\delta(v)$ *вершини* v називають кількість інцидентних їй ребер.

Означення 2.2 *Ізольована* вершина - це та, яка має степінь 0.

Означення 2.3 *Кінцева*(або *висяча*) вершина - це та, яка має степінь 1.

Означення 3.1 *Марширутом* (або *шляхом*) у графі $G = (V, E)$ називають послідовність $v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_k, v_{k+1}$ вершин v_i та ребер e_i таку, що кожні два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, отже, $e_i = (v_i, v_{i+1})$, де $i = (1, 2, ..., k)$.

Означення 3.2 *Ланцюгом* називається маршрут, в якому всі ребра попарно різні.

Означення 3.3 *Простим ланцюгом* називається маршрут, в якому всі вершини попарно різні.

2.2 Основні означення з теми розфарбування графів

Нехай $G = (V, E)$ - довільний граф, а $N_k = 1, 2, ..., k$.

Означення 4.1 Будь-яке відображення $f : V \to N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$ називають *кольором*, або *номером фарби*, вершини v.

Означення 4.2 Розфарбування f графа G називають *правильним*, якщо для будь-яких його суміжних вершин v і w виконується $f(v) \neq f(w)$.

Означення 4.3 Мінімальне число k, для якого існує правильне розфарбування графа G, називають *хроматичним числом* графа G і позначають $\chi(G)$

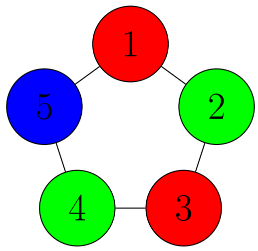

Рис. 1: Розфарбування вершин графа C_5, де $\chi(C_5) = 3$

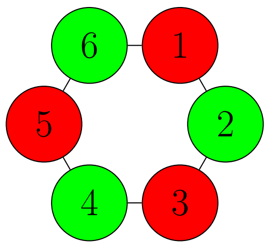

Рис. 2: Розфарбування вершин графа C_6, де $\chi(C_6) = 2$

Означення 4.4 *Кліка* в неорієнтованому графі $G = (V, E)$ це підмножина вершин $C \subseteq V$ така, що для кожних двох вершин в C, існує ребро, що поєднує ці вершини. Це тотожно до виразу, що підграф утворений C — повний (в деяких випадках, термін кліка може бути використаний для підграфу).

Означення 4.5 *Максимальна кліка* — кліка, яка не може бути розширена через додання однієї з суміжних вершин, тобто така, що не є частиною більшої кліки.

Означення 4.6 *Найбільша кліка*, або *максимум клік*, — кліка найбільшого можливого розміру в даному графі. Кліковe число $\omega(G)$ графу G — кількість вершин в максимумі клік в G.

Означення 4.7 *Хроматичний індекс* графа G, позначений як $\chi'(G)$, є найменшою кількістю кольорів, необхідних для розфарбування ребер графа таким чином, що жодне суміжне ребро не має однакового кольору. Формально, це означає, що для кожного ребра $e_1 = (u, v)$ та $e_2 = (v, w)$, які мають спільну вершину v, маємо: якщо e_1 та e_2 розфарбовані кольорами c_1 та c_2 відповідно, то $c_1 \neq c_2$.

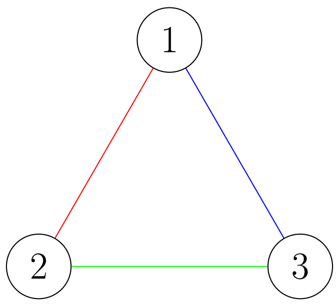

Рис. 3: Приклад розфарбування ребер графа K_3 з використанням 3 різних кольорів.

На рисунках можна побачити приклади розфарбування ребер графів K_3 та K_5. У графі K_3, ребра розфарбовані у 3 кольори: червоний, синій та зелений. У графі K_5, ребра розфарбовані у 5 кольорів: червоний, синій, зелений, помаранчевий та фіолетовий.

Теорема Візінга. *Теорема Візінга* для хроматичного індексу графів (оприлюднена в 1964) стверджує, що для будь-якого простого графа G з максимальним степенем вершин $\Delta(G)$, хроматичний індекс G не перевищує $\Delta(G)$ або $\Delta(G) + 1$. Другими словами, для будь-якого простого графа, хроматичний індекс не може бути більшим за максимальний ступінь вершин графа

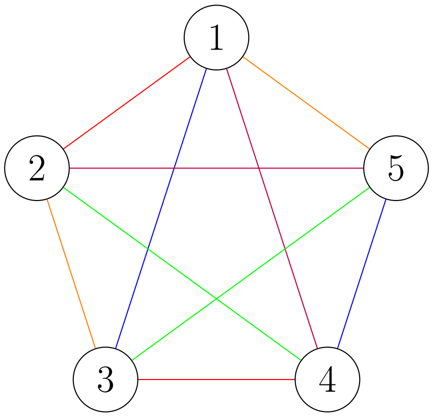

Рис. 4: Приклад розфарбування ребер графа K_5 з використанням 5 різних кольорів.

або на один більше за цей максимальний ступінь.

Наслідок з теореми Візінга. З теореми Візінга ми можемо отримати наступний наслідок: для будь-якого простого графа G, хроматичне число $\chi(G)$ графа G не перевищує $\Delta(G)+1$, де $\Delta(G)$ - максимальна ступінь вершини в графі G.

Теорема Брукса. *Теорема Брукса* встановлює зв'язок між максимальним степенем графа і його хроматичним числом. Згідно з теоремою, вершини зв'язного графу, у якому кожна вершина має не більше Δ сусідів, можуть бути пофарбовані не більше ніж в Δ кольорів, за винятком двох випадків — повний граф і граф-цикл непарної довжини, які вимагають $\Delta + 1$ кольорів.

Теорема про два вуха. *Теорема про два вуха* стверджує, що в кожного простого зв'язного графа, який має принаймні дві вершини і принаймні два ребра, є щонайменше дві вершини, степінь яких дорівнює 1. Іншими словами, в графі завжди знайдуться щонайменше дві вершини, які мають лише одне суміжне ребро.

3 Жадібний алгоритм

3.1 Опис жадібного алгоритму

Жадібний алгоритм — простий і прямолінійний евристичний алгоритм, який приймає найкраще рішення, виходячи з наявних на кожному етапі даних, не зважаючи на можливі наслідки, сподіваючись урешті-решт отримати оптимальний розв'язок. Легкий в реалізації і часто дуже ефективний за часом виконання. Багато задач не можуть бути розв'язані за його допомогою.

