

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

На прикладі найпростішої моделі взаємозв'язків на світовому ринку продовольчих і непродовольчих продуктів показано, що некооперативна рівновага досягається при максимальних обсягах експорту продовольства.

© В.М. Горбачук, О.Г. Шулінок,
С.-Б. Сулейманов, 2018

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, Г.О. ШУЛІНОК, С.-Б. СУЛЕЙМАНОВ

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ НА СВІТОВОМУ РИНКУ ПРОДОВОЛЬСТВА

Вступ. Модель зв'язків (linkage) Програми продовольства і сільського господарства Міжнародного інституту прикладного системного аналізу (Institute for Applied Systems Analysis, IIASA), членом якого є Національна академія наук України, – це економетрична світова модель, що вивчає взаємодію багатьох національних економік на численних сільськогосподарських ринках і виокремленому ринку несільськогосподарських продуктів [1]. Ця модель містить ряд параметрів стратегій, на які можуть впливати національні уряди для поліпшення економічних результатів [2–5]. При заданій цільовій функції для кожної країни цю модель можна вважати стратегічною грою, де гравці – це уряди різних держав. Для дослідження деяких стратегічних питань моделі зв'язків IIASA робота [6] (один з її авторів – Нобелівський лауреат 1994 р.) обмежується двома продуктами – сільськогосподарським і несільськогосподарським та припущенням, що ціль кожного уряду полягає мінімізації своїх витрат на сільськогосподарську політику в короткостроковому періоді. Один з основних нетривіальних висновків роботи [6] – це те, що, при досить загальних умовах для параметрів моделі зв'язків, оптимальною політикою кожної країни є необмежене постачання продовольства. Такий висновок потребує перевірки на складніших моделях з великою кількістю країн та економетрично визначеними умовами для параметрів урядових стратегій [7, 8]. Сучасні моделі взаємозв'язків дозволяють вивчати глобальні взаємозалежності.

У реалістичній моделі кожна країна має свою цільову функцію, залежну від різноманітних цільових змінних [9, 10]. Крім того, попит може визначатися не тільки лінійними системами видатків [9]. Лінійні системи видатків ведуть до зростання виручки окремої країни при збільшенні її виробництва і пропозиції, якщо пропозиція решти країн залишається фіксованою. Однак при збільшенні сумарної пропозиції продовольства всіх країн (світового ринку) їхня сумарна виручка зменшується.

При розробці моделі спочатку вважатимемо, що запаси продовольства відсутні, а внутрішні ціни рівні міжнародним.

У спрощеній моделі зв'язків припускаємо, що уряд обирає загальну внутрішню пропозицію (supply) s_i продовольства (змінні, що стосуються продовольства, позначатимемо малими латинськими літерами) в кожній країні $i = 1, \dots, n$, причому змінна s_i має двосторонні обмеження:

$$\underline{s}_i \leq s_i \leq \bar{s}_i. \quad (1)$$

Якщо d_i та D_i – внутрішній попит (demand) на продовольство та непродовольство (в країні i) відповідно (змінні, що стосуються непродовольства, позначатимемо великими латинськими літерами), то надлишковий попит на продовольство визначається рівністю

$$z_i = d_i - s_i, \quad (2)$$

а надлишковий попит на непродовольство визначається рівністю

$$Z_i = D_i - S_i, \quad (3)$$

де S_i – внутрішня пропозиція непродовольства в країні i , задана виробничими рішеннями попереднього періоду, а тому фіксована в короткостроковому періоді. Загальна сума значень надлишкового попиту (які можуть бути від'ємними) є нульовою за ринкової рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n z_i = 0 = \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (4)$$

Припустимо, що екзогенно задається реальний торговий дефіцит

$$K_i = r z_i + Z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

виражений через непродовольство, де $r = \frac{p}{P}$ – відношення (ratio) ціни (price) p

продовольства до ціни P непродовольства. Враховуючи рівняння (4), маємо

$$\sum_{i=1}^n K_i = r \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n Z_i = 0.$$

Крім того, рівність (5) означає

$$0 < \frac{p}{P} = r = \frac{K_i - Z_i}{z_i} = \frac{K_i - (D_i - S_i)}{z_i},$$

звідки випливає обмеженість зверху надлишкового попиту Z_i :

$$K_i > D_i - S_i \geq D_i^0 - S_i \text{ при } z_i > 0, \quad (6)$$

де $0 < D_i^0$ – мінімальний попит на непродовольство (який має задовольнятися незалежно від цін і доходів). Аналогічно

$$K_i > d_i - s_i \geq d_i^0 - s_i \text{ при } Z_i > 0, \quad (7)$$

де $0 < d_i^0$ – мінімальний попит на продовольство.

