Дослідження стохастичної поведінки клітинних автоматів

Виконав:

Студент групи СА МП2 Глушенков Сергій

Науковий керівник:

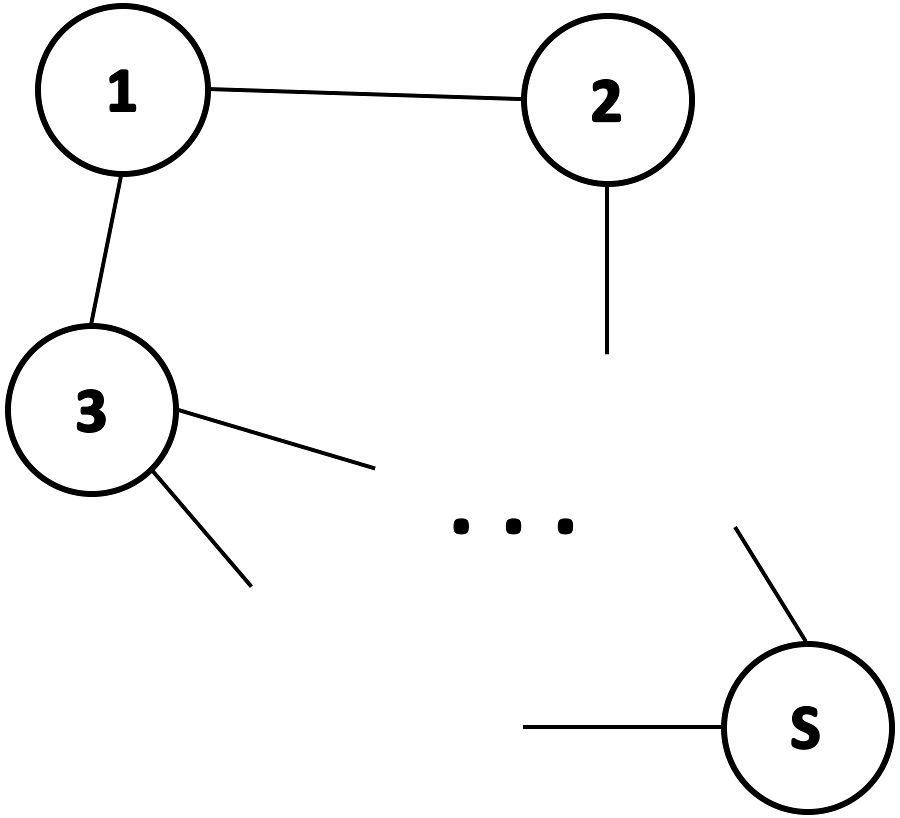
канд. фіз.-мат. наук, доцент Чорней Р.К.

2022 р.

