Міністерство освіти і науки України
Національний Університет «Києво-Могилянська Академія»
Кафедра математики факультету інформатики

Відстань опору та її властивості
Resistance Distance in Graphs

Курсова робота
за спеціальністю "Прикладна математика" 113

Керівник курсової роботи
Д.ф.-м.н., проф. Олійник Б.В.
____
(підпис)
"__"______________ 2020 р.

Виконала студентка
Бакланова В.Г.
"__"______________ 2020 р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України
Національний Університет «Києво-Могилянська Академія»
Кафедра математики факультету інформатики

Затверджую
Зав. кафедри математики, проф., д.ф.-м.н.
________________ Б.В. Олійник
(підпис)
"__"______________ 2020 р.

Індивідуальне завдання
на курсову роботу

студентці прикладної математики факультету інформатики 4 курсу
ТЕМА: "Відстань опору в графах (Resistance distance in graphs)"
Вихідні дані:

- визначення поняття відстані опору в графах
- відстань опору з точки зору фізики (електричні ланцюги та еквівалентний опір)
- відстань опору в графах з ротаційною симетрією
- визначення відстані опору за допомогою матриці Кіргхофа для графа
- визначення відстані опору за допомогою метода нодальних потенціалів

Зміст курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Календарний план

Вступ

1. Необхідні визначення
2. Поняття відстані опору
3. Обчислення відстані опору в загальному випадку
4. Правила, що допомогають спростити обчислення відстані опору в деяких структурних елементах графу
   (а) Послідовне з'єднання
   (б) Паралельне з'єднання
5. Відстань опору в ротаційно-симетричних графах

6. Припущення про структури графа для фіксованої кількості вершин та однакових ваг для кожного з ребер, що забезпечує мінімальну та максимальну відстань опору

Висновки

Список використаних джерел

Дата видачі "__"______________ 2020 р. Керівник __________________

(підпис)

Завдання отримала __________________

(підпис)

ТЕМА: "Відстань опору в графах (Resistance distance in graphs)"
Календарний план виконання роботи

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання	Примітка
1	Отримання завдання на курсову роботу	10.10.2019	
2	Отримання довідкового теоретичного матеріалу від наукового керівника	10.10.2019	
3	Вивчення матеріалів за темою	20.03.2020	
4	Визначення змісту теоретичної та практичної частини курсової роботи з науковим керівником	27.03.2020	
5	Написання курсової роботи	19.04.2020	
6	Підготовка презентації	20.04.2020	

Студентка ________________
Науковий керівник ________________
"__"________________ 2019 р.

Вступ

Поняття відстані опору в графах визначають за аналогією з поняттям еквівалентного опору в фізиці. З точки зору дослідження графів, ця метрика може допомогти порівняти ступінь "поєднанності"вершин в графі (який пропорційний кількості шляхів між ними), залежно від структури та кількості ребер у графі.

Окрім традиційних застосувань в якості математичного апарату для дослідження фізичних властивостей електричних ланцюгів, таке представлення відстані опору широко використовується в органічній хімії. Також ця метрика може допомогти в дослідженні випадкових блукань у графах.

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі наведені необхідні визнечення та леми, розглянуто різні означення поняття відстані опору. У другому розділі показано два найбільш поширені способи визначення відстані опору графа в загальному випадку, коли немає ніякої додаткової інформації про його структуру та можливі наявні симетрії. В третьому розділі представлений короткий огляд способів обчислення відстані опору в графах деяких видів, наведено інформацію про застосування правил Кіргхофа для визначення відстані опору в графах, структура яких може бути представлена у вигляді спрощувального ланцюга. На основі поданої інформації розглянуті питання відстані опору в ротаційно-симетричних графах. У четвертому розділі зроблені припущення щодо структури графа, яка забезпечує мінімальну та максимальну відстань опору для графа з n вершин та однакових w_{ij} $\forall\ i, j \in V(G)$.

Метою даної роботи є розглянути поняття відстані опору в графах, навести коротких огляд наявних підходів до її визначення та обчислення в загальному випадку та у випадку окремих стуктур графів.

Зміст

Розділ 1

Необхідні визначення

Визначимо основні поняття, що використовуються в цій роботі.