Національний (загальний) доход (yield) країни i визначається

$$Y_i = p s_i + P S_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

а національні видатки (expenditures) задаються

$$E_i = p d_i + P D_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Тоді в силу рівностей (2), (3), (5) маємо

$$E_i - Y_i = p(d_i - s_i) + P(D_i - S_i) = p z_i + P Z_i = P \left(\frac{p}{P} z_i + Z_i \right) = P K_i. \quad (10)$$

Подібно до монетарної теорії міжнародної торгівлі, торгові дефіцити z_i та Z_i визначаються ендогенно за допомогою функцій національних видатків E_i , $i = 1, \dots, n$. З рівняння (9) маємо

$$\begin{aligned} p d_i + P D_i &= \alpha_i E_i + (1 - \alpha_i) E_i + p d_i^0 + P D_i^0 - p d_i^0 - P D_i^0 = \\ &= \alpha_i E_i + (1 - \alpha_i) E_i + d_i^0 p + D_i^0 P - \alpha_i d_i^0 p - (1 - \alpha_i) d_i^0 p - \\ &\quad - \alpha_i D_i^0 P - (1 - \alpha_i) D_i^0 P, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\alpha_i \in (0, 1)$ – деякий фіксований коефіцієнт, $i = 1, \dots, n$. Незалежно від досягнення рівноваги, рівняння (11), нерівності (6) і (7) є сумісними з рівностями

$$d_i p = d_i^0 p + \alpha_i (E_i - d_i^0 p - D_i^0 P), \quad (12)$$

$$D_i P = D_i^0 P + (1 - \alpha_i) (E_i - d_i^0 p - D_i^0 P). \quad (13)$$

Припустимо, що частку фермерських (farm) доходів F_i у національному доході кожної країни захищає параметр $f_i \in (0, 1)$ стратегії паритетності

$$F_i = f_i Y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Для аналізу в короткостроковому періоді рівняння (14) є обмеженнями на урядові стратегії, ніж наслідками політичних рішень: для виконання цих обмежень уряди можуть застосовувати різні засоби – прямі субсидії споживачам, непрямі субсидії вітчизняним виробникам для підтримки цін, квоти тощо. Урядові видатки мають покривати різницю $(s_i p - F_i)$ між ціною виробленого вітчизняного продовольства та фермерським доходом. Припустимо, кожний уряд мінімізує витрати на сільськогосподарську політику, що рівносильно максимізації

виручки від такої політики. Оскільки функції (8), (9) національного доходу і національних видатків є однорідними ступеня 0 за цінами, то уряд максимізуватиме реальну виручку, виражену через непродуктивність,

$$H_i = \frac{s_i P - F_i}{P} = \frac{s_i P - f_i Y_i}{P}. \quad (15)$$

При $H_i > 0$ для деякої країни i виграш за рахунок сільськогосподарської політики використовується для фінансування урядових видатків на інші потреби, що дозволяє обмежувати оподаткування фермерських доходів F_i , захищаючи фермерські інтереси.

Ігрова ситуація у тому, що кожний гравець $i = 1, \dots, n$ максимізує свою цільову функцію (15), обираючи значення s_i своєї стратегії за обмежень (1). Кожному вектору $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ відповідають рівноважні ринкові відношення $r = \frac{P}{P}$, обсяги d_i та D_i попиту, реальний національний дохід $\frac{Y_i}{P}$, урядовий виграш $H_i(\vec{s})$, $i = 1, \dots, n$. Покажемо, що ця гра у нормальній формі має однозначно визначену рівновагу (equilibrium) $\vec{s}^e = (s_1^e, \dots, s_n^e)$ у чистих стратегіях за прийнятних умов для s_i та d_i^0 , $i = 1, \dots, n$.

