УДК 517.937

Кашпіровський О. І., Митник Ю. В.

ПРО ПОВЕДІНКУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ З ПРОСТОРІВ ЛЕБЕГА

Досліджується поведінка на нескінченності гладких функцій з просторів Лебега $Lp(R^1,dx)$. Бетановпено, що такі функції прямують до нуля при $x \to \infty$, але швидкість прямування може бути як завгодно повільною.

Нехай $E_p = L_p(R^1, dx)$ — функціональний простір Лебега, що складається з комплекснозначних функцій $f(x)$, які мають сумовний р-тий степінь (р > 1) модуля:

$$\|f\|^p_{E_p} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

Відносно норми $\|\cdot\|_{E_p}$ E_p є банаховим простором (при p = 2 маємо гільбертів простір). Розглянемо в E_p оператор *А,* який породжується операцією диференціювання $A\,f = i\frac{df}{dx}$. Цей оператор визначений на щільній в *Е* множині фінітних нескінченно диференційовних функцій $\mathbf{D}(R^1)$ та допускає замикання [1]. Отже, можна вважати, що *А* — замкнений оператор. При ρ = 2 *А*— самоспряжений оператор.

В цій роботі досліджується поведінка на нескінченнесті функцій $f(x)$ з $L_p(R^1, dx)$, гладких відносно оператора *А,* тобто функцій з *D(A)* — області визначення оператора .4. а також з областей визначення степенів та цілих функцій від оператора *А.* Області визначення $D(A^k)$ $k \in N$ цілих степенів оператора .4 прийнято називати просторами Соболева $W^k_p(R^1)$. Відносно норми

$$\|f\|_{W^k_p(R^1)} = \left(\int_{R^1} (|f(x)|^p + \left|f^{(k)}(x)\right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ці простори є банаховими ($W^k_2(R^1)$, $k \in N$ є пільбертовими просторами). Вважаємо, що

$$W^0_p(R^1) = L_p(R^1, dx).$$

Для довільних p і q, таких що $1 \le p < q < +\infty$ за теоремою про вкладення мають місце включення [2]: $W^k_p(R^1) \subset W^{k-1}_q(R^1), k \in N$. Крім того, $W^k_p(R^1)$ вкладається в простір $C^{k-1}(R^1)$—$k-1$ раз неперервно диференційовних функцій з нормою $\|f\|_{C^m(R^1)} = \sup\limits_{x\in R^1} |f(x)| + \sup\limits_{x\in R^1} \left|f^{(m)}(x)\right|$. Точніші формулювання для просторів Соболева дробових порядків наведено в роботах [2,3].

Відомо, що неперервні функції з простору $E_p = L_p(R^1, dx)$ **не обов`язково** прямують до нуля при $x \to \infty$ і можуть бути необмеженими на нескінченності [4]. Справді, нехай

$$L(x) = \begin{cases} 1 - |x|; & |x| \le 1, \\ 0; & |x| \ge 1 \end{cases}$$

— фінітна функція з носієм [—1; 1]. Функцію $f(x)$ визначимо за допомогою ряду

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left[L\left(|x| - 2n\right)\right]^{n^4}.$$

При кожному $x \in R^1$ у цьому ряді тільки один доданок може бути відмінним від нуля. Отже, $f_0(x)$— неперервна необмежена на R^1 функція. Разом з тим ця функція належить $L_2(R^1, dx)$:

$$\|f_0\|^2_H = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x)|^2 dx =$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_{-1}^{1} (1 - |x|)^{n^4}_{.} \, dx = 4\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^1 x^{n^4} dx =$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} < 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} < +\infty.$$

Функції $f(x)$ з просторів Соболева $W^k_p(R^1)$ при $x \to \infty$ прямують до нуля. Так, для $f \in W^k_1(R^1), k \in$ $\in N$ це випливає з інтегральних представлень функції $f(x)$ через похідну $f'(x)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)dt = -\int_{x}^{+\infty} f'(t)dt.$$