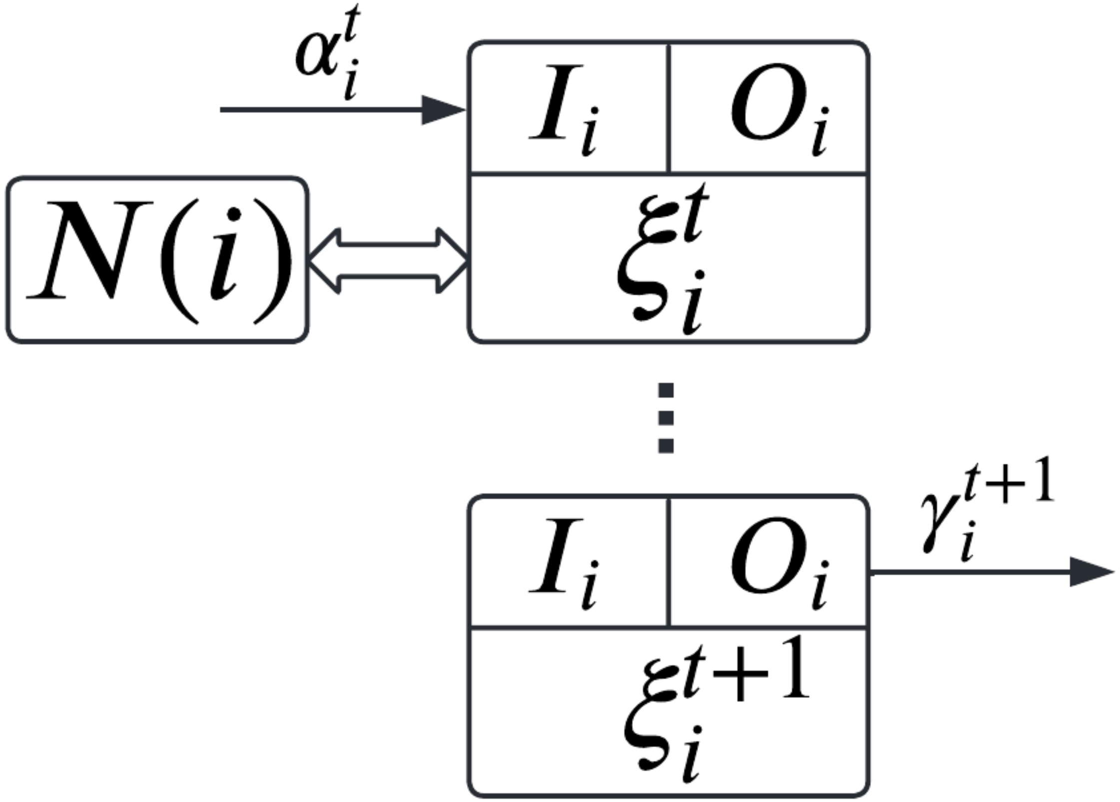
Мета та завдання роботи

- Дати формальний опис локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів.
- Показати існування оптимальних стратегій.
- Розглянути прикладну задачу застосування стохастичних клітинних автоматів.
- Розробити програмний застосунок для демонстрації оптимальних стратегій

Формальний опис



$V = \{1, 2, \ldots, S\}$



$$\xi_i^t = x_i \in X_i \quad |X_i| < \infty$$

$$\alpha_i^t = y_i \in I_i \quad |I_i| < \infty$$

$$\gamma_i^{t+1} = o_i \in O_i \quad |O_i| < \infty$$

Ймовірності переходу

$$Q(x_i, x_j : j \in N(i), y_i; \widetilde{x_i}, o_i) = \Pr\big(\xi_i^{t+1} = \widetilde{x_i}, \gamma_i^{t+1} = o_i \mid \\ \xi_i^t = x_i, \xi_j^t = x_j, j \in N(i), \alpha_i^t = y_i\big),$$

$$0 \le Q(x_i, x_j : j \in N(i), y_i; \widetilde{x_i}, o_i) \le 1$$

Функція витрат

$$F^t = \sum_{i=1}^{S} g(\xi_i^t, \alpha_i^t) + f(\gamma_i^{t+1}) = \sum_{i=1}^{S} r(\xi_i^t, \alpha_i^t, \gamma_i^{t+1})$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} F^t = F \to \widetilde{F}, n \in \mathbb{N}$$

Рандомізована стратегія керування

t=0:

$$\Pr\left(\alpha_i^0 = y_i \middle| \xi_i^0 = x_i^0, \xi_j^0 = x_j^0 : j \in N(i)\right)$$

t=1:

$$\Pr\left(\alpha_i^1 = y_i \middle| \{\xi_i^0 = x_i^0, \xi_j^0 = x_j^0 : j \in N(i), \alpha_i^0 = y_i^0\}, \xi_i^1 = x_i^1, \xi_j^1 = x_j^1 : j \in N(i)\right)$$

$$\Pr\Big(\alpha_i^t = y_i \mid \{\xi_i^0 = x_i^0, \xi_j^0 = x_j^0 : j \in N(i), \alpha_i^0 = y_i^0\}, \{\xi_i^1 = x_i^1, \xi_j^1 = x_j^1 : j \in N(i),$$
$$\alpha_i^1 = y_i^1\}, \ldots, \{\xi_i^{t-1} = x_i^{t-1}, \xi_j^{t-1} = x_j^{t-1} : j \in N(i), \alpha_i^{t-1} = y_i^{t-1}\},$$
$$\xi_i^t = x_i^t, \xi_j^t = x_j^t : j \in N(i)\Big) = \Pr(\alpha_i^t = y_i \mid h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1})$$

Стратегії керування

Нерандомізована (детермінована):

$$\Pr\left(\cdot \middle| h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1} \right) = 1$$

Марковська:

$$\Pr\left(\alpha_i^t = y_i \middle| h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1}\right) = \Pr\left(\alpha_i^t = y_i \middle| \xi_i^t = x_i^t, \xi_j^t = x_j^t : j \in N(i)\right)$$

Стаціонарна:

$$\Pr\left(\alpha_i^{t'} = y_i \middle| \xi_i^{t'} = x_i^{t'}, \xi_j^{t'} = x_j^{t'} : j \in N(i\right) =$$

$$\Pr\left(\alpha_i^{t''} = y_i \middle| \xi_i^{t''} = x_i^{t''}, \xi_j^{t''} = x_j^{t''} : j \in N(i)\right)$$

Стратегії керування

$$\mathrm{c} = \prod_{i=1}^{S} |X_i|, \psi_k = \{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_S = x_S\}$$

