УДК 519.1

Санжаровська А. О.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ХАНОЙСЬКУ ВЕЖУ

Розглянуто варіацію класичної задачі про Ханойські вежі (див., напр., [1]). Нехай дано три кілки, на одному з них розташовано вежу з n дисків, причому під кожним диском, окрім найнижчого, розташовано диск більшого діаметра. Пронумеруємо диски і вважатимемо, що перший диск є найменшим, а n-тий — найбільшим. Диски з непарними порядковими номерами пофарбовано в один колір (червоний), з парними — в інший (синій). Мета гри — перемістити вежу на інший кілок із дотриманням таких правил: за один крок можна перемістити лише один диск, і тільки той, що розташований нагорі свого стека; кожен диск можна класти лише на диск більшого діаметра; кожен диск можна класти лише на диск іншого кольору.

Теорема. *Для задачі про двоколірну Ханойську вежу існує розв'язок, причому мінімальна кількість кроків дорівнює мінімальній кількості кроків класичної задачі $2^n - 1$, де n — кількість дисків.*

Ключові слова: Ханойська вежа, двоколірна задача, рекурсивний алгоритм, розбиття, оптимальність.

Вступ

Задача про Ханойську вежу з'явилася в середині XIX ст. Її автором вважають французького математика Едуарда Лукаса (інколи припускають, що на створення цієї головоломки його надихнула легенда; згідно з іншими даними, легенду він теж вигадав сам). Згодом головоломка зацікавила інших математиків, і таким чином з'явилися численні узагальнення та варіації початкової класичної задачі.

У цій праці запропоновано нове узагальнення класичної задачі про Ханойську вежу, а саме: враховуються кольори дисків. Розглянуто варіант двох кольорів, при цьому аналізується алгоритм розв'язання та обчислення мінімальної кількості кроків для розв'язання запропонованої задачі. Крім того, зроблено огляд уже відомих узагальнень задачі про Ханойську вежу.

Робота містить три розділи.

У першому розділі розглянуто початкову задачу про Ханойську вежу, описано правила гри та надано оцінку мінімальної кількості кроків.

Другий розділ містить опис декількох узагальнень задачі. Розглянуто задачу з більшою кількістю стрижнів і алгоритм Фрейма — Стюарта, який дозволяє розв'язати цю задачу. Також розглянуто варіанти задач із двома чорно-білими вежами та трьома вежами різних кольорів.

У третьому розділі сформульовано кольорове узагальнення задачі про Ханойську вежу і показано, що воно має розв'язок, при цьому обчислено мінімальну кількість перекладань.

Задача про Ханойську вежу

Таку назву має відома математична головоломка (гра) з такими правилами.

Нехай дано три стрижні, на одному з них розташовано вежу з n дисків, причому під кожним диском, окрім найнижчого, розташовано диск більшого діаметра. Мета гри — перемістити вежу на інший стрижень із дотриманням таких правил:

- за один крок можна перемістити лише один диск, і тільки той, що розташований нагорі свого стека;
- кожен диск можна класти лише на диск більшого діаметра [1].

«З задачею “Ханойська вежа” пов'язана легенда, яка визначила її назву. В одній східній країні у великому храмі розташована бронзова пластина з трьома алмазними стрижнями, кожен завдовжки з один лікоть і завтовшки з тіло бджоли. На один зі стрижнів бог під час створення світу поклав 64 диски з чистого золота так, що найбільший диск лежить на бронзовій пластині, а інші утворюють піраміду з найменшим диском на вершині. Це вежа Брами. Жерці працюють удень і вночі, переносять диски з одного стрижня на інший із дотриманням мудрих і непорушних законів Брами, згідно з якими диски можна перекладати тільки по одному і кожен можна класти на стрижень тільки в тому разі, якщо під ним не лежатиме менший. Коли всі диски будуть таким чином перенесені, і вежа, і храми, і жерці-брамiни перетворяться на прах і настане кінець світу. Доведено, що розв'язання задачі з n дисками потребує не менше ніж $2^n - 1$ переміщень. Тому навіть якщо жерці перекладатимуть по одному диску за секунду, їм знадобиться $2^{64} - 1$ секунда, що перевищує 500 млрд років» [2].

Існує кілька підходів до побудови алгоритму переміщення дисків.

Розглянемо кілька з них.

Один із найвідоміших способів розв'язати задачу — застосувати рекурсію.

© *Санжаровська А. О.*, 2017

Припустимо, вежа розташована на першому стрижні, а мета гри — перемістити вежу на третій стрижень. Тоді для розв'язання задачі з n дисками достатньо зробити такі кроки:

- перемістити вежу з $(n - 1)$ диска на другий стрижень;
- перемістити найбільший диск на третій стрижень;
- перемістити вежу з $(n - 1)$ диска на третій стрижень.