Оскільки $f' \in W^{k-1}_1(R^1) \subset L_1(R^1, dx)$, то ці інтеграли є збіжними, а отже $f(x)$ прямує до нуля при $x \to \infty$. Для $p > 1$ аналогічні Інтегральні представлення можна записати для довільного цілого степеня $r \geq p$

$$f^r(x) = r\int\limits_{-\infty}^{x} f^{r-1}(t)f'(t)dt =$$

$$= -r\int\limits_{x}^{+\infty} f^{r-1}(t)f'(t)dt.$$

Збіжність невласних інтегралів випливає з нерівності Гельдера, яка дає змогу оцінити інтеграл $\int\limits_{A}^{B} f^{r-1}(x)\cdot f'(x)dx$ при довільних A та $B - \infty < A < B < +\infty$ через норми функцій $f(x)$ та $f'(x)$:

$$\left|\int\limits_{A}^{B} f^{r-1}(x)f'(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{R^1} |f(x)|^{\frac{p(r-1)}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\int\limits_{R^1} |f'(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f\|^{\frac{p}{p-1}}_{L_q(R^1,dx)} \cdot \|f'\|^p_{L_p(R^1,dx)},$$

де $q = \frac{p(r-1)}{p-1} > p$. (Отже, за теоремою про вкладення $f \in L_q(R^1, dx)$).

Одному з авторів цього повідомлення М. Л. Горбачук поставив запитання: чи можна вказати порядок прямування до 0 при $x \to \infty$ для функцій $W_2^k(R^1)$, наприклад, чи має місце оцінка типу

$$|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-\varepsilon} \qquad (1)$$

при деякому $\varepsilon > 0$ ($C > 0$, C залежить від /)? Для функцій з $W_2^k(R^1)$, $k > 0$ в такому разі «природно» було б очікувати поліпшення оцінки (1). Задачу про поведінку на нескінченності можна розглянути і для просторів Соболева $W_p^k(R^1)$, $1 \leq p < +\infty$.

Відповідь на ці запитання, як доведено далі, негативна. В загальному випадку функції з $W_p^l(R^1)$ та їх похідні до $(l-1)$-го порядку включно прямують до 0 при $x \to \infty$, але швидкість прямування може бути як завгодно повільною.

Покажемо спочатку, що оцінка (1) не може не мати місця для функцій з $W_2^1(R^1)$. Оскільки перетворення Фур'є $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{R^1} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ встановлює ізометричну відповідність між $W_2^1(R^1)$ та $L_2(R^1, x^2dx)$, то внаслідок теореми про вкладення [4] виконання (1) при $\varepsilon > \frac{1}{2}$ для всіх функцій з $W_2^1(R^1)$ означало б. що всі функції з $L_2(R^1, x^2dx)$ є неперервними, що, очевидно, не так. Має місце:

Теорема 1. *Нехай $G(x)$ — довільна додатна, неперервна, строго спадна на $[0, +\infty)$ функція, така що:*

$$G(0) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} xG(x) = +\infty.$$

Тоді для будь-якого $k \in N$ та будь-якого $p \in [1, +\infty)$ в просторі $W_p^k(R^1)$ знайдеться така функція $f(x) = f_{pk}(x)$, що оцінки $|f(x)| \leq C \cdot G(x)$ не виконуються за жодного C>0.

Доведення, Побудуємо функцію $f_{pk}(x)$ зі зсувів деякої гладкої фінітної функції $\varphi(x)$ з $W_p^k(R^1)$

$$f_{pk}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi(x - x_n), \qquad (2)$$

де $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(0) = \max\limits_{x\in R^1}\varphi(x)$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність додатних чисел, така що $a_n \leq 1$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p < +\infty$.

Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ виберемо так, щоб носії окремих доданків ряду (2) не перекривались і щоб $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{G(x_n)} = \infty$.

При $k = 1$ покладемо $\varphi(x) = L(x)$. При інших $k \in N$ нехай $\varphi(x)$ є базисний В-сплайн $B_k(x)$, який є «типовим представником» простору $W_p^k(R^1)$.

Нагадаємо, що сплаини $B_k(x)$ $(k = 0; 1; 2; \ldots)$ визначаються рекурентними формулами [5, с. 23]:

$$B_0(x) = \begin{cases} 1: & |x| \leq \frac{1}{2}; \\ 0: & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$
$$B_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B_{k-1}(x-y)B_0(y)dy. \qquad (3)$$

(Сплайн $B_1(x) = L(x)$).