Алгоритм жадібного розфарбовування графів є простим і ефективним методом, який широко використовується в теорії графів. Він забезпечує ефективні реалізації, які можна використовувати для різноманітних завдань, таких як фарбування карти, процеси декомпозиції та тестування алгоритмів оптимізації.

Однією з переваг жадібного алгоритму є те, що його дуже легко зрозуміти та реалізувати. Цей алгоритм можна легко розширити для вирішення більш складних задач.

Жадібний алгоритм можна використовувати для розфарбовування графів із будь-якою кількістю вершин і ребер. Однак тривалість роботи алгоритму залежить від розміру графа та його структури вершин і ребер. У гіршому випадку жадібний алгоритм може мати складність $O(n^2)$. де n – кількість вершин у графі.

Незважаючи на свою простоту, жадібний алгоритм має деякі недоліки. Наприклад, алгоритм може розфарбувати певні графи занадто великою кількістю кольорів. Крім того, різні початкові умови можуть призвести до різних результатів, тому важливо враховувати цей аспект при використанні жадібного алгоритму для розфарбовування графів. Загалом, жадібний алгоритм розфарбовування графів є зручним і ефективним способом. Його простота та ефективність роблять його популярним у різних галузях, таких як інформатика, математика та інженерія. Жадібний алгоритм можна використовувати як самостійний метод або в поєднанні з іншими алгоритмами для вирішення різноманітних проблем.

Одним із прикладів використання жадібного алгоритму є проблема розфарбовування карти. У цій задачі графом є мапа, а вершинами - країни, які потрібно розфарбувати так, щоб жодні дві суміжні країни не мали одного кольору. Жадібний алгоритм може бути використаний для вирішення цієї задачі, вибираючи кольори для кожної країни таким чином, щоб вони не збігалися з кольорами її суміжних країн.

Загалом, жадібні алгоритми розфарбовування графів є потужними інструментами для вирішення різноманітних задач. Незважаючи на свої обмеження та недоліки, він залишається ефективним і простим способом розфарбовування графів різної структури та розміру.

3.2 Доведення

Доказом правильності алгоритму жадібного фарбування графа є те, що завжди існує така послідовність розфарбування вершин графу, яка дасть оптимальне розфарбування.

Давайте почнемо доведення з формалізації жадібного підходу. Жадібний алгоритм розфарбовування графів заснований на принципі вибору кольору для кожної вершини, таким чином, щоб використовувати якомога менше кольорів, що забезпечує правильне забарвлення графу. Цей принцип можна сформулювати так: на кожному кроці алгоритм вибирає найменший доступний номер кольору для фарбування поточної вершини.

Щоб довести правильність алгоритму, використаємо індукцію за кількістю вершин у графі. Базовий випадок (граф з однією вершиною) очевидний, тому розглянемо випадок графа з n вершинами.

Припустимо, що алгоритм правильно забарвлює підграф із $n-1$ вершинами, використовуючи мінімальну кількість кольорів. Потім, коли ми додаємо ще одну вершину до графа, алгоритм вибирає колір з найменшим номером, який ще не використовувався для суміжних вершин. Це забезпечує правильне фарбування нових вершин.

Це доводить, що жадібний алгоритм розфарбування графів завжди знаходить оптимальне рішення з мінімальною кількістю кольорів.

Важливо відзначити, що жадібний алгоритм розфарбовування графів не завжди знаходить найкраще забарвлення, якщо граф є двочастковим або деревом. Наприклад, якщо довжина графу перевищує 3 і він є циклом, то жадібний алгоритм може використовувати більше кольорів, ніж оптимальне розфарбування. Однак жадібний алгоритм часто є ефективним і простим способом розфарбування графів.

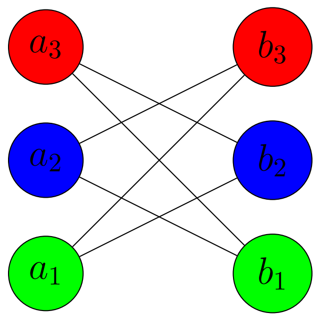

Рис. 5: Приклад неоптимального розфарбування двочасткового графа $K_{3,3}$ за допомогою жадібного алгоритму.

Ось приклад розфарбування графа з 5 вершинами за допомогою жадібного алгоритму. Розглянемо граф G з вершинами $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ та ребрами $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1), (v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$.

Для ілюстрації, давайте намалюємо граф:

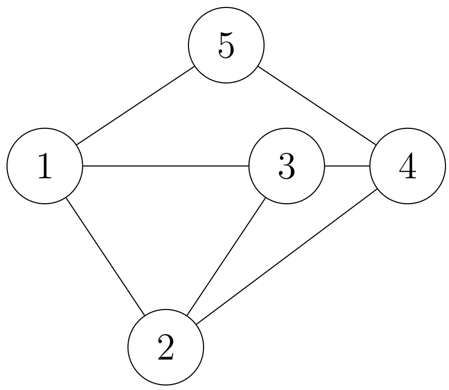

Рис. 6

Застосуємо жадібний алгоритм розфарбування графа:

1. Розфарбуємо вершину v_1 у колір 1.

2. Розфарбуємо вершину v_2 у колір 2, оскільки вона суміжна з v_1.

3. Розфарбуємо вершину v_3 у колір 3, оскільки вона суміжна з v_1 та v_2.

4. Розфарбуємо вершину v_4 у колір 1, оскільки вона не суміжна з v_1.

5. Розфарбуємо вершину v_5 у колір 2, оскільки вона суміжна з v_1 та v_4.

Ось розфарбований граф:

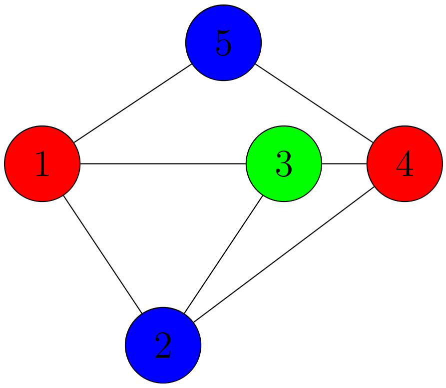

Рис. 7

Результат відповідає умовам розфарбування графа, де суміжні вершини мають різні кольори. Хроматичне число для цього графа становить 3, і жадібний алгоритм забезпечив оптимальне розфарбування для даного графа.