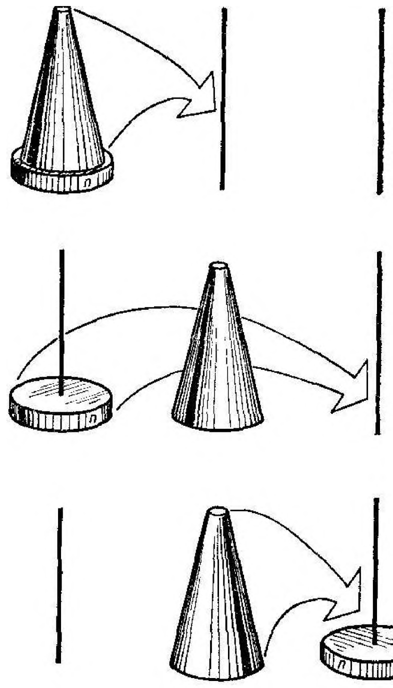

Рис. 1. Зведення розв'язання задачі про Ханойську вежу з n дисками до випадку з $(n - 1)$ диском

На рис. 1 показано, яким чином звести випадок з $(n - 1)$ диском до випадку з n дисками.

Очевидно, що випадок з $(n - 1)$ диском можна звести до випадку з $(n - 2)$ дисками і так далі. Врешті-решт, треба буде перенести лише один верхній диск, а така задача тривіальна.

Існує також ітеративний, або трикутний, підхід до розв'язання відомої задачі. Потрібно розташувати стрижні у вершинах уявного трикутника. Далі, якщо кількість дисків парна, переміщуємо найменший диск на проміжний стрижень, а якщо непарна — одразу на фінальний. На цьому кроці потрібно запам'ятати напрямок руху найменшого диска (за годинниковою стрілкою чи проти неї). На другому кроці переміщуємо другий диск так, щоб не порушити обмеження, накладені задачею. Надалі потрібно чергувати переміщення найменшого і якого-небудь іншого диска і при цьому зберігати початковий напрямок руху найменшого диска.

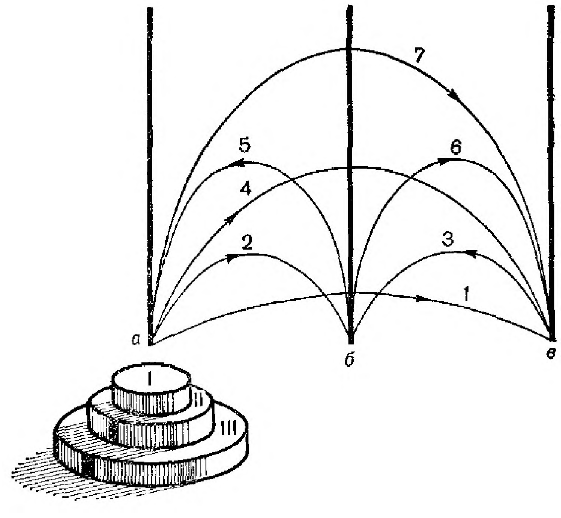

Рис. 2. Розв'язання задачі про Ханойську вежу для трьох стрижнів

Розв'язання задачі про Ханойську вежу в «трикутний» спосіб можна зобразити схематично (рис. 2).

Відомі узагальнення задачі про Ханойську вежу

Класичні узагальнення. Один зі способів узагальнити початкову задачу — збільшити кількість стрижнів (рис. 3). Зазначимо, що всі умови класичної гри з трьома стрижнями також лишаються чинними і для узагальненої задачі.

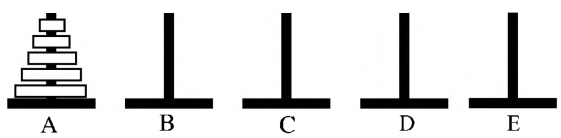

Рис. 3. Узагальнення задачі про Ханойську вежу з п'ятьма стрижнями

Розв'язати таку задачу можна згідно з алгоритмом Фрейма — Стюарта.

Означення 1. Мінімальна кількість кроків, необхідна, щоб розподілити вежу з n дисків на m порожніх стрижнів, для головоломки з k стрижнями дорівнює $S(n, k, m)$. Зауважимо, що $T(n, k) = S(n, k, 1)$ [3].

Для застосування алгоритму треба:

- вибрати оптимальне число t, $1 \leq t < n$, і перемістити вежу з верхніх t дисків на проміжний (не фінальний) стрижень;
- перемістити диски, що лишились на початковому стрижні, на фінальний стрижень;
- перемістити вежу з верхніх t дисків на фінальний стрижень.