Означення 1.1. *[8] Нехай V – непорожня множина, $V^{(2)}$ – множина всіх його двохелементних підмножин. Пара (V, E), де V – множина вершин, E – множина ребер, що є підмножиною множини $V^{(2)}$, називається графом (неорієнтовним графом).*

Означення 1.2. *Зваженим графом називають граф G, в якому для кожного ребра e_{ij} ставиться у відповідність його вага – $w_{i,j} \in \mathbb{R}$. [8]*

Означення 1.3. *Кількість ребер, інцидентних даній вершині i, називають степенем вершини i, позначають $d(i)$.*

Означення 1.4. *[2] Матрицею суміжності $A(G)$ графа G називають матрицю розміру $n \times n$, рядки і колонки якої проіндексовано вершинами з $V(G)$, а (i, j)-й елемент дорівнює 1, якщо вершини i, j суміжні, 0 інакше.*

Означення 1.5. *Шляхом в графі називають послідовність ребер, яка поєднує послідовність вершин, що не повторюються.*

Означення 1.6. *Вершину $j \in V(G)$ називають досяжною для вершини $i \in V(G), i \neq j$, якщо існує шлях з i до j.*

Означення 1.7. *Граф називають зв'язним, якщо для кожна з вершин графа G є досяжною для всіх інших вершин.*

Нехай G – зважений граф з $V(G) = \{1, 2, ..., n\}$.

Означення 1.8. *[2] Позначимо $D(G)$ діагональну матрицю розміру $n \times n$, в якій i-й діагональний елемент дорівнює $d(i), i = 1, 2, ..., n$.*

Означення 1.9. *[1] Матриця Кіргхофа (дискретний оператор Лапласа) для графа G, позначена як $L(G)$ визначають як $L(G) = D(G) - A(G)$. Для зваженого графа G, $L(G)$ визначається для кожних $i, j : i \neq j$ так:*

$$l_{i,j} = \begin{cases} 0 & ,if\ (i,j) \notin E(G) \\ -\frac{1}{w_{i,j}} & if\ (i,j) \in E(G) \end{cases}$$

Означення 1.10. *Кістяковим деревом графа G називають його ациклічний зв'язний підграф, що містить всі вершини з $V(G)$.*
Вводимо також поняття кістякового лісу – ациклічного підграфу, що містить всі вершини з $V(G)$, але він не є зв'зяним.

Означення 1.11. *[8] Нехай A – матриця $n \times n$. Матрицю H називають узагальнено оберненою до матриці A, якщо $AHA = A$. Якщо A – квардатна невироджена матриця, то A^{-1} буде єдиною оберненою матрицею до A.*

Введемо наступні позначення.

Нехай A – матриця розміру $n \times n$, тоді для $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ позначимо субматрицю $A(i|j)$, таку, яка отримана видаленням рядка i та колонки j з матриці A. Відповідно $A(i, j|i, j), i \neq j$ позначатимемо субматрицю, отриману за допомогою видалення рядків i, j та колонок i, j з матриці A. Якщо $S, T \subset \{1, 2, ..., n\}$, то $A[S|T]$ позначатимемо субматрицю, отриману шляхом видалення рядків з номерами в S та колонок в T.

Нехай G – зв'язний граф. Кістяковим 2-деревом називають кістяковий ліс з двох компонент зв'язності. Кажуть, що кістякове 2-дерево розділяє вершини i та j, якщо вони знаходяться у двох різних компонентах зв'язності 2-дерева. Для зваженого графа G, вага кістякового 2-дерева дорівнює добутку ваг його ребер.

1.1 Відстань опору

Поняття відстані опору в графі вводять для того, щоб краще передати ступінь "поєднанності"графа.

Для того, щоб відрізняти між собою графи на рис.1.1, в яких однакова відстань між вершинами a, b, але різна кількість шляхів між ними, можемо уявити "складність"переходу від a до b як міру відстані і розуміти під цим те, що "складність"підвищується зі зменшенням кількості шляхів між a і b.

Відстань опору в графах визначають за аналогією з електричними ланцюгами в фізиці. Відстань опору можна визначити декількома способами, почнемо з визначення її в термінах узагальненого оберного.