З рівностей (12) і (13) впливає відношення

$$\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} = \frac{p(d_i - d_i^0)}{P(D_i - D_i^0)} = r \frac{d_i - d_i^0}{D_i - D_i^0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

З рівнянь (2), (3), (5) маємо залежності

$$K_i = r z_i + Z_i = r(d_i - s_i) + D_i - S_i, \quad D_i - D_i^0 = K_i + S_i - r(d_i - s_i) - D_i^0,$$

що використаємо в рівності (16):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} &= \frac{r(d_i - d_i^0)}{K_i + S_i - r(d_i - s_i) - D_i^0}, \\ (1 - \alpha_i)(d_i - d_i^0)r &= \alpha_i(K_i + S_i - D_i^0) - \alpha_i(d_i - s_i)r, \\ \alpha_i(K_i + S_i - D_i^0) &= (d_i - d_i^0 - \alpha_i d_i + \alpha_i d_i^0 + \alpha_i d_i - \alpha_i s_i)r = \\ &= (d_i - d_i^0 + \alpha_i d_i^0 - \alpha_i s_i)r = [s_i + z_i - d_i^0(1 - \alpha_i) - \alpha_i s_i]r = \\ &= [s_i(1 - \alpha_i) + z_i - d_i^0(1 - \alpha_i)]r, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи рівність (4), знаходимо суму

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (K_i + S_i - D_i^0) = r \sum_{i=1}^n (1 - \alpha_i)(s_i - d_i^0), \quad (17)$$

яка є додатною у силу нерівності (6). Отже, значення r є додатним.

У залежності (17) збільшення s_i веде до зменшення r (за інших рівних умов) в силу нерівності $1 - \alpha_i > 0$. Якщо $\alpha_i \equiv \alpha$, $i = 1, \dots, n$, то в силу рівності (5) замість (17) маємо

$$\alpha \sum_{i=1}^n (S_i - D_i^0) = r(1 - \alpha) \sum_{i=1}^n (s_i - d_i^0),$$

тобто r не залежить від K_i , $i = 1, \dots, n$. У загальному випадку величина r залежить від розподілу K_i та α_i , $i = 1, \dots, n$.

З рівнянь (8) – (10) випливає

$$PK_i = E_i - Y_i = pd_i + PD_i - ps_i - PS_i, \quad K_i = rd_i + D_i - rs_i - S_i,$$

звідки в силу нерівностей (6) і (7) маємо

$$K_i + rs_i + S_i = rd_i + D_i \geq rd_i^0 + D_i^0.$$

Оскільки з рівності (8) випливає

$$\frac{Y_i}{P} = \frac{ps_i}{P} + \frac{PS_i}{P} = rs_i + S_i,$$

то цільову функцію (15) можна переписати як

$$H_i(s_i, S_i) = \frac{s_i P - f_i Y_i}{P} = s_i r - f_i (s_i r + S_i) = (1 - f_i) s_i r - f_i S_i. \quad (18)$$

Вважаючи міжнародну торгівлю деякою некооперативною грою у нормальній формі, застосуємо для пошуку її рішення поняття рівноваги Неша (Nash) $s^N = (s_1^N, \dots, s_n^N)$ у чистих стратегіях при обмеженнях (1):

$$H_i(s^N) \geq H_i(s_1^N, \dots, s_{i-1}^N, s_i, s_{i+1}^N, \dots, s_n^N) \quad \forall s_i \in [\underline{s}_i, \bar{s}_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Покажемо, що за прийнятних припущень ця модель має єдину рівновагу $s^N = [\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n]$. Більше того, вибір кожною країною i максимальної пропозиції \bar{s}_i є її доміантною стратегією – найкращою відповіддю на будь-які дії решти країн. Зазначеними припущеннями є

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n (1 - \alpha_j) \underline{s}_j > \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) d_j^0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Для інтерпретації цих припущень скористаємося випадком $\alpha_j \equiv \alpha$:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \underline{s}_j > \sum_{j=1}^n d_j^0, \quad i = 1, \dots, n,$$

тобто мінімального виробництва будь-яких $(n - 1)$ країн достатньо для покриття мінімального попиту всіх n країн. Оскільки тоді мінімальний попит слід вважати малим порівняно з мінімальною пропозицією, що видається прийнятним.