Для описання властивостей сплайнів $B_k(x)$ скористаємось очевидною ймовірнісною інтерпретацією В-сплайнів. Оскільки $B_0(x)$ є щільністю рівномірно розподіленої на $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ випадкової величини ξ, то $B_k(x)$ є щільністю розподілу суми $k+1$ незалежних однаково розподілених випадкових величин ξ_i, $i = \overline{0, k}$, кожна з яких має щільність розподілу $B_0(x)$.

Очевидно, випадкова величина $\zeta = \sum\limits_{i=0}^{k}\xi_i$ може набувати значення в проміжку $\left[-\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right] = I_k$. Тому $B_k(x) > 0$ всередині I_k і $B_k(x) = 0$ зовні I_k. Крім того, враховуючи, що $B_k(x)$ – щільність розподілу випадкової величини, маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_k(x)dx = \int\limits_{I_k} B_k(x)dx = 1.$$

Оскільки для кожного $x \in I_k, k \geq 1$ інтеграл в (3) обчислюється за проміжком, довжина якого не перевищує одиниці, то методом математичної Індукції можна показати, що $0 \leq B_k(x) \leq 1$. (Рівність $B_k(x) = 1$ виконується лише при $k = 1$ лише для $x = 0$). Звідси для довільного $p\in[1;+\infty)$ одержимо

$$\int_{R^1} B_k^p(x)dx \leq \int_{I_k} B_k(x)dx = 1.$$

На кожному з проміжків $[t_j, t_{j+1}]$, де $t_j = j - \frac{k+1}{2}$ $(j = \overline{0,\,k+1})$, сплайн $B_k(x)$ збігається з деяким многочленом $P_{j,k}(x)$ степеня *k*. Ці многочлени можуть бути визначені з представлення сплайна у вигляді суми зрізаних степеневих функцій ([6, с. 23]):

$$B_k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j C_{k+1}^j (x-t_j)_+^{\;k},$$

де $(x-t_j)_+^{\;k} = \begin{cases}(x-t_j)^k; & x \geq t_j,\\ 0; & x < t_j.\end{cases}$ Отже, сплайн $B_k(x)$ має k — 1 неперервну похідну. У вузлах t_j поліноми $P_{j,k}(x)$ гладко «склеєні»: $P^{(m)}_{j-1,k}(t_j) = P^{(m)}_{j,k}(t_j)$, $m = \overline{0,\,k-1}$, $j = \overline{0,\,k+1}$ ($P_{-1,k}(x)$ та $P_{k+1,k}(x)$ є тотожні нулі, оскільки вони відповідають зовнішності *Ik* - носія сплайна $B_k(x)$).

Похідна $B_k^{(k)}(x)$ є кусково-сталою функцією:

$$B_k^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j C_{k+1}^j\,\theta(x-t_j),$$

де $\theta(x)$ — функція Хевісайда:

$$\theta(x) = \begin{cases}1; & x \geq 0,\\ 0; & x < 0.\end{cases}$$

З властивостей біноміальних коефіцієнтів можна одержати грубу оцінку для $B_k^{(k)}(x)$ на Інтервалі $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0,\,k}$:

$$\left|B_k^{(k)}(x)\right| \leq C_{k+1}^j.$$

Звідси одержимо оцінку норми $B_k(x)$ в $W_p^k(R^1)$:

$$\|B_k(\cdot)\|_{W_p^k(R^1)} = \left(\int_{R^1}\left(B_k^p(x) + \left|B_k^{(k)}(x)\right|^p\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{I_k}B_k^p(x) + \sum_{j=0}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|B_k^{(k)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(1 + \sum_{j=0}^{k}\left(C_{k+1}^j\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + \sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^j = 2^{k+1}.$$

Повернімося до визначення функції $f_{pl}(x)$ з $\varphi(x) = B_l(x)$. Покладемо $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}(1+\ln^2 x)}$.

Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ визначимо за допомогою рекурентних формул $x_1 = 0$ $x_n = \max\left(x_{n-1}, G^{-1}\left(\frac{a_n}{n}\right)\right)$, $G^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до $G(x)$. Існування цієї функції на (0; 1] випливає з умов теореми.

Таким чином, носії окремих доданків ряду, що визначає $f_{pl}(x)$ не перекриваються. Тоді, оскільки $0 < G(x_n) \leq a_n^2$, то

$$\frac{f_{pl}(x_n)}{G(x_n)} \geq B_l(0)\cdot\frac{a_n}{\left(\frac{a_n}{n}\right)} > B_l(0)\cdot n \to +\infty.$$

Проте $f_{pk}(x)$ належить $W_p^k(R^1)$:

$$\|f_{pk}\|_{W_p^k(R^1)} = \left(\int_{R^1}\left(|f_{pk}(x)|^p + \left|f_{pk}^{(k)}(x)\right|^p\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|B_k\|_{W_p^k}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln^2 n)^p}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Теорему 1 доведено.

Зауваження. Побудована при доведенні теореми 1 функція $f_{pk}(x)$ належить просторам $W_q^k(R^1)$ для всіх $q \in [p,+\infty)$, але при $p > 1$ не належить жодному з просторів $L_q(R^1, dx)$, $q \in [1,p)$.

Узагальнимо теорему 1 на випадок просторів нескінченно диференційовних функцій, які є C^∞-векторами оператора A_p. Введемо відповідні простори C^∞-векторів оператора .A [9]:

$$W_p^\infty(R^1) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (R^1) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k),$$

$$W_{p,\alpha}^\infty(R^1) = = \left\{f \in W_p^\infty(R^1) \,\middle|\, \exists h > 0 : \sup_{k\in N}\frac{\|A_p^k f\|}{h^k k^{\alpha k}} < +\infty\right\}, \quad \alpha > 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$W_p^\infty(R^1)$ — це простір нескінченно диференційовних на R функцій, всі похідні яких мають сумовний р-тий степінь модуля. $W_{p,\alpha}^\infty(R^1)$ — простір Жевре типу Рум'є оператора *А* порядку *а.* З теореми Соболева про вкладення випливає, що для довільного *а > 0* та довільних *ρ і q,* таких що $1 \leq p < q < +\infty$ мають місце вкладення

$W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1) \subset W_{q,\alpha}^{\infty}(R^1)$, причому це включення є строгим (що оуде підтверджено прикладом).

Функції з $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ «витримують» дію цілих функцій порядку $\frac{1}{\alpha}$ від оператора *A*. Нехай $Q_{\alpha,h}(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{h^m \lambda^{2m}}{(m!)^{2\alpha}}$.

Означення простору $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ можна дати в такому вигляді:
$W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1) = \left\{ f \in W_p^{\infty}(R^1) \mid \exists h > 0 : Q_{\alpha,h}(A) f \in \in L_p(R^1, dx) \right\}$.

Як і функції з $W_p^k(R^1)$, $k \geq 1$, очевидно, функції з $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ прямують до 0 при $x \to \infty$. При цьому також не можна вказати порядок прямування до нуля. Має місце:

Теорема 2. *Для будь-якої функції $G(x)$, що задовольняє умовам 1 теореми I, для будь-якого $\alpha > 0$ та будь-якого $p \in [1, +\infty)$ в просторі $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ знайдеться функція $F_{p,\alpha}(x)$, яка при $x \to \infty$ прямує до 0 повільніше за $G(x)$,* ***тобто*** *оцінка*

$$|F_{p\alpha}(x)| \leq C \cdot G(|x|)$$

не виконується для жодного $C > 0$.

Доведення. При $\alpha > 0$ простір $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ містить фінітні функції з $\mathbf{D}(R^1)$. Так, функція

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1-x^2)^{-\gamma}\right) : & |x| < 1; \\ 0 : & |x| \geq 1, \end{cases}$$

де $\gamma = (\alpha - 1)^{-1}$ є фінітна функція з простору Жевре порядку $\alpha > 0$ [8, с. 161]. Ця функція, внаслідок фінітності, очевидно, може бути вкладена в $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ для всіх $p \in [1, +\infty)$.