Стратегія для системи з S клітинних автоматів:

$$\omega = \{(\omega_1^t | h_{\psi_1}^t, \omega_1^{t-1}), (\omega_2 \middle| h_{\psi_2}^t, \omega_2^{t-1}), \dots, (\omega_c \middle| h_{\psi_c}^t, \omega_c^{t-1})\}$$

$$\omega_k^t = (\alpha_1^t, \alpha_2^t, \dots, \alpha_S^t), \forall k = 1, \dots, c$$

$\omega \in \Omega$ – множина допустимих стратегій

Існування оптимальної стратегії

Теорема 1.1. *Розглянемо систему синхронних локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів, задану на графі* $G(V, N)$ *зі скінченним простором станів* X_i *та скінченним простором керувань* I_i, $\forall i \in V$. *Нехай множина допустимих керувань системою не залежить від моменту часу* t. *Тоді серед множини усіх допустимих стаціонарних марковських детермінованих стратегій* $\mathbf{\Omega}$ *існує оптимальна стратегія* $\omega^* \in \mathbf{\Omega}$.

Існування оптимальної стратегії

- Існування серед усіх допустимих детермінованих стратегій.
- Марковська властивість.
- Стаціонарність.

Існування оптимальної стратегії

Визначимо очікувані дисконтовані витрати для деякого дисконтованого множника $\beta \in (0,1), \forall \omega \in \Omega$:

$$\mathcal{F}_{\psi}^{\omega}(\beta) = E_{\psi}^{\omega} \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t r(\psi^t, \omega, \gamma^{t+1})$$

$\Omega_{\psi_k} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_S, |I_i| < \infty$

$\prod_{k=1}^{c} \Omega_{\psi_k} = \Omega - \text{обмежена}$

$\mathcal{F}_{\psi}^{\omega}(\beta)$ – неперервний

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\psi}^{\widetilde{\omega}}(\beta) = \inf_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_{\psi}^{\omega}(\beta) \quad (1)$$

Марковська властивість

Використовуючи умовне математичне сподівання, для фіксованого $p \geq 0$:

$$\mathcal{F}_{\psi_0}^{\omega}(\beta) = E_{\psi_0}^{\omega}\Bigg\{ \sum_{t=0}^{p} \beta^t r(\psi^t, \omega^t, \gamma^{t+1}) +$$

$$E^{\omega}\Bigg(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \omega^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = \psi_0, \ldots, \psi^p = \psi_p \Bigg) \Bigg\}$$

Марковська властивість

Використовуючи принцип Беллмана можна показати, якщо $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_p$ – перші p+1 стани, то $\forall \omega \in \Omega$, згідно з (1):

$$E^{\widetilde{\omega}}\Big(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \widetilde{\omega}^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = \psi_0, \dots, \psi^p = \psi_p\Big) \leq$$

$$\leq E^{\omega}\Big(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \omega^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = \psi_0, \dots, \psi^p = \psi_p\Big)$$

Марковська властивість

Позначивши:

$$\Phi^{\widetilde{\omega}}(\psi^0,\ldots,\psi^p) = E^{\widetilde{\omega}}\Big(\sum_{t=p+1}^{\infty}\beta^t r(\psi^t,\widetilde{\omega}^t,\gamma^{t+1})\,|\,\psi^0=\psi_0,\ldots,\psi^p=\psi_p\Big)$$

І використовуючи скінченність множини послідовностей $(\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^p)$, можна показати що для деякого фіксованого k, $\Phi^{\widetilde{\omega}}(\psi^0,\ldots,\psi^k)$ залежить лише від ψ^k. Використовуючи незалежність $\Phi^{\widetilde{\omega}}(\psi^0,\ldots,\psi^k)$ від історії, можна ввести такий керуючий вплив для k=1:

$$\widetilde{\omega}_{(1)}(\psi^0,\psi^1,\ldots,\psi^k,\ldots) =$$

$$(\omega^0_{(1)}(\psi^0),\omega^1_{(1)}(\psi^1),\omega^2_{(1)}(\psi^1,\psi^2)\ldots,\omega^k_{(1)}(\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^k),\ldots)$$

Марковська властивість

Такий, що $\Phi^{\widetilde{\omega}_{(1)}}(\psi^0) = \Phi^{\widetilde{\omega}}(\psi^0)$ і тоді можна замінити керування на:

$$\omega^0_{(1)}(\psi^0) = \widetilde{\omega}^0(\psi^0)$$

Ітеративно повторивши дану процедуру для всіх k, і використавши метод діагоналізації Вєйерштрасса, отримаємо марковську стратегію:

$$\dot{\omega}_{(\cdot)}(\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^k, \ldots) = (\omega^0_{(\cdot)}(\psi^0), \omega^1_{(\cdot)}(\psi^1), \omega^2_{(\cdot)}(\psi^2), \ldots, \omega^k_{(\cdot)}(\psi^k), \ldots)$$