Очевидно, для різних, але достатньо близьких значень α_j припущення (19) має подібну інтерпретацію.

Теорема 1. За умови (19) дана ігрова модель має єдину рівновагу Неша $s^N = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ у чистих стратегіях, причому стратегія $s_i = \bar{s}_i$ – домінантна для кожного гравця $i = 1, \dots, n$:

$$H_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_n) > H_i(s) \quad \forall \quad s = (s_1, \dots, s_n), \quad s_i \neq \bar{s}_i.$$

Доведення. Коли $\frac{\partial H_i(s)}{\partial s_i} > 0 \quad \forall \quad s = (s_1, \dots, s_n), \quad s_i \neq \bar{s}_i$, то стратегія $s_i = \bar{s}_i$

є домінантною. Якщо f_i, S_i не залежать від s_i , то з рівності (18) маємо

$$\text{sign}\left(\frac{\partial H_i(s)}{\partial s_i}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial s_i r}{\partial s_i}\right),$$

де в силу рівності (17) отримуємо

$$r = \frac{\mu}{\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) s_j - \gamma} \tag{20}$$

при

$$\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j (K_j + S_j - D_j^0), \quad \gamma = \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) d_j^0.$$

Звідси

$$s_i r = \frac{s_i \mu}{\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) s_j - \gamma}, \quad \frac{\partial (s_i r)}{\partial s_i} = \frac{\mu \left[\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) s_j - \gamma \right] - s_i \mu (1 - \alpha_i)}{\left[\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) s_j - \gamma \right]^2},$$

$$\text{sign}\left(\frac{\partial s_i r}{\partial s_i}\right) = \text{sign}\left[\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) s_j - \gamma - s_i (1 - \alpha_i) \right] = \text{sign}\left[\sum_{j=1, j \neq i}^n (1 - \alpha_j) s_j - \gamma \right].$$

Підзнаковий вираз завжди додатний в силу умови (19), що завершує доведення.

Загалом $\text{sign}\left(\frac{\partial H_i(s)}{\partial s_i}\right)$ не залежить від s_i . Якщо гравець i у точці рівноваги має стратегію $s_i^N \in (\underline{s}_i, \bar{s}_i)$, то в цій точці $\frac{\partial H_i(s)}{\partial s_i} = 0$, тобто

$H_i(s_1^N, \dots, s_{i-1}^N, s_i, s_{i+1}^N, \dots, s_n^N)$ не залежить від $s_i = s_i^N$. Тому така рівновага має бути нестійкою, що означає вибір кожним гравцем i стратегії $s_i = \bar{s}_i$ чи $s_i = \underline{s}_i$.

Отже, при умові (19) реальна виручка $s_i r$ країни i від продажу продовольства – зростаюча функція за s_i , коли пропозиція продовольства решти країн – фіксована: попит на пропозицію продовольства країни i є еластичним. Проте виручка від продажу $\hat{s} = \sum_{j=1}^n s_j$ продовольства всього ринку не зростаюча функція за \hat{s} : в силу рівності (20) при $\alpha_j \equiv \alpha$ виручка ринку становить

$$\hat{s} r = \frac{\hat{s} \mu}{\sum_{j=1}^n (1-\alpha) s_j - \gamma} = \frac{\hat{s} \mu}{(1-\alpha) \hat{s} - \gamma},$$

звідки

$$\frac{\partial(\hat{s} r)}{\partial \hat{s}} = \frac{\mu[(1-\alpha) \hat{s} - \gamma] - (1-\alpha) \hat{s} \mu}{[(1-\alpha) \hat{s} - \gamma]^2} = -\frac{\mu \gamma}{[(1-\alpha) \hat{s} - \gamma]^2} < 0.$$