Очевидно також, що при деякому $h > 0$ $Q_{\alpha h}(A) f \in \mathbf{D}(R^1) \subset L_p(R^1, dx)$.

Функцію $F_{p,\alpha}(x)$ знову будемо шукати у вигляді ряду (2) при $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$, $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}(1+\ln^2 n)}$. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ визначимо так, щоб не перекривалися носії окремих доданків (2): $x_1 = 0$, $x_n = \max\left(x_{n-1} + 2;\ G^{-1}\left(\frac{a_n}{n}\right)\right)$. Тоді

$$\frac{F_{p\alpha}(x_n)}{G(x_n)} \geq \frac{a_n}{G\left(G^{-1}\left(\frac{a_n}{n}\right)\right)} = \frac{a_n}{\frac{a_n}{n}} = n \to \infty.$$

З іншого боку покажемо, що $F_{p,\alpha}(x)$ належить $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$. Дійсно, оскільки носії окремих доданків не перекриваються, внаслідок (2) одержимо оцінку норми $Q_{\alpha,h}(A) F_{p\alpha}(x)$ в $L_p(R^1, dx)$:

$$\|Q_{\alpha h}(A) F_{p\alpha}(x)\|_{L_p(R^1, dx)}^p =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \int\limits_{x_n - 1}^{x_n + 1} \left| Q_{\alpha h}\left(i \frac{d}{dx}\right) \varphi_\alpha(x - x_n)\right|^p dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \left| Q_{\alpha h}\left(i \frac{d}{dx}\right) \varphi_\alpha(x)\right|^p dx \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1 + \ln^2 n\right)^p} < +\infty.$$

Отже, $F_{p,\alpha}(x)$ належить $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$. Таким чином, для $\alpha > 1$ теорему 2 доведено.

$W_{p,1}^{\infty}(R^1)$ при $\alpha = 1$ складається з функцій $f(x)$, які допускають аналітичне продовження в деяку смугу

$$\Pi_\delta = \left\{ z = x + iy \ \middle| x \in R^1, |y| < \delta \right\},$$

$\delta > 0$, причому для $y \in (-\delta, +\delta)$

$$f(x + iy) \in L_p(R^1, dx). \tag{4}$$

При $0 < \alpha < 1$ функції з $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ допускають аналітичне продовження до цілої функції $f(z)$, для якої умова (4) виконується для всіх $y \in R^1$.

Оскільки *для* $0 < \alpha \leq 1$ в просторі $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ відсутні нетривіальні фінітні функції:

$$W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1) \cap \mathbf{D}(R^1) = \{0\},$$

то конструкція функції $F_{p,\alpha}(x)$ ускладнюється. Якщо $F_{p,\alpha}(x)$ представляти у вигляді ряду (2) зі зсувів деякої функції $\varphi(x)$ з $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$, то тепер при кожному *x* ряд матиме нескінченне число доданків. Оскільки коефіцієнти

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}(1 + \ln^2 n)}$$

повільно прямують до нуля, то бажано було б, щоб $\varphi(x)$ швидко прямувала до нуля при $x \to \infty$. Для $0 < \alpha < 1$ таку функцію можна взяти з простору Шилова $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ [8], який складається з цілих функцій порядку $1/\alpha$, що допускають оцінки

$$|\varphi(x + iy)| \leq C \exp(-a|x|^{\frac{1}{1-\alpha}} + b|y|^{\frac{1}{1-\alpha}}) \tag{5}$$

при деяких доданих *a, b, c*.

З властивостей просторів типу S [9] маємо, що при $0 < \alpha < 1$ простір $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ є щільним в $W_{p,\alpha}^{\infty}(R^1)$ для будь-якого $p \in [1, +\infty)$. Оскільки кожна функція $\varphi(x)$ входить в $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ разом зі своїм квадратом $\varphi^2(x)$ (з оцінки (5) маємо аналогічну оцінку для $\varphi^2(x + iy)$), то в $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ містяться функції з невід'ємними значеннями. Виберемо деяку невід'ємну функцію $\Phi_\alpha(x)$ з $S^\alpha_{1-\alpha}$, таку що $\Phi_\alpha(0) = 1$. Оскільки $\varphi\in S^\alpha_{1-\alpha} \subset W^\infty_{p,\alpha}(R^1)$, то Φ_α «витримує» дію диференціального оператора нескінченного порядку $Q_{\alpha,h}(i\frac{d}{dx})$ при деякому $h>0$, причому функція $\Psi_\alpha = Q_{\alpha,h}(i\frac{d}{dx})\Phi_\alpha$ також належить $S^\alpha_{1-\alpha}$.