4 Реалізація жадібного алгоритму за допомогою мови програмування Python

Опишемо реалізацію жадібного алгоритму за допомогою мови програмування Python. Це не має бути складним, оскільки жадібний алгоритм розфарбування графів є досить легким як в розумінні, так і у відтворенні. Отже, жадібний алгоритм розфарбування графа працює наступним чином:

1. Обираємо послідовність вершин графа.
2. Для кожної вершини в послідовності виконуємо:
   (a) Обрати найменший можливий колір, який ще не використовується суміжними вершинами.
   (б) Присвоїти обраний колір вершині.

4.1 Представлення графа

Почнемо з основного, а саме представлення графу. В Python існує окрема бібліотека для роботи з графами, яка має багато корисних функцій для виконання будь-яких операцій над графами. Та цього разу нам цей потужний інструмент не буде потрібним, адже ми розглядаємо лише приклад.

Тому виберемо найпростіше представлення графа, а саме представлення у вигляді словника, де ключі - це вершини графа, а значення - це списки суміжних вершин.

```
graph = {
    "a": ["b", "c", "d"],
    "b": ["a", "c", "d"],
    "c": ["a", "b", "d"],
    "d": ["a", "b", "c"]
}
```

4.2 Функція розфарбування

Напишемо функцію для жадібного розфарбування графа.

```python
def greedy_coloring(graph):
    colors = {}
    for node in graph:
        available_colors =
         set(range(len(graph))) - {colors.get(neighbor)
         for neighbor in graph[node]}
        colors[node] = min(available_colors)
    return colors
```

4.3 Приклад розфарбування

Тепер застосуємо функцію жадібного розфарбування до нашого графа.

```python
coloring = greedy_coloring(graph)
print(coloring)
```

В результаті ми отримаємо розфарбування графа у вигляді словника, де ключі - вершини графа, а значення - кольори, присвоєні вершинам.

Давайте розглянемо приклад використання реалізованого жадібного алгоритму розфарбування графа з графом Петерсена. Спершу задамо граф Петерсена у вигляді словника:

```python
petersen_graph = {
    1: [2, 5, 6],
    2: [1, 3, 7],
    3: [2, 4, 8],
    4: [3, 5, 9],
    5: [1, 4, 10],
    6: [1, 8, 9],
    7: [2, 9, 10],
    8: [3, 6, 10],
    9: [4, 6, 7],
    10: [5, 7, 8]
}
```

Застосуємо функцію жадібного розфарбування до графа Петерсена:

```python
coloring = greedy_coloring(petersen_graph)
print(coloring)
```

В результаті ми отримаємо наступне розфарбування графа:

```
{1: 0, 2: 1, 3: 0, 4: 1, 5: 2, 6: 1, 7: 0, 8: 2, 9: 2, 10: 1}
```

Це означає, що вершинам графа присвоєні кольори відповідно до наступного словника:

- вершина 1 - колір 0
- вершина 2 - колір 1
- вершина 3 - колір 0
- вершина 4 - колір 1
- вершина 5 - колір 2
- вершина 6 - колір 1
- вершина 7 - колір 0
- вершина 8 - колір 2
- вершина 9 - колір 2
- вершина 10 - колір 1

Отже, граф Петерсена може бути розфарбований з використанням 3 різних кольорів.

4.4 Ілюстрація

На рис. 8 зображена ілюстрація графа Петерсена з розфарбуванням, отриманим за допомогою нашого алгоритму.

На ілюстрації видно, що жадібний алгоритм успішно знаходить розфарбування графа Петерсена з трьома кольорами, адже кожна вершина має різний колір від своїх сусідів. Цей приклад демонструє, як використовувати жадібний алгоритм розфарбування графа у поєднанні з Python.

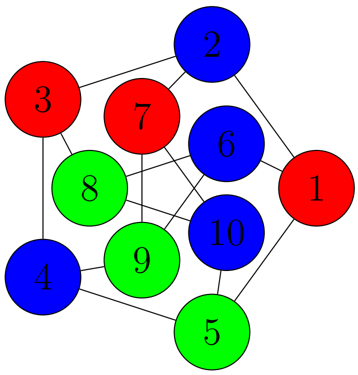

Рис. 8: Розфарбування графа Петерсена, отримане за допомогою жадібного алгоритму.

5 Доведення: Хроматичне число графа Q_n дорівнює 2

Для доведення цього твердження, ми спочатку покажемо, що граф гіперкуба Q_n є двочастковим.

5.1 Граф гіперкуба є двочастковим

Розглянемо граф гіперкуба Q_n. Його вершини можна представити у вигляді бінарних рядків довжиною n. Розіб'ємо вершини на дві множини A та B таким чином:

1. Множина A містить вершини, для яких кількість одиниць у бінарному рядку парна.

2. Множина B містить вершини, для яких кількість одиниць у бінарному рядку непарна.

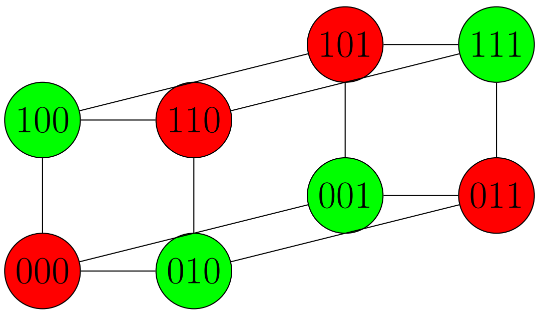

Рис. 9: Розфарбування вершин графа Q_3 згідно з множинами A та B.

Тепер, кожне ребро графа Q_n сполучає вершини, бінарні рядки яких відрізняються лише одним бітом. Тобто, коли ми змінюємо один біт, ми змінюємо парність кількості одиниць у бінарному рядку. Отже, кожне ребро сполучає вершину з множини A та вершину з множини B. Це означає, що граф Q_n є двочастковим.

5.2 Хроматичне число не пустого двочасткового графа дорівнює 2

Оскільки ми показали, що граф гіперкуба Q_n є двочастковим, ми можемо використовувати властивості двочасткових графів для визначення хроматичного числа.