Для даної стратегії загальноочікувані дисконтовані витрати будуть такими як у оптимальної стратегії $\widetilde{\omega}$, а отже:

$$\mathcal{F}^{\dot{\omega}}_{\psi^0}(\beta) = \mathcal{F}^{\widetilde{\omega}}_{\psi^0}(\beta)$$

Стаціонарність

Використовуючи рівняння Беллмана, та незалежність ймовірностей переходу між станами, функцій витрат та простору рішень від часу, можна показати, що якщо стратегія є марковською і для неї виконується:

$$\mathcal{F}_{\psi^0}^{\dot{\omega}}(\beta) = \mathcal{F}_{\psi^0}^{\widetilde{\omega}}(\beta)$$

то існує стаціонарна марковська стратегія, для якої виконується:

$$\mathcal{F}_{\psi^0}^{\omega^*}(\beta) = \min_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_{\psi^0}^{\omega}(\beta)$$

Отже, теорема доведена. $\blacksquare$

Знаходження оптимальної стратегії

$$\pi^{\omega}(\psi_k) = \pi^{\omega_k}(x_1, x_2, \ldots, x_S) = \prod_{i=1}^{S} \left(\frac{(1 - p(x_i, y_i))}{p(x_i, y_i)} \right) G(\psi_k)^{-1}$$

Процедура покращення стратегії:

1)

$$\begin{cases} R_{\psi_k}^{\omega} + \nu(\psi_k) = r(\psi_k, \omega_k) + \sum_{p=1}^{c} Q(\psi_p \mid \psi_k, \omega_k)\nu(\psi_k), \ k = 1, \ldots, c \\ \sum_{k=1}^{c} \pi^{\omega_k}(\psi_k)\nu(\psi_k) = 0 \end{cases}$$

Знаходження оптимальної стратегії

2) Визначимо множини A^{ψ_k} : $\sum_{i=1}^{c} Q(\psi_i|\psi_k, \omega_k^*) R_{\psi_i}^{\omega} = R_{\psi_k}^{\omega}$, $\omega_k^* \in A^{\psi_k}$

$$r(\psi_k, \omega_k^*) + \sum_{p=1}^{c} Q(\psi_p \mid \psi_k, \omega_k^*) \nu(\psi_p)$$
$$< r(\psi_k, \omega_k) + \sum_{p=1}^{c} Q(\psi_p \mid \psi_k, \omega_k) \nu(\psi_p) = R^{\omega} + \nu^{\omega}(\psi_k)$$

3) Якщо $\forall \psi_k : A^{\psi_k} = \emptyset$, то ми знайшли оптимальну стратегію, інакше:

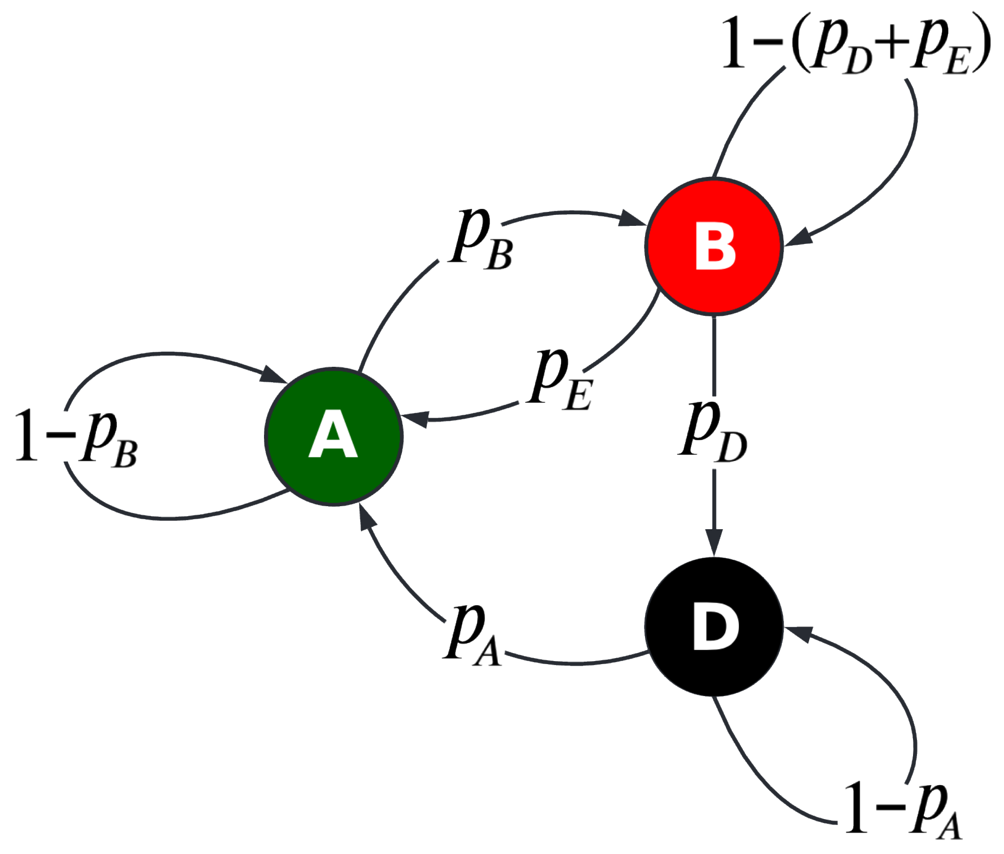
$\forall \psi_k : A^{\psi_k} \neq \emptyset$: $\omega_k := \omega_k^* \in A^{\psi_k}$ і повертаємось на крок 1.