Для доведення теореми 2 при $0<\alpha<1$ достатньо підібрати послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ так, щоб $x_n \geq G^{-1}(a_n/n)$ та, ряд (2) збігався в $L_p(R^1, dx)$. Для $\varphi = \Phi_\alpha(x)$ та $\varphi = \Psi_\alpha(x)$ одночасно. В такому разі ряд (2) при $\varphi = \Phi_\alpha(x)$ збігатиметься в $W^\infty_{p,\alpha}(R^1)$ до деякої функції $F_{p,\alpha}(x)$, яка І задовольняє умовам теореми 2.

Оскільки функції $\Phi_\alpha(x)$ та $\Psi_\alpha(x)$ експоненціалью спадають на ∞, то таку послідовність можна визначити, наприклад, рекурентними формулами

$$x_1 = 0;\ \ x_n = \max\left(x_{n-1} + 2n;\ G^{-1}\left(\frac{a_n}{n}\right)\right).$$

Розглянемо частинний випадок $\alpha = \frac{1}{2}$. Покладемо $\Phi_{\frac{1}{2}}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$, $\left(\Phi_{\frac{1}{2}} \in S^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\right)$, $Q_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$, $\left(h = \frac{1}{2}\right)$. Функцію $\Psi_{\frac{1}{2}}(x)$ можна визначити за допомогою перетворення Фур'е:

$$\Psi_{\frac{1}{2}}(x) = F^{-1}\left(G_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\lambda)F(\Phi_{\frac{1}{2}})\right) =$$
$$= F^{-1}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\cdot\sqrt{2}e^{-\lambda^2}\right) =$$
$$= \sqrt{2}F^{-1}(e^{-\frac{\lambda^2}{2}}) = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Доведемо збіжність ряду (2) для $\varphi = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Для цього розіб'ємо ряд (2) на суму двох рядів $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, де Σ'— це сума фінітних доданків, носії яких не перетинаються. Цей ряд можна записати у вигляді кусково-неперервної функції

$$\Sigma' = \Sigma'(x) =$$
$$= \begin{cases} n^{-\frac{2}{p}}(1+\ln^2 n)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-x_n^2)\right); & x\in J_n, \\ 0; & x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n, \end{cases}$$

де $J_n = (x_n - n, x_n + n)$.

Ряд $\Sigma'' = \Sigma - \Sigma'$ складається з «обрізаних хвостів» ряду (2).

Покажемо, що ряди Σ' та Σ'' збігаються в $L_p(R^1, dx)$.

Оскільки носії окремих доданків *ряду* Σ' не перетинаються, то

$$\|\Sigma'\|^p_{L_p(R^1,dx)} =$$
$$= 2^{\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^\infty a_n^p \int\limits_{J_n} \exp\left(-\frac{p}{2}(x-x_n)^2\right)dx =$$
$$= 2^{\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^\infty a_n^p \int\limits_{-n}^{n} \exp\left(\frac{px^2}{2}\right)dx \leq$$
$$\leq 2^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{R^1} e^{\frac{-px^2}{2}}dx\right)\sum_{n=1}^\infty a_n^p =$$
$$= 2^{\frac{p}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\sum_{n=1}^\infty a_n^p < +\infty.$$