Теорема 1. *Кількість кроків, необхідна для розв'язання узагальненої задачі про Ханойську вежу, дорівнює* $2S(n-1,k,k-2)+1 = 2T(t,k) + T(n-t,k-1)$.

Для того щоб порахувати кількість кроків для відомої кількості дисків і стрижнів, можна застосувати так званий «номер переміщень».

Означення 2. Якщо стек побудовано так, що кожен наступний диск робить найменшу можливу кількість кроків за умови, що сам стек теж побудовано за мінімальну кількість кроків, тоді особливий номер переміщень для диска, $j_k(i)$ — кількість кроків, зроблена i-тим найбільшим диском у своєму стеку [3].

Означення 3. $J_k(n) = \max_{i \le n} j_k(i)$ — номер переміщень стека заввишки з n дисків, або просто номер переміщень [3].

У певному контексті індекс можна буде опустити.

Твердження 2 ([3]). $J_k(n) = T(n,k) - T(n-1,k)$.

Твердження 3 ([3]).

$$J(n) = 2^r, \quad \binom{k+r-3}{k-2} < n \le \binom{k+r-2}{k-2}.$$

Таким чином, щоб порахувати кількість кроків для відомих значень n та k, достатньо послідовно обраховувати номер переміщень. Для цього треба підставляти в параметр r значення від одиниці і доти, доки ми не обрахуємо номери переміщень для всіх $s \le n$.

Нехай треба порахувати мінімальну кількість кроків для заданих значень n, k. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. $n = 25$, $k = 4$.

r	$\binom{k+r-3}{k-2}$	$\binom{k+r-2}{k-2}$
1	1	3
2	3	6
3	6	10
4	10	15
5	15	21
6	21	28

$J(1) = 1$; $J(s) = 2, 2 \le s \le 3$; $J(s) = 4, 4 \le s \le 6$; $J(s) = 8, 7 \le s \le 10$; $J(s) = 16, 11 \le s \le 15$; $J(s) = 32, 16 \le s \le 21$; $J(s) = 64, 22 \le s \le 28$.

Мінімальна кількість кроків: $64 \cdot (25-21) + 32 \cdot (21-15) + 16 \cdot (15-10) + 8 \cdot (10-6) + 4 \cdot (6-3) + 2 \cdot (3-1) + 1 = 577$.

Приклад 2. $n = 97$, $k = 19$.

r	$\binom{k+r-3}{k-2}$	$\binom{k+r-2}{k-2}$
1	1	18
2	18	171

$J(1) = 1$; $J(s) = 2, 2 \le s \le 18$; $J(s) = 4, 19 \le s \le 171$.

Мінімальна кількість кроків: $4 \cdot (97-18) + 2 \cdot (18-1) + 1 = 351$.

Приклад 3. $n = 100$, $k = 16$.

r	$\binom{k+r-3}{k-2}$	$\binom{k+r-2}{k-2}$
1	1	15
2	15	120

$J(1) = 1$; $J(s) = 2, 2 \le s \le 15$; $J(s) = 4, 16 \le s \le 120$.

Мінімальна кількість кроків: $4 \cdot (100-15) + 2 \cdot (15-1) + 1 = 369$.

Відомі кольорові узагальнення. Інший спосіб ускладнити задачу про Ханойську вежу — ввести додаткові «кольорові» обмеження. Здебільшого розглядають задачі з двома або трьома різними кольорами.

Двоколірне узагальнення задачі про Ханойську вежу має такі правила [4]: нехай маємо три стрижні, два з яких зайняті двома кольоровими вежами (чорно-білою і біло-чорною), а третій вільний. Зберігаються правила класичної головоломки, тобто один крок передбачає переміщення одного диска; більший диск не можна класти на менший, але диски однакового розміру (і двох різних кольорів) дозволено класти один на інший. Метою гри є побудова двох монохромних веж — чорної та білої — на тих стрижнях, що вже були зайняті вежами. Зазначимо, що найбільші диски потрібно поміняти місцями (рис. 4, рис. 5).

