УДК 519.854

Ляшко В. І, Огар В. П, Шило В. П.

АЛГОРИТМИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ВЗАЄМОЗАЛІКІВ

Описуються змістовна та математична постановки задачі про проведення взаємних заліків, можливі алгоритми розв'язку цієї задачі. Наводяться результати тестових розрахунків.

Змістовна постановка задачі

Є n підприємств, які провадять господарську діяльність, укладають між собою договори на постачання матеріалів, надання послуг тощо. Якщо вони (частково або цілком) не сплачують по контрактах, то утворюються заборгованості. При цьому часто виникають ситуації, коли підприємство одночасно має і заборгованості перед іншими підприємствами, і боржників, пояснюючи свої заборгованості неплатежами останніх. Тому виникає необхідність у проведенні взаємозаліків, які повинні зменшити загальну суму неплатежів. Сформулюємо математичну модель взаємозаліків.

Математична постановка задачі

Перенумеруємо підприємства та поставимо кожному підприємству з номером i у відповідність i-ту вершину графа. Якщо i-те підприємство винне j-му, то з'єднаємо вершини i та j орієнтованим ребром (i,j) із вагою $w(i,j)$, що дорівнює розміру заборгованості. У такий спосіб одержимо мережу $N = N(V,E,w)$, де V – множина вершин, а E – множина орієнтованих ребер. Ясно, що загальна сума неплатежів дорівнює сумі ваг ребер, тобто

$$P = \sum_{e \in E} w(e) .$$

Для кожної вершини мережі введемо балансову характеристику

$$B(i) = \sum_{(j,i)\in E} w(j,i) - \sum_{(i,k)\in E} w(i,k) .$$

Цілком зрозуміло, що проведення взаємозаліків є перетворення мережі $N = N(V, E, w)$ у нову мережу $NN = NN(VN, EN, wn)$. Показником якості проведених взаємозаліків є загальна сума неплатежів у новій мережі – чим меншою вона буде, тим краще. Оскільки при проведенні взаємозаліків ніхто реальних грошей не сплачує, зрозуміло, що в новій мережі повинні виконуватися такі обмеження:

$$BN(i) = \sum_{(j,i)\in EN} wn(j,i) - \sum_{(i,k)\in EN} wn(i,k) = B(i),\ i = 1,...,|V|, \quad (1)$$

тобто балансові характеристики вершин при взаємозаліках не змінюються.

Припустимо, що задана початкова мережа $N = N(V, E, w)$ та якимось чином отримана нова мережа $NN = NN(VN, EN, wn)$. Нехай обмеження (1) виконані. Якщо сума неплатежів у новій мережі менша, ніж у вихідній, тобто

$$PN = \sum_{e\in EN} wn(e) < P = \sum_{e\in E} w(e),$$

то нова мережа з математичної точки зору краща. Проте чи погодяться учасники взаємозаліків на цю нову мережу, незрозуміло, і прояснити цю ситуацію можливо тільки з ними.

Основне питання, таким чином, полягає в тому, які перетворення мережі припустимі, і остаточну відповідь повинен дати замовник, організатор взаємозаліків.

Будемо розглядати тільки ті перетворення, при яких виконуються обмеження (1). Можливі такі варіанти: будь-які перетворення мережі:

- допустимі;
- допустимі лише однонаправлені циклові перетворення (ОЦП). Вони полягають у тому, що якщо в мережі існує цикл із ребер з однаковим напрямком, то ваги ребер, що входять у цей цикл, зменшуються на розмір ваги ребра, яке має найменшу вагу в циклі. ОЦП гарні тим, що вони не створюють нових ребер. Вада циклових перетворень полягає в тому, що вони, у загальному випадку, не дають змоги одержувати мережі з мінімальною сумою неплатежів;
- допустимі перетворення по циклах із різною направленістю ребер. При цих перетвореннях ваги прямих ребер зменшуються, а обернених – зростають. Ці перетворення гарні тим, що не створюють нових ребер і дають змогу одержувати мережі з мінімальною сумою неплатежів. Вада їх у тому, що можливе зростання заборгованості одного підприємства іншому, з чим вони можуть не погодитися;
- перетворення мережі допустимі, якщо збільшення ваги ребра узгоджено між цією парою підприємств.

Отже, математична модель формулюється таким чином.

Використовуючи допустимі перетворення мережі, знайти нову мережу $NN = NN(VN, EN, wn)$, яка задовольняє обмеження (1) і забезпечує мінімальне значення такому функціоналу:

$$PN = \sum_{e\in EN} wn(e).$$

Аналіз оптимізаційної задачі

Становлять інтерес такі питання:

- Яка нижня межа для розміру PN?
- Чи досяжна нижня межа?

Відповідь на ці питання дає теорема 1.