Проблема лісових пожеж

4 можливі стани для кожної ділянки лісу:

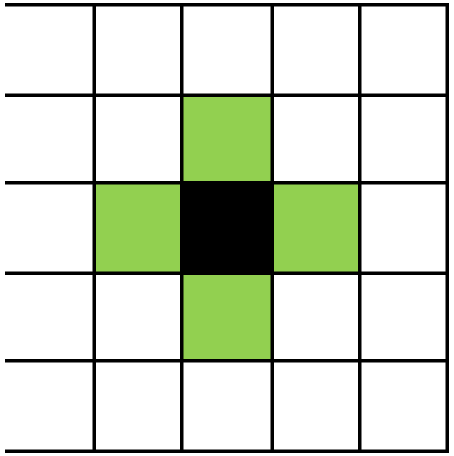
- A – жива ділянка
- B – палаюча частина лісу
- D – вигорівша клітина
- E – пуста ділянка без рослинності

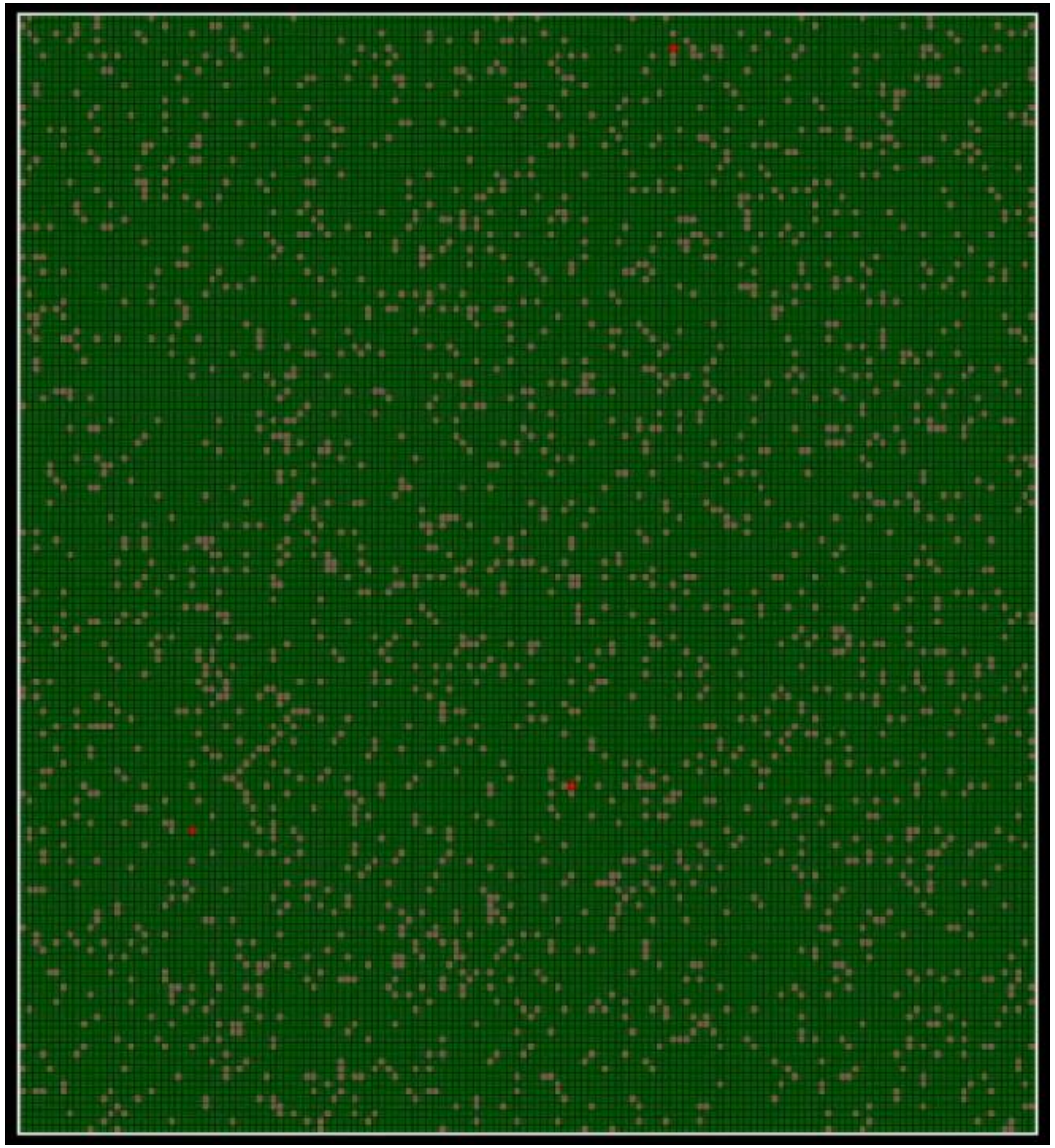
2 можливих вхідних сигнали керування: гасити і не гасити.