Не пустий двочастковий граф має хроматичне число 2, оскільки кожне ребро графа сполучає вершини з різних множин A та B. Це означає, що ми можемо розфарбувати граф, використовуючи лише два кольори, таким чином, що кожне ребро сполучає вершини різних кольорів. Зокрема, ми можемо розфарбувати вершини множини A одним кольором та вершини множини B іншим кольором.

Таким чином, хроматичне число графа Q_n дорівнює 2.

6 Доведення: Хроматичне число графа K_n дорівнює n

6.1 Означення графа K_n

Граф K_n є повним графом на n вершинах. Він містить всі можливі ребра між n вершинами, тобто кожна пара вершин сполучена ребром.

6.2 Доведення

Щоб довести, що хроматичне число графа K_n дорівнює n, ми спочатку покажемо, що ми можемо розфарбувати граф за допомогою n кольорів, а потім покажемо, що ми не можемо використовувати менше ніж n кольорів.

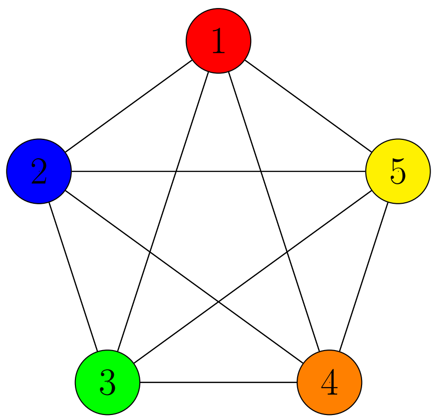

Рис. 10: Приклад розфарбування графа K_5 з використанням 5 різних кольорів.

1. Розфарбування графа за допомогою n кольорів:

Оскільки граф K_n є повним графом, кожна вершина є суміжною з усіма іншими вершинами. Тому, якщо ми розфарбуємо кожну вершину унікальним кольором, то жодні дві суміжні вершини не будуть мати однаковий колір.

2. Неможливість розфарбування графа за допомогою менше ніж n кольорів:

Тепер доведемо, що неможливо розфарбувати граф K_n за допомогою менше ніж n кольорів. Припустимо, що існує розфарбування графа K_n з k кольорами, де $k < n$. Оскільки кожна вершина графа є суміжною з усіма іншими вершинами, для кожної вершини є $n - 1$ суміжних вершин. Однак, якщо ми маємо лише $k < n$ кольорів, то хоча б одна з суміжних вершин матиме той самий колір, що й розглядувана вершина, що суперечить умові правильного розфарбування.

Отже, ми довели, що хроматичне число графа K_n дорівнює n, оскільки ми можемо розфарбувати граф за допомогою n кольорів, але не можемо розфарбувати його за допомогою менше ніж n кольорів.

7 Доведення: Хроматичний індекс графу $K_{n,n}$ дорівнює n

7.1 Означення графу $K_{n,n}$

$K_{n,n}$ - це повний двочастковий граф з n вершинами у кожній частині, де кожна вершина першої частини пов'язана з кожною вершиною другої частини за допомогою ребра. Іншими словами, $K_{n,n}$ складається з двох долей, кожна з яких містить n вершин, і всі вершини з однієї частини пов'язані з усіма вершинами з іншої частини.

Цей граф є прикладом повного двочасткового графу, тобто двочасткового графу, в якому кожна вершина з першої частини пов'язана з кожною вершиною з другої частини за допомогою ребра. Граф $K_{n,n}$ має $2n$ вершин і n^2 ребер.

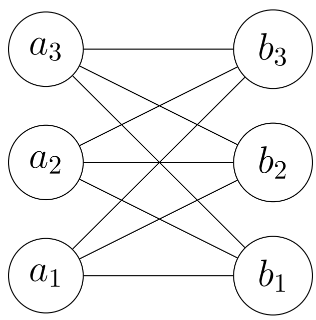

Рис. 11: Приклад графа $K_{n,n}$, де $n = 3$.

7.2 Доведення

Щоб довести, що хроматичний індекс графу $K_{n,n}$ дорівнює n, ми можемо показати, що потрібно принаймні n кольорів для розфарбування ребер цього графу, а також що можна розфарбувати всі ребра графу $K_{n,n}$ за допомогою рівно n кольорів.

Візьмемо граф $K_{n,n} = (V, E)$, де $V(K_{n,n}) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Відповідно, визначимо множину ребер, які фарбуються в колір 1: $E_1 = \{(1, n+1), (2, n+2) \ldots, (n, 2n)\}$. Аналогічно, для всіх ребер кольору 2 визначимо множину E_2, яка буде виглядати наступним чином: $E_2 = \{(1, n+2), (2, n+3), \ldots, (n-1, 2n), (n, n+1)\}$.

Тепер можемо вивести формулу, для множини ребер E_k, які пофарбовані в колір k:

$$E_k = \{(1, n+k), (2, n+k+1), \ldots, (n-k+1, 2n), (n-k+2, n+1), \ldots, (n, n+k-1)\},$$

де $k = \overline{1, n}$.

Отже, ми довели, що існує формула, за допомогою якої можна розфарбувати ребра графу $K_{n,n}$ в n кольорів. Таким чином, хроматичний індекс графу $K_{n,n}$ дорівнює n.

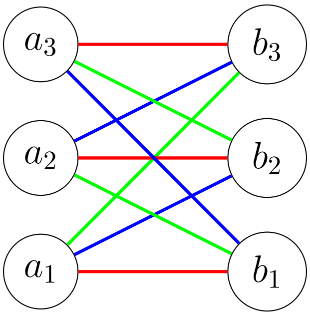

Рис. 12: Приклад розфарбування ребер графа $K_{3,3}$

8 Хроматичний поліном

8.1 Означення

Хроматичний поліном один з найпоширеніших способів визначення кількості можливих розфарбувань вершин графів за допомогою визначеної кількості кольорів. Він допомагає вирішувати багато задач, пов'язаних з розфарбуванням графів, а саме: знаходження кількості розфарбувань або знаходження хроматичного числа графу.

Хроматичний поліном графа G виглядає як $P(G, k)$, який описує розфарбування вершин графа G за допомогою k кольорів. Хроматичний поліном може визначатись так:

Якщо граф G складається з однієї вершини, то його хроматичний поліном буде виглядати $P(G, k) = k$.

Якщо граф G має тільки не суміжні вершини, то поліном буде $P(G, k) = k^{|V(G)|}$.