Щоб узагальнити модель взаємозв'язків, введемо для країни i буферний (buffer) запас B_i продовольства, внутрішню ціну $q_i = g_i p_i$ і $p_i = a_i p$ виробників та споживачів продовольства відповідно, внутрішню ціну $Q_i = G_i P_i$ і $P_i = A_i P$ виробників та споживачів непродовольства відповідно, де a_i , A_i , g_i , G_i – додатні стратегічні параметри з двосторонніми обмеженнями. Причини цінових відмінностей можуть бути пропорційні тарифи, пропорційні непрямі податки, субсидії тощо. Крім того, уряд може контролювати внутрішні ціни. При заданих стратегіях інших країн кожна держава $i = 1, \dots, n$ має достатньо важелів для досягнення своїх цілей. Ринкова рівновага залежить від способу урядового втручання: вплив заданих внутрішніх цін інших країн на експорт та імпорт кожної держави $i = 1, \dots, n$ відрізняється від впливу заданих тарифів інших країн. Якщо відмінності внутрішніх і світових цін спричинені тарифами, то відповідна світова ринкова рівновага відрізняється від рівноваги, що відповідає рівновазі при відмінностях внутрішніх і світових цін, спричинених безпосереднім регулюванням цін державами. Таким чином, для регулювання важливими є інституції. Хоча можуть існувати оптимальні значення параметрів a_i , A_i , g_i , G_i , припустимо, що вони є заданими екзогенно.

Крім обсягу $s_i \in [\underline{s}_i, \bar{s}_i]$ продажу продовольства, нехай стратегією також є зміна b_i буферного запасу продовольства країни i :

$$0 \leq B_i + b_i \leq \bar{B}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

де \bar{B}_i – місткість країни i для зберігання продовольства. Тоді обсяг продажу продовольства має враховувати не лише мінімальний попит, але й цю місткість:

$$\underline{s}_i > d_i^0 + \bar{B}_i, i = 1, \dots, n.$$

Моделювання реалістичної поведінки на світовому ринку потребує досить складних засобів і методів [9, 10].

V.M. Gorbachuk, A.G. Shulinok, S.-B. Suleimanov

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ НА МИРОВОМ РЫНКЕ ПРОДОВОЛЬСТВИЯ

На примере простейшей модели взаимосвязей на мировом рынке продовольственных и непродовольственных продуктов показано, что некооперативное равновесие достигается при максимальных объемах экспорта продовольствия.

V.M. Gorbachuk, A.G. Shulinok, S.-B. Suleimanov

THE MODELING OF LINKAGES ON THE WORLD FOOD MARKET

The simplest linkage model of world market for food and non-food products shows that a non-cooperative equilibrium is achieved at the maximal volumes of food export.

Список літератури

1. Rabar F. Local problems in a global system. *Food and Agriculture Program's Newsletter*. 1979. P. 3.
2. Parikh K.S. A framework for an agricultural policy model for India. Laxenburg, Austria: IASA, 1977. RM-77-59.
3. Csaki C. Second version of the Hungarian Agricultural Model. Laxenburg, Austria: IASA, 1979. WP-79-71.
4. Keyzer M.A. An outline of IASA's Food and Agriculture Model. Laxenburg, Austria: IASA, 1980. WP-80-9.
5. Fischer G., Froberg K. Simplified national models. Laxenburg, Austria: IASA, 1980. WP-80-56.
6. Goth W., Selten R. Strategic aspects of IASA's Food and Agriculture Model. Laxenburg, Austria: IASA, 1981. WP-81-9. 20 p.
7. Горбачук В.М. Методы реализации системы взаимосвязанных аграрных моделей стран мира (BLS). *Моделирование плановых расчетов и диалоговая оптимизация*. К.: Знание, 1990. С. 35 – 36.
8. Горбачук В.М., Лещенко Л.Л. Методы интеграции экономических моделей государств в компьютерную систему BLS взаимосвязанных аграрных моделей стран мира. *Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях*. К.: Знание, 1991. С. 91.
9. Горбачук В.М. Линейные модели торговли. *Моделирование и оптимизация*. К.: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 1991. С. 3 – 8.
10. Єрмольєв Ю.М., Гайворонський О.О., Горбачук В.М., Єрмольєва Т.Ю., Кнопов П.С. Моделювання еколого-економічних взаємозалежностей на державному, міждержавному та глобальному рівнях. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку*. К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2017. С. 61 – 63.

Одержано 27.03.2018