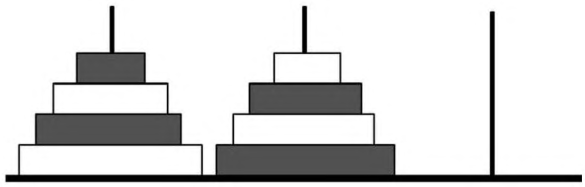

Рис. 4. Розташування веж двоколірної задачі про Ханойську вежу для чотирьох пар дисків на початку гри

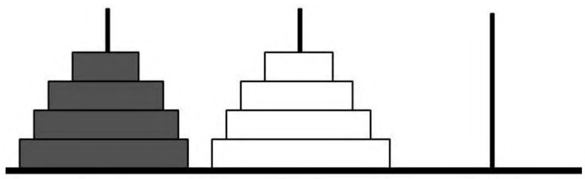

Рис. 5. Розташування веж двоколірної задачі про Ханойську вежу для чотирьох пар дисків після завершення гри

Щоб розв'язати таку задачу, спершу потрібно зібрати дві початкові вежі в одну двоколірну таким чином, щоб кольори дисків чергувались, потім перемістити цю вежу на сусідній стрижень (тобто фактично розв'язати класичну задачу про Ханойську вежу) і наприкінці розподілити одну двоколірну вежу на дві монохромні. Алгоритм розв'язання рекурсивний і може бути описаний через алгоритми для задач переміщення двоколірної вежі, злиття двох веж в одну двоколірну, розбиття двоколірної вежі на дві монохромні [4].

Також можна розглянути триколірну задачу [5]. Її правила такі: нехай маємо три стрижні, на кожному з яких розташована монохромна вежа (на різних стрижнях розташовано вежі різних кольорів). Усі три вежі однакові заввишки (рис. 6). Один крок полягає в переміщенні одного диска, і жоден диск не можна класти на диск меншого розміру. Мета гри — перемістити кожну з веж на інший стрижень, тобто наприкінці потрібно отримати три монохромні вежі, але жодна з них не має перебувати на тому самому стрижні, що й до початку переміщень (рис. 7).

Рис. 6. Триколірна задача про Ханойську вежу до початку гри

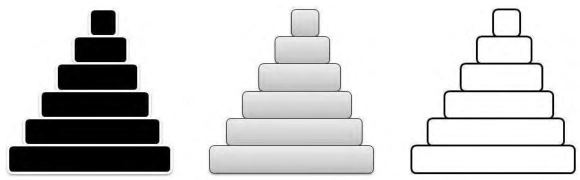

Рис. 7. Триколірна задача про Ханойську вежу після переміщення

Алгоритм розв'язання триколірної задачі дещо схожий на алгоритм для двоколірної — він також передбачає комбінацію кількох веж в одну, її переміщення та розбиття на кілька веж.

Задача про смугасту вежу

Нехай дано три стрижні, на одному з них розташовано вежу з n дисків, причому під кожним диском, окрім найнижчого, розташовано диск більшого діаметра. Пронумеруємо диски і вважатимемо, що перший диск є найменшим, а n-тий — найбільшим. Диски з непарними порядковими номерами пофарбовано в один колір, з парними — в інший. Мета гри — перемістити вежу на інший кілок із дотриманням таких правил:

- за один крок можна перемістити лише один диск, і тільки той, що розташований нагорі свого стека;
- кожен диск можна класти лише на диск більшого діаметра;
- кожен диск можна класти лише на диск іншого кольору.

Теорема 4. *Для задачі про смугасту Ханойську вежу існує розв'язок, причому мінімальна кількість кроків дорівнює мінімальній кількості кроків класичної задачі* $2^n - 1$, *де* n *— кількість дисків.*

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції за кількістю дисків n.

База індукції. Нехай $n = 2$. Очевидно, що в такому разі смугасту вежу можливо перемістити на інший стрижень. Отже, припущення виконується.

Індукційний крок. Припустимо, що вежу з $(n - 1)$ диска можна перемістити зі збереженням кольорової умови. Покажемо, що в такому разі для вежі з n дисків на кожному кроці не буде порушуватися кольорова умова. Доведемо це методом математичної індукції за кількістю вже перенесених дисків s.

Доведення. База індукції. Нехай $s = 2$. Для вежі з двох верхніх дисків кольорову умову порушити неможливо. Отже, припущення виконується.

Індукційний крок. Припустимо, що s дисків переклали правильно. Покажемо, що тоді можна правильно перенести вежу з $(s+1)$ диска. Після перекладення s дисків маємо дві вежі — верхню, що містить s дисків, і нижню, що містить $(n-s)$ дисків. З нижньої вежі беремо верхній диск і кладемо його на порожній стрижень. Далі покажемо, що завжди можна перемістити маленьку вежу з p дисків на інший стрижень, і при цьому вежа лишиться смугастою. Доведемо це методом математичної індукції за кількістю дисків p.