Якщо граф G має суміжні вершини v та u, то його хроматичний поліном виглядатиме

$$P(G, k) = P(G - e, k) - (k - 1)P(G \setminus e, k),$$

де e - ребро, між вершинами u та v, $G - e$ - граф, отриманий видаленням ребра e, а $G \setminus e$ - граф, отриманий видаленням обох кінців ребра e.

За допомогою хроматичного полінома можна знайти мінімальне число кольорів, яких необхідно для правильного розфарбування графу, тобто хроматичне число. Хроматичним числом графа G є те k, для якого виконується нерівність $P(G, k) > 0$.

8.2 Теорема про рекурентні співвідношення для хроматичного полінома

Рекурентний метод обчислення хроматичного многочлена базується на операції стягування ребра – для пари вершин v та w граф $G \backslash vw$ отримується шляхом стягування ребра vw.

Хроматичний многочлен задовольняє наступному рекурентному співвідношенню:

$$P(G,k) = P(G-vw,k) - P(G\backslash vw,k),$$

де v та w - суміжні вершини та $G-vw$ - граф, з видаленим ребром vw.

Еквівалентно $P(G,k) = P(G+vw) + P(G\backslash vw,k)$, якщо v та w не суміжні та $G+vw$ - граф з доданим ребром vw.

8.3 Теорема про властивості хроматичного полінома

Для будь-якого графа G функція $\chi_G(k)$ має наступні властивості:

1. Функція $\chi_G(k)$ є многочленом з цілими коефіцієнтами;
2. Степінь $\chi_G(k)$ дорівнює кількості вершин G;
3. Старший коефіцієнт дорівнює 1;
4. Коефіцієнт при доданку k^{n-1} від'ємний та за модулем рівний кількості ребер в графі G;
5. Коефіцієнт при k^i дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли i менше за кількість компонент зв'язності графу G (зокрема, вільний член завжди дорівнює 0);
6. Знаки коефіцієнтів чергуються.

8.4 Теорема Вітні

Нехай G - граф з v вершин та e ребер, та нехай $G_1, G_2, \dots G_{c(G)}$ - всі компоненти зв'язності графа G, де x - натуральне число. Тоді:

1. $P(G,x) = P(G_1,x) \cdot P(G_2,x) \cdot \ldots \cdot P(G_{c(G)},x)$
2. $P(\overline{K_v},x) = x^v$, $P(K_v,x) = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-v+1)$, $P(T_v,x) = x(x-1)^{v-1}$
3. Для зв'язного графа G: $P(G,x) \le x(x-1)^{v-1}$.
   Знак рівності з'являється тоді і тільки тоді, коли граф G - дерево.

4. Знаки коефіцієнтів кожного хроматичного поліному чергуються, старший коефіцієнт дорівнює 1, та степінь дорівнює $|V(G)|$. Відповідно, можемо записати:

$$P(G,x) = x^v - a_1x^{v-1} + a_2x^{v-2} - \ldots + (-1)^{v-k}a_{v-k}x^k, a_i \geq 0.$$

8.5 Хроматичні поліноми класичних класів графів

Хроматичний поліном є важливим інструментом у теорії розфарбування графів, який надає інформацію про кількість способів розфарбування графа залежно від кількості доступних кольорів. У цьому підрозділі ми розглянемо хроматичні поліноми деяких класичних класів графів, зокрема:

1. Граф K_3 (трикутник): Граф K_3 є простим графом, який складається з трьох вершин, кожна з яких є суміжною з усіма іншими. Хроматичний поліном графа K_3 дорівнює $t(t-1)(t-2)$, оскільки для розфарбування трьох вершин ми можемо використати будь-які три кольори з доступних.

2. Повний граф K_n: Повний граф K_n містить n вершин, кожна з яких є суміжною з усіма іншими. Хроматичний поліном графа K_n дорівнює $t(t-1)(t-2)\ldots(t-n-1)$, оскільки для розфарбування n вершин ми повинні використати n різних кольорів.

3. Шлях P_n: Шлях P_n складається з n вершин, які утворюють послідовність із одним спільним ребром між кожною парою сусідніх вершин. Хроматичний поліном графа P_n дорівнює $t(t-1)^{(n-1)}$, оскільки для розфарбування шляху з n вершинами ми можемо використати перший колір для першої вершини, а для кожної наступної вершини ми маємо $(t-1)$ можливих варіантів.

4. Дерево з n вершинами: Хроматичний поліном дерева з n вершинами дорівнює $t(t-1)^{(n-1)}$, так як для розфарбування дерева з n вершинами ми можемо використати той самий підхід, що й для шляху P_n.

5. Цикл C_n: Цикл C_n складається з n вершин, які утворюють замкнену послідовність ребер. Хроматичний поліном графа C_n дорівнює $(t-1)^n +$

$(-1)^n(t-1)$, оскільки для розфарбування циклу з n вершинами ми маємо додаткове обмеження, що перша та остання вершини мають різний колір.

Доведення. Доведемо за допомогою індукції.

База індукції: $n = 3$:

$P(C_3, t) = t(t-1)(t-2) = (t^3-3t^2+3t-1)-(t-1) = (t-1)^3+(-1)^3(t-1)$,

що задовольняє формулювання теореми.

Індукційний крок: нехай $P(C_k, t) = (t-1)^k + (-1)^k(t-1)$.

Розглянемо випадок $n = k+1$. За теоремою про рекурентні формули для хроматичних поліномів:

$$P(C_{k+1}, t) = P(C_{k+1} \backslash e, t) - P(C_{k+1}/e, t),$$

де e - довільне ребро C_{k+1}, також граф C_{k+1}/e ізоморфний C_k, а граф $C_{k+1} \backslash e$ - граф-ланцюг. Тоді

$$P(C_{k+1}, t) = P(T_{k+1}, t) - P(C_k, t) = t(t-1)^k - (t-1)^k - (-1)^k(t-1) =$$
$$= (t-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(t-1)$$

6. Граф-колесо W_n: Формула для хроматичного полінома графа-колеса W_n має наступний вигляд:

$$P(W_n, t) = t(t-2)((t-2)^{n-2} + (-1)^{n-1})$$

Доведення. Нехай W_n - граф-колесо з n вершинами. Якщо вибрати та зафіксувати один з t кольорів на вершині, яка зв'язана зі всіма вершинами (центром колеса), то отримаємо $P(C_{n-1}, t-1)$ варіантів розфарбування графа, який у нас залишиться. Відповідно, хроматичний поліном графа-колеса буде мати вигляд:

$$P(W_n, t) = t \cdot P(C_{n-1}, t-1) = t((t-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t-2))$$

7. Граф Петерсона: Граф Петерсона є некубічним двоярусним графом, що складається з 10 вершин і 15 ребер. Хроматичний поліном графа Петерсона дорівнює $t(t-1)(t-2)(t^7-12t^6+67t^5-230t^4+529t^3-814t^2+775t-352)$,

оскільки для його розфарбування ми маємо два різних обмеження: перша група вершин та друга група вершин мають різні кольори, а також вершини всередині кожної групи мають різні кольори.