Отже, ряд Σ' збігається в $L_p(R^1, dx)$. Збіжність ряду Σ'' можна встановити за допомогою нерівності трикутника:

$$\|\Sigma''\|_{L_p(R^1,dx)} \leq \sqrt{2}\sum_{n=1}^\infty a_n \times$$
$$\times\left(\int\limits_{R^1\setminus J_n} \exp(-\frac{p}{2}(x-x_n)^2 dx\right) =$$
$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\cdot\sum_{n=1}^\infty a_n\left(\int\limits_n^\infty e^{-\frac{px^2}{2}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\cdot\sum_{n=1}^\infty a_n\left(\frac{1}{n}\int\limits_n^\infty xe^{-\frac{px^2}{2}}dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\cdot\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}e^{-\frac{pn^2}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\cdot p^{-\frac{1}{p}}\sum_{n=1}^\infty n^{-\frac{2}{p}}(1+\ln^2 n)e^{-\frac{n^2}{2}} < +\infty.$$

Таким чином, ряд (2) збіжний в $L_p(R^1, dx)$ для $\varphi = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Аналогічно можна встановити збіжність ряду (4) для $\varphi = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$ в просторі $L_p(R^1, dx)$, а отже І в $W^\infty_{p\alpha}(R^1)$.

Покажемо, що $F_{p,\alpha}(x)$ прямує до нуля при $x\to\infty$ повільніше ніж $G(|x|)$. Справді,

$$\frac{F_{p\alpha}(x_n)}{G(x_n)} \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^\infty a_k \exp\left(\frac{1}{4}(x_n - x_x)^2\right)}{\frac{a_n}{n}} >$$
$$> \frac{a_n}{\frac{a_n}{n}} = n \to \infty.$$

Отже, для $\alpha = \frac{1}{2}$ теорему доведено. Для Інших значень $\alpha\in(0;1)$ доведення аналогічне. При $\alpha = 1$

слід взяти невід'ємну функцію простору Шилова $S^1_\beta, \beta > 0$ — довільне. При цьому доведення теореми буде аналогічне випадку $\alpha = \frac{1}{2}$.

Теореми 1 та 2 можна узагальнити також на випадок цілих векторів експоненціального типу оператора A [10], тобто функцій $f(x)$, які є нескінченне диференцішовними Ї їхні похідні за деяких додатних C та h задовольняють оцінкам $\|f^{(m)}(x)\|_{L_p(R^1,dx)} \leq Ch^m, m \in N$.

При ρ — 2, внаслідок самоспряженості оператора A в $L_2(R^1, dx)$, така функція є перетворенням Фур'є деякої фінітної функції $\widetilde{f}(\lambda), \widetilde{f} \in L_2(-h, h)$.

Цілим вектором експоненціального типу оператора A є, наприклад. $f_{x_0}(x) = \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}$, $x_0 \in R^1$. Ця функція є перетворенням Фур є функції

$$\widetilde{f}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-i\lambda x_0}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Шляхом підбору послідовності x_n для $p > 1$ можна показати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(x-x_n)}{x-x_n}$ визначає функцію $F(x)$, яка є цілим вектором експоненціального типу оператора A і яка прямує до нуля при $x \to \infty$ повільніше ніж функція $G(|x|)$, що фігурує в теоремах 1 та 2.

1. *Ахиезер Н. И. Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— Харьков: Виша шк.—1977.— Т. 1- 288 с. - 1977.- Т. 2- 316с.
2. *Никольский С. М.* Вложения теоремы // Математическая энциклопедия: В 3 т. М.: Сов. энциклопедия, 1977.— Т. I.— С. 723...731.
3. *Лионе Ж. Л.. Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. — 372 с.
4. *Гейлбаум Ф.. Олмстед Б.* Контрпримеры в анализе.— М.: Мир, I979......588 с.
5. *Гороачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений // Докл. АН СССР- 1989.- 308, № I,- С. 23-27.
6. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ.......М.: Физмаггиз, 1960. 388 с.
8. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М.: Наука, 1984.- 352 с.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространство основных и обобщенных функций. - М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
10. *Радыно Я. В.* Пространства векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР.- 1983,- 27, № 9. - С. 55-76.

A. Kashpirovsky, Yu. Mytnik

ABOUT SMOOTH FUNCTIONS FROM LEBESGUE SPACES BEHAVIOUR ON INFINITY

Behavior of smooth Junctions from Lebesgue spaces $L_p(R^1, dx)$ in infinity is investigated. It has been found out that such functions are. infinitely small when $x \to \infty$ but the convergence rate can be as slow as possible.