Доведення. База індукції. Нехай $p = 1$. На двох інших стрижнях верхні диски різних кольорів (оскільки один із них нещодавно лежав на іншому), тож перший диск завжди можна перемістити на інший стрижень. Отже, припущення виконується.

Індукційний крок. Припустимо, що перекладено вежу з $(p-1)$ верхнього диска. Покажемо, що в такому разі можна перемістити вежу з p дисків. Оскільки вежу з $(p - 1)$ диска перекладено, то $(p - 1)$-й диск лежить або на диску $(n - s - 1)$, або на диску $(n - s)$. Очевидно, що ці диски різного кольору, бо інакше вежа не смугаста.

Нехай $(p - 1)$-й диск можна покласти на диск $(n-s-1)$. Тоді номери цих дисків різної парності, а отже, $(n - s - 1) - (p - 1)$ — непарне. Але тоді $(n - s - p)$ — також непарне, тобто $(n - s)$ і p різної парності, тож диски з цими номерами різного кольору. Відповідно, p-й диск можна покласти на диск $(n - s)$.

Нехай $(p - 1)$-й диск можна покласти на диск $(n - s)$. Тоді номери цих дисків різної парності, а отже, $(n - s) - (p - 1)$ — непарне. Але тоді $(n-s-1-p)$ — також непарне, тобто $(n-s-1)$ і p різної парності, тож диски з цими номерами різного кольору. Відповідно, p-й диск можна покласти на диск $(n - s - 1)$. Оскільки і p-й диск, і вежу з $(p - 1)$ диска можна перемістити, і вежа лишиться смугастою, можна перемістити і вежу з p дисків із дотриманням кольорової умови.

Таким чином, кольорова умова не порушиться на жодному кроці.

Оскільки для розв'язання смугастої задачі було застосовано алгоритми розв'язання класичної задачі і показано, що кольорова умова не порушиться, то кількість кроків для переміщення вежі залишається незмінною, тобто $2^n - 1$, де n — кількість дисків.

Висновки

Хоча задачі про Ханойську вежу вже майже півтори сотні років, хоча існує багато варіацій та узагальнень цієї головоломки, нові варіанти та потенційні додаткові умови досі продовжують виникати та породжують нові завдання для роздумів. Під час дослідження цієї задачі я розглянула кілька цікавих узагальнень, а також алгоритми для їхнього розв'язання. У роботі сформульовано правила нового кольорового узагальнення, доведено, що сформульована таким чином задача має розв'язок, і пораховано кількість кроків, потрібну для її розв'язання. Такий напрямок узагальнення задачі про Ханойську вежу можна розвивати й надалі, наприклад, порахувати кількість кроків для смугастої задачі з більшою кількістю стрижнів, перевірити оптимальність алгоритму Фрейма — Стюарта за таких обмежень або ж розглянути смугасту задачу з трьома і більше кольорами.

Список літератури

1. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики : навчальний посібник / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. — К. : Нац. ун-т «Києво-Могил. акад.», 2009. — 159 с.
2. Анисимов А. В. Информатика. Творчество. Рекурсия / А. В. Анисимов. — К. : Наукова думка, 1988. — 224 с.
3. Jörgensen M. E. Solutions to the generalized Towers of Hanoi problem [Electronic resource] / Mikael Erik Jörgensen. — 2012. — Mode of access: URL: https://arxiv.org/abs/1204.4411. — Title from the screen.
4. Chaugule P. V. A recursive solution to bicolor Towers of Hanoi problem / Prasad Vithal Chaugule // Recreational Mathematics Magazine. — 2015. — No. 4. — P. 37–48.
5. 3-colors Tower of Hanoi [Electronic resource]. — Mode of access: URL: http://www.cut-the-knot.org/recurrence/TricolorHanoiAuto.shtml. — Title from the screen.

A. Sanzharovska

THE GENERALIZED TOWER OF HANOI PROBLEM

The article examines a variation of the generalized tower of Hanoi problem (see [1]). We are given a tower of n disks, initially stacked in decreasing size on one of three pegs. Let us label the discs: disc 1 is the smallest disc, disc 2 the second smallest, and so on. Let the discs having odd numbers be red, and the discs having even numbers be blue. The objective is to transfer the entire tower to one of the other pegs, considering the following rules: each move consists of taking only one upper disk from one of the stacks and placing it on top of another stack; no disk may be placed on top of a smaller disk; no disk may be placed on top of a disk having the same colour.

Theorem. *The bicolour tower of Hanoi problem has a solution, and the minimal number of moves required to solve it is $2^n - 1$, where n is the number of disks.*

Keywords: Tower of Hanoi, bicolour problem, recursive algorithm, bifurcation, optimality.

Матеріал надійшов 30.09.2017