Ці приклади хроматичних поліномів класичних класів графів демонструють різноманітність та варіації у розфарбуванні графів залежно від їх структури та характеристик.

8.6 Хроматичний поліном графа-триангуляції n-кутника

Твердження. Нехай G - граф-триангуляції n-кутника, тоді його хроматичний поліном буде мати вигляд:

$$P(G,t) = t(t-1)(t-2)^{n-2}$$

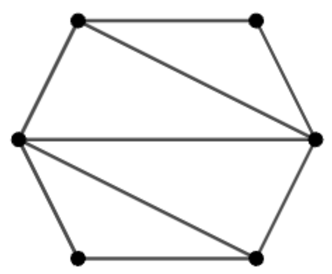

Рис. 13: Граф-триангуляції шестикутника

Доведення. Доведемо за допомогою індукції за n.

База індукції: $n = 3$ очевидна.

У цьому випадку $P(G,t) = t(t-1)(t-2)^{3-2} = t(t-1)(t-2)$, отже G при $n = 3$ ізоморфний графу K_3.

Індукційний крок: $n \to n+1$

За теоремою про два вуха у довільного n-кутника P $(n > 3)$ при довільній триангуляції існують два вуха (тобто трикутники триангуляції, двома сторонами яких є сторони n-кутника P).

Розглянемо якесь вухо. Не втрачаючи загальності, позначимо послідовно вершини вуха A_1, A_2, A_3. Розглянемо многокутник $A_1, A_3, A_4, \ldots, A_n$ - це $(n-1)$-кутник, з індукованою триангуляцією.

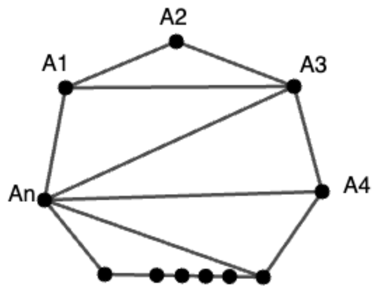

Рис. 14: Граф G

За припущенням індукції кількість способів розфарбувати граф-триангуляції цього $(n-1)$-кутника дорівнює $t(t-1)(t-2)^{n-3}$.

Вершини A_1 та A_3 при довільному правильному розфарбуванню пофарбовані в два різні кольори. Тоді для розфарбування вершини A_2 графа-триангуляції початкового n-кутника є $(t-2)$ способи. Таким чином

$$P(G,t) = t(t-1)(t-2)^{n-3}(t-2) = t(t-1)(t-2)^{n-2},$$

що і треба було довести.

8.7 Приклад використання хроматичного поліному: Задача про розклад для ПМ-4

Чотири практики: Аналіз даних, Функціональний аналіз, Рівняння математичної фізики, Математичні методи машинного навчання, кожна займає час одної пари, потрібно провести або в понеділок на першій, другій та п'ятій парах, або в четвер на другій, третій, четвертій та п'ятій парах. В таблиці 1 задано неможливість одночасного проведення практик за дисциплінами.

Знайти кількість можливих варіантів розподілу практик по парам для першого варіанту та для другого.

Розв'язання. Використовуючи табл. 1, побудуємо граф H несумісності практик.

Кожній парі по розкладу призначимо певний колір, відповідно в першому випадку в нас 3 кольори, в другому 4. Тоді кількістю варіантів розподілення

Дисципліни	АД	ФА	РМФ	ММMН
АД		+	+	
ФА	+		+	
РМФ	+	+		+
ММMН			+	

Табл. 1: Таблиця несумісності проведення практик

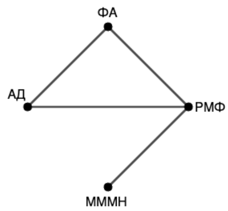

Рис. 15: Граф H

практик в певний день буде рівним числу можливих розфарбувань графа H трьома та чотирма кольорами відповідно.

Знайдемо хроматичну функцію побудованого графа G за допомгою графічних перетворень наступним чином:

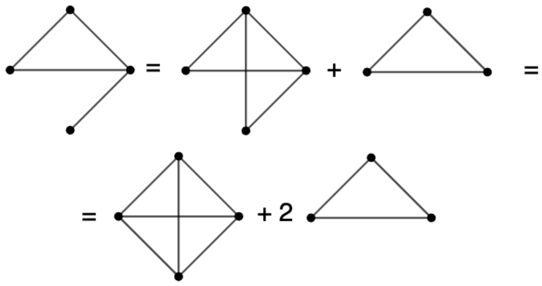

Рис. 16: Представлення $f(G,t)$ у вигляді комбінації хроматичних поліномів повних графів

З цього бачимо, що

$$f(G,t) = f(K_4,t) + 2f(K_3,t) =$$

$$= t(t-1)(t-2)(t-3) + 2 \cdot t(t-1)(t-2) =$$

$$= t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t$$

Отже, $f(H, 3) = 12$, а $f(H, 4) = 72$. Відповідно, існує 12 варіантів розподілення практик в понеділок, та 72 варіанта проведення практик в четвер.

8.8 Приклад використання хроматичного поліному: злиття вершин

Розглянемо інший приклад. Маємо граф H який складається з 6 вершин та 9 ребер.

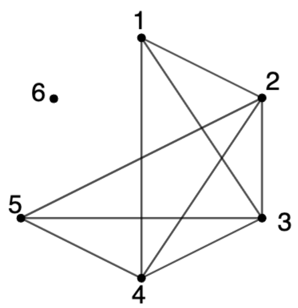

Рис. 17: Граф H

Потрібно знайти хроматичний поліном графа та обчислити кількість способів розфарбування графа за допомогою 3 кольорів.