Теорема 1. **Нижня межа для PN визначається сумою $\frac{1}{2}\sum_{i\in V}|B(i)|$, і вона завжди досяжна.**

Доведення. Розмір нижньої оцінки утворюється з таких розумінь. Оскільки обмеження (1) завжди виконуються, то PN буде найменшою в тому випадку, коли у кожній вершині є тільки вхідні або вихідні ребра. З огляду на те, що вага кожного ребра підсумовується двічі (вперше – коли воно вхідне, і вдруге – коли воно вихідне), одержуємо розмір нижньої оцінки. Покажемо, що вона завжди досяжна. Для цього введемо P-перетворення мережі. Воно застосовне до вершини i, що має як вхідне (k, i), так і вихідне (i,j) ребра і полягає в такому.

Нехай

$$s = \min\{w(k,i), w(i,j)\},$$

$$wn(k,i) - s,\quad wn\,(i,j) - s,\quad wn(k,j) + s.$$

Очевидно, що, по-перше, після P-перетворення мережі загальна сума заборгованості зменшується на розмір s і, по-друге, якщо загальна сума заборгованості в мережі не дорівнює нижній оцінці, то до неї завжди застосовне P-перетворення. Це і доводить теорему.

Алгоритми розв'язування задачі

Перший алгоритм рішення складається в систематичному застосуванні P-перетворення мережі, що приводить зрештою до досягнення нижньої оцінки. Схема алгоритму така:

```
procedure P_RAZVODKA
{
   while( $\sum_{e\in E} w(e) \ge \frac{1}{2}\sum_{i\in V}|B(i)|$ )
   {
   вибір вершини i з максимальним значенням розміру
         s = min{ $\sum_{(j,i)\in E} w(j,i),\ \sum_{(i,k)\in E} w(i,k)$ }
         if (s = 0) break;
         R_transform(i)
   }
}

procedure R_transform(i)
{
   while( min{ $\sum_{(j,i)\in E} w(j,i),\ \sum_{(i,k)\in E} w(i,k)$ } ≠ 0)
   { застосування R-перетворення до i-ї вершини
   }
}
```

Таблиця 1

№	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Число ребер	9900	39800	89700	159958	249 306	356 997	476 970	600 899	721 737	834 124
t, c	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3

Оцінка трудомісткості рішення

Легко бачити, що кожна вершина опрацьовується процедурою R_transform() тільки один раз. Тому оцінка трудомісткості $O(|V|^2)$.

Результати числових експериментів

Розв'язувалися задачі з $|V| = 100, \ldots, 1000$... Результати наведено в табл. 1.

У всіх випадках була досягнута нижня оцінка.

Другий алгоритм рішення полягає в систематичному застосуванні ОЦП-перетворення мережі. Схема алгоритму така:

```
procedure ОЦП_RAZVODKA
{
    while(у мережі є однонаправлені цикли)
    {
        вибір вершини i з максимальним значенням розміру
```

$$s = \min\left\{ \sum_{(j,i)\in E} w(j,i),\ \sum_{(i,k)\in E} w(i,k) \right\}$$

```
        if (s = 0) break;
        ОЦП_transform(i)
    }
}

procedure ОЦП_transform(i)
{
    while (у мережі існують однонаправлені цикли
            з вершиною i)
    { застосування ОЦП-перетворення до i-ї вершини
    }
}
```

Оцінка трудомісткості рішення

Песимістична оцінка $O(|V|^4)$.

Результати числових експериментів

Цей алгоритм не завжди досягає нижньої оцінки. Час рахунку для графа з 1000 вершин – близько 1,5 год.

Врахування можливих додаткових обмежень

Алгоритм легко адаптується до додаткових обмежень, що можуть вводитися для більшої адекватності моделі реальному життю. Такими обмеженнями можуть бути вимоги:

- не враховувати боргів, менших заданого розміру. Ці обмеження враховуються ще на етапі підготування даних – ребра з вагою, меншою від заданої, не з'являються у вихідній мережі;
- враховувати організації, що не хочуть брати участь у проведенні взаємозаліків. І ці обмеження враховуються ще на етапі підготування даних – відповідні організації не мають вершин у вихідній мережі;
- враховувати пари організацій, що не хочуть брати участь у проведенні взаємозаліків. При підготуванні даних ребра між цими парами не з'являються у вихідній мережі.

Якщо припустимі тільки ОЦП-перетворення, то можливе врахування обмежень на максимальну довжину циклу.

Розроблене математичне забезпечення успішно застосували при створенні програмної системи взаємозаліків у РОСАТОМПРОМі.

V. I. Lyashko, V. P. Ogar, V. P. Shilo

ALGORITHMS FOR REALIZATION MUTUAL OFFSETS

Are described informative and mathematical settings of the task about realization of mutual offsets. Results of test counts are shown.