Проблема лісових пожеж

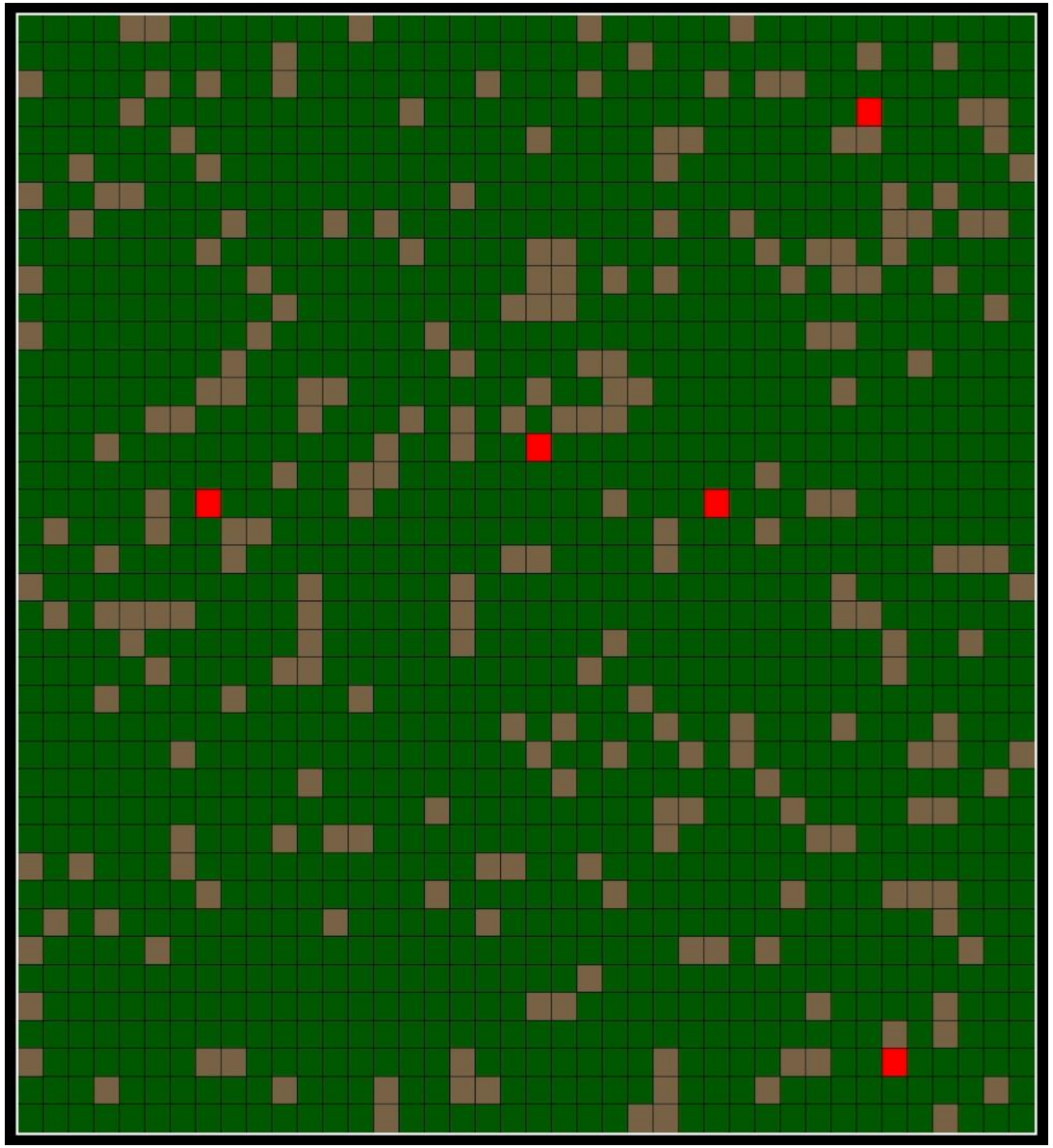
У якості сусідів кожного клітинного автомата використовується окіл фон Неймана 1-го порядку:



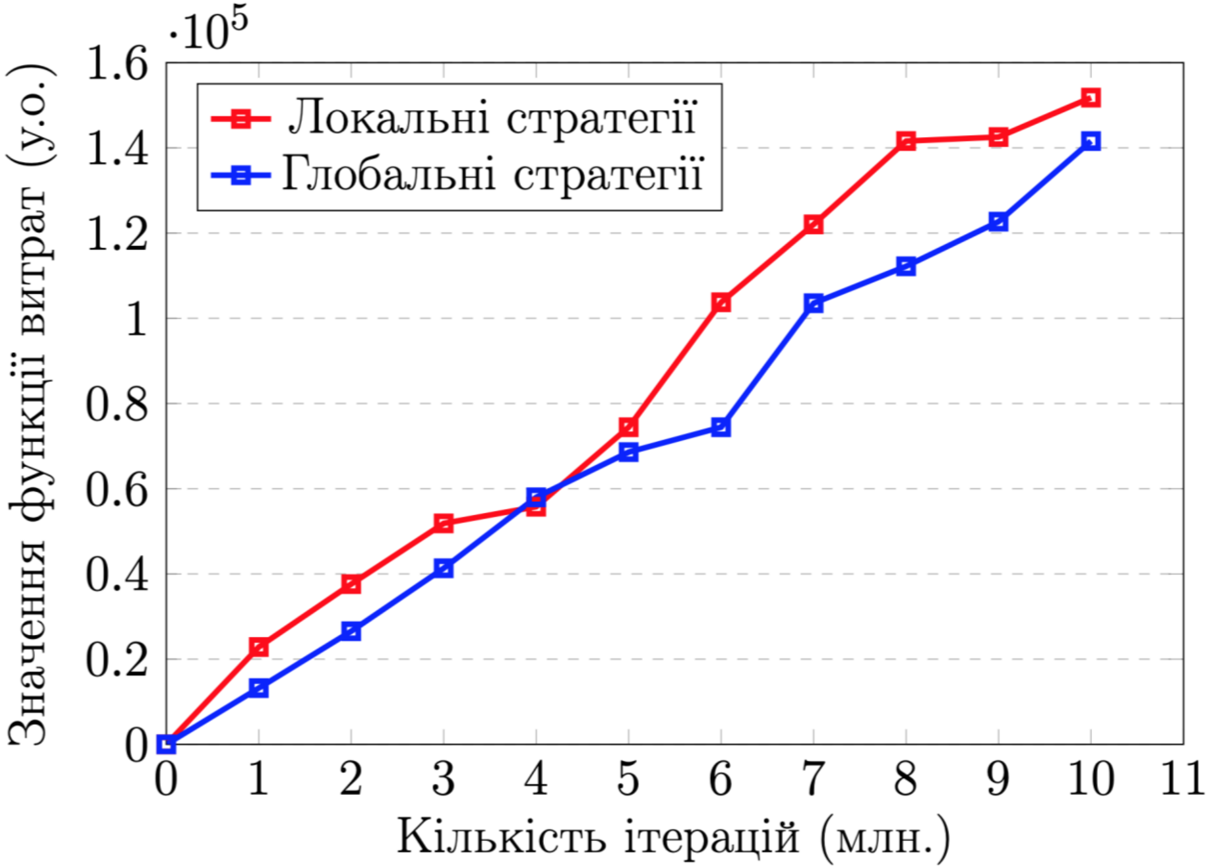


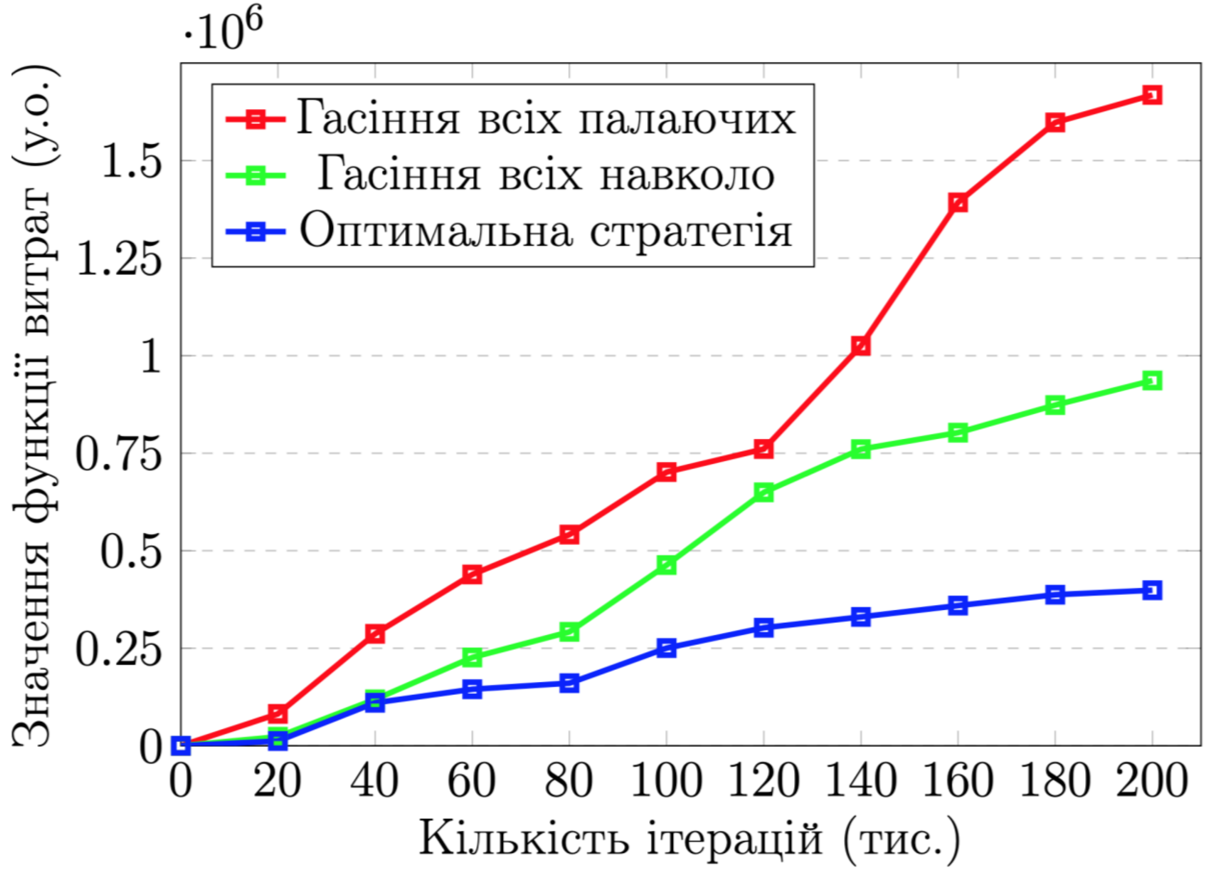
Проблема використання стратегій

- Кількість можливих станів при використанні глобальної стратегії: $c = 3^{(S \times S)}$. При S=2: c=81, при S=3: c=19 683, при S=4: c=43 046 721!
- Кількість станів для клітини та її околу фон Неймана: $c = 3^5 = 243$.
- Чи призводить використання локальних стратегій до мінімізації глобальної функції витрат?



Порівняння стратегій





Висновки

- Наведено формальний опис стохастичних клітинних автоматів.
- Показано існування оптимальних детермінованих марковських стаціонарних стратегій керування.
- Використання глобальних стратегій є досить обмеженим, а використання локальних не призводить до глобальної мінімізації витрат.
- Розроблений програмний застосунок демонструє ефективність оптимальної стратегії і може бути використаний в майбутніх дослідженнях.

Використані джерела

- Чорней Р.К. Локальне керування в мережах. Національний унівеситет «Києво-Могилянська Академія», 2021 – 311 с.
- Viskov O.V., Shiryayev A.N. On controls leading to optimal stationare states // Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1964. Vol. 71.
- Agapie, Alexandru & Andreica, Anca & Giuclea, Marius. (2014). Probabilistic Cellular Automata. Journal of computational biology : a journal of computational molecular cell biology. 21. 10.1089/cmb.2014.0074.
- Derman C. Finite State Markovian Decision Processes. -- New York, London : Academic Press, 1970.
- Rodolfo Maduro Almeida and Elbert E N Macau 2011 J. Phys.: Conf. Ser. 285 012038

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!