Є два варіанта розв'язання цієї задачі: привести граф H до вигляду K_6 та привести граф H до вигляду K_5. Виберемо оптимальніший варіант, а саме приведення до K_5.

Знайдемо хроматичний поліном графа H за допомогою графічних перетворень, зокрема операції додавання ребра та злиття вершин:

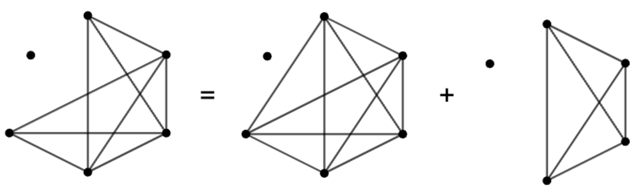

Рис. 18: Представлення $f(H, t)$ у вигляді комбінації хроматичних поліномів повних графів

Відповідно, маємо:

$$f(H,t) = f(K_5 + K_1, t) + f(K_4 + K_1, t) =$$

$$= t \cdot t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + t \cdot t(t-1)(t-2)(t-3) =$$

$$= t^6 - 9t^5 + 29t^4 - 39t^3 + 18t^2$$

Тепер обчислимо кількість способів розфарбування графу за допомогою $t = 3$ кольорів:

$$f(H,3) = 3^6 - 93^5 + 293^4 - 393^3 + 183^2 = 0$$

Отже, можемо зробити висновок, що розфарбувати граф H за допомогою 3 кольорів неможливо, бо $f(H,3) = 0$.

8.9 Приклад використання хроматичного поліному: видалення ребра

Маємо граф для якого потрібно знайти хроматичний поліном та кількість можливих розфарбувань за допомогою 5 кольорів.

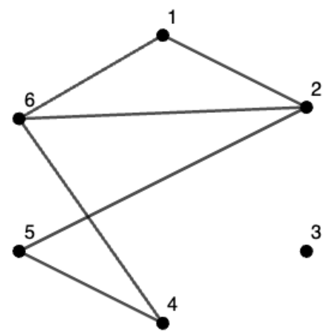

Рис. 19: Граф H

Для розв'язання цієї задачі спробуємо за допомогою графічних перетворень, а саме операції видалення ребра, привести граф H до вигляду двочасткового графу.

Можемо скористатись наступним алгоритмом для знаходження хроматичного поліному графа H:

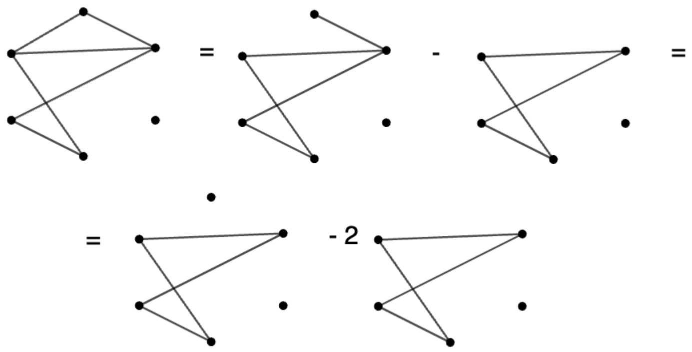

Рис. 20: Представлення $f(H,t)$ у вигляді комбінації хроматичних поліномів двочасткових графів

Тепер можемо визначити формулу хроматичного поліному для графу H:

$$f(H,t) = f(2K_1+K_{2,2},t)^2 - 2f(K_1+K_{2,2},t) = t^2\cdot(t(t-1))^2 - 2(t\cdot(t(t-1))^2) =$$

$$= t^6 - 4t^5 + 5t^4 - 2t^3$$

За допомогою попередньої формули обчислимо $f(H,5)$:

$$f(H,5) = 5^6 - 45^5 + 55^4 - 25^3 = 6000$$

Отже, розв'язком задачі, а саме кількість правильних можливих розфарбувань за допомогою 5 кольорів графу H, буде $f(H,5) = 6000$.

8.10 Приклад використання хроматичного поліному: комбінування операцій

Розглянемо складніший граф H, потрібно знайти його хроматичний поліном та кількість можливих розфарбувань за допомогою 5 кольорів.

Отже, скористаючись операцією видалення ребра, зробимо перший крок. Видалимо ребро (4,6). (рис. 22)

З результату можемо побачити, що два отриманих графа ідентичні, крім однієї вершини зі степенем 0, відповідно можем виразити поліном другого

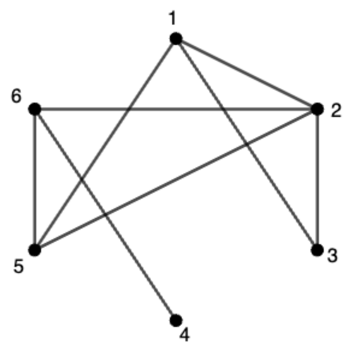

Рис. 21: Граф H

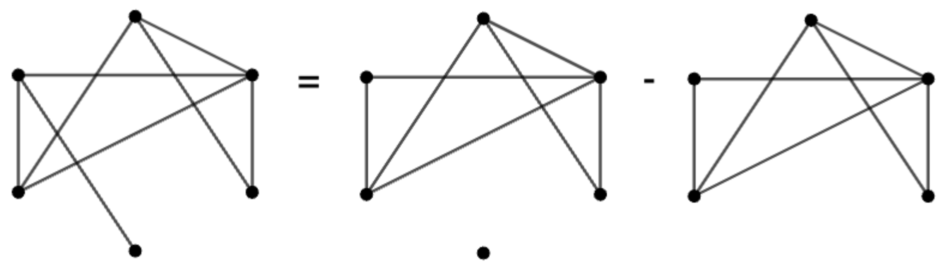

Рис. 22: Результат після першої операції

графа через поліном першого:

$$f(G_2, t) = f(G_1, t)/t$$

Відповідно, тепер можемо отримати формулу: $f(H, t) = f(G_1, t) - f(G_1, t)/t$. Отже, нам достатньо буде знайти хроматичний поліном графа G_1, що суттєво спрощує розв'язання.

Тепер за допомогою графічних перетворень спробуємо знайти хроматичний поліном знайденого графа G_1 (рис. 23).

Тепер можемо записати хроматичний поліном графа G_1:

$$f(G_1, t) = f(3K_1 + K_3, t) - f(2K_1 + K_3, t) - 2 \cdot f(2K_1 + K_3, t) + 2 \cdot f(K_1 + K_3, t) -$$

$$- f(K_1 + K_4, t) - f(K_1 + K_3, t)$$

Запишемо $f(G_1, t)$ у вигляді рівняння від t:

$$f(G_1, t) = (t^3 \cdot t(t-1)(t-2)) - (t^2 \cdot t(t-1)(t-2)))-$$

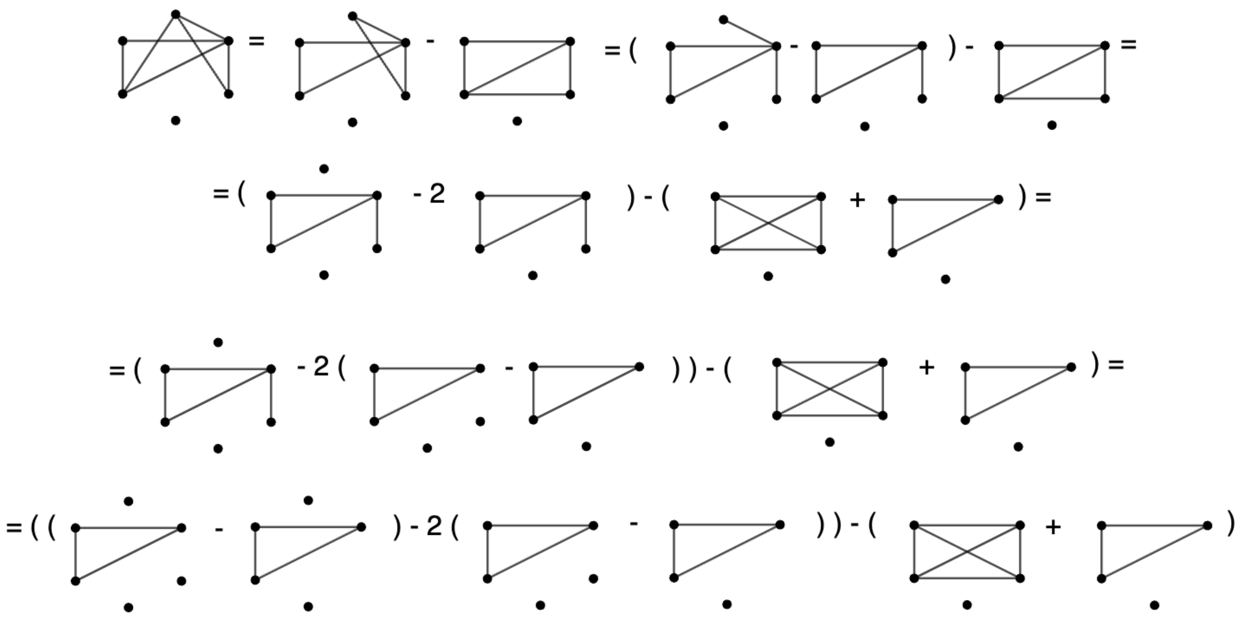

Рис. 23: Представлення $f(G_1, t)$

$$-2 \cdot (t^2 \cdot t(t-1)(t-2)) + 2 \cdot (t \cdot t(t-1)(t-2)) -$$

$$-(t \cdot t(t-1)(t-2)(t-3)) - (t \cdot t(t-1)(t-2)) =$$

$$= t^6 - 7t^5 + 18t^4 - 20t^3 + 8t^2$$

Тепер можемо отримати хроматичний поліном для графа H:

$$f(H, t) = f(G_1, t) - f(G_1, t)/t =$$

$$= t^6 - 7t^5 + 18t^4 - 20t^3 + 8t^2 - (t^6 - 7t^5 + 18t^4 - 20t^3 + 8t^2)/t =$$

$$= t^6 - 8t^5 + 25t^4 - 38t^3 + 28t^2 - 8t$$

Обчислимо тепер $f(H, 5)$:

$$f(H, 5) = 5^6 - 8 \cdot 5^5 + 25 \cdot 5^4 - 38 \cdot 5^3 + 28 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 2160$$

Отже, отримали розв'язок задачі:
$f(H, t) = t^6 - 8t^5 + 25t^4 - 38t^3 + 28t^2 - 8t$
$f(H, 5) = 2160$

Висновки

У цій кваліфікаційній роботі була проведена детальна аналітична робота з теорії розфарбування графів. Були розглянуті основні означення з теорії графів, включаючи графи, розфарбування та хроматичне число графа.

Досліджено жадібний алгоритм розфарбування графів, включаючи його опис та доведення його коректності. Була реалізована програмна реалізація жадібного алгоритму за допомогою мови програмування Python, яка дозволяє розфарбувати графи та візуалізувати результати.

Також було доведено три важливі теореми: про хроматичне число графа Q_n, про хроматичне число графа K_n та про хроматичний індекс графа $K_{n,n}$. Ці теореми мають велике значення в теорії графів і розкривають особливості їх розфарбування.

Також розглянуто хроматичний поліном, включаючи його означення та основні властивості. Було досліджено хроматичні поліноми класичних класів графів, таких як K_3, повний граф K_n, шлях P_n, будь-яке дерево з n вершинами, цикл C_n, граф-колесо W_n (з доведеннями) та граф Петерсона. Представлено приклади використання хроматичного поліному для різних задач.

Отже, ця робота детально розглядає розфарбування графів та вивчає основні теоретичні аспекти та практичні застосування. Результати цієї роботи можуть бути корисні для подальших досліджень в теорії графів та використання їх у різних практичних ситуаціях.

Список літератури

1. *Reinhard Diestel. Graph Theory*, Electronic Edition, Springer, 2000.

2. *Jonathan L. Gross*, Jay Yellen. Handbook of Graph Theory, 2004.

3. *Read, R. C. "An Introduction to Chromatic Polynomials."* J. Combin. Th. 4, 52-71, 1968.

4. *Aydelotte, Amanda, "An Exploration of the Chromatic Polynomial"* (2017). Mathematics Undergraduate Theses. 7.

5. *R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Volume 37, Issue 2, April 1941, pp. 194 – 197

6. *M. Aigner, G.M. Ziegler. Proofs from THE BOOK, Springer, 2003.*

7. *Noga Alon, Michael Krivelevich, Benny Sudakov. Coloring graphs with sparse neighborhoods.* Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1999.

8. *Alexander Soifer. The Mathematical Coloring Book.* — 2008. — P. 136–137.