Лема 1.1.1. *[1] Нехай L – матриця Кіргхофа для G. Нехай H – узагальнене обернене для L. Тоді для кожних $i, j : i \neq j$,*

$$r_{ij} = h_{ii} + h_{jj} - 2h_{ij}$$

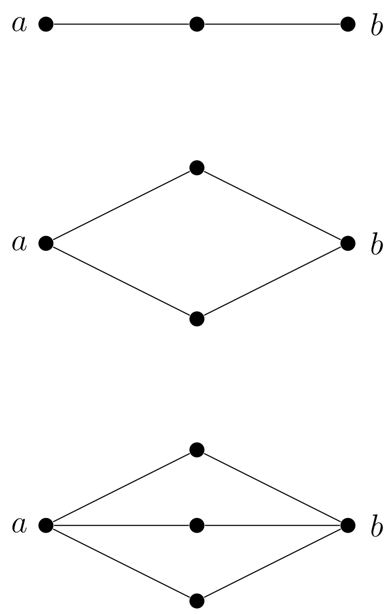

Рис. 1.1: Поєднанність вершин a і b

Застосовуючи до графа оператор Лапласа (матрицю Кіргхофа) можна визначити відстань опору наступним чином.

Лема 1.1.2. *Нехай L – матриця Кіргхофа для G. Тоді для $i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i \neq j$,*

$$r_{ij} = \frac{detL(i,j|i,j)}{detL(i|i)}$$

Скориставшись визначеними раніше поняттями кістякового 2-дерева, що розділяє дві вершини графа, можемо визначити відстань опору для ребра між цими двома вершинами так.

Лема 1.1.3. *[2] Нехай G – зв'язний зважений граф з $V(G) = \{1, ..., n\}$, нехай також $i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$. Тоді r_{ij} дорівнює сумі ваг всіх кістякових 2-дерев G, що розділяють i та j, поділеній на суму ваг всіх кістякових 2-дерев G.*

Розділ 2

Способи обчислення відстані опору в графах

Оскільки поняття відстані опору виводиться за аналогією з фізичним поняттям еквівалентного опору в електричних ланцюгах, одним з найпростіших способів обчислення відстані опору в графі є повернутися до цієї аналогії.

2.1 Правила Кіргхофа

Правила Кіргхофа визначають способи розрахунку потоків електричного струму в нетривіальних електричних ланцюгах. Їх можна застосовувати для визначення відстані опору в графі. Сформулюємо коротко закони, на яких базується даний підхід до обчислення відстані опору в графі.

2.1.1 Перше правило Кіргхофа

Перше правило Кіргхофа визначає, що в кожному вузлі електричного ланцюга алгебраїчна сума струмів дорівнює нулю. [9]

$$\sum_k I_k = 0$$

Можна сформулювати це правило в матричному вигляді, тоді якщо A – матриця провідності або матриця Кіргхофа для зваженого графа G, $u = (u_1, ..., u_n)$ – вектор потенціалів у кожній з вершин графа, то

$$Au = 0$$

2.1.2 Друге правило Кіргхофа

Друге правило Кіргхофа, також відоме як закон напруг Кіргхофа, говорить, що алгебраїчна сума напруг на резисторах замкненого контуру дорівнює сумі електрорушійних сил, що входять у даний контур. Якщо в контурі відсутні електрорушійні сили, то ця сума дорівнює нулю.

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = 0$$

2.1.3 Спосіб обчислення

Загальний спосіб обчислення потоків струму з використанням законів Кіргхофа полягає в визначенні системи лінійних рівнянь, за допомогою яких можна обчислити всі значення струмів у контурі. Якщо G – зв'язний граф з n вершин, оберемо дві вершини, для яких обчислюватимемо відстань опору. Думатимемо про граф G як про електричний ланцюг, де на кожному ребрі встановлено резистор в 1 Ом. Струм може увійти в ланцюг лише через вершину i, а вийти лише через вершину j. Позначимо $v(k)$ – напругу у вершині k, $N(k)$ – множину вершин, суміжних з k. Нехай тепер $v(i) = 1, v(j) = 0$, згідно з законом Ома та правилом Кіргхофа, для будь-якої іншої вершини $k \in V(G), k \neq i, j$

$$\sum_{y \in N(k)} (v(k) - v(y)) = 0$$

Позначимо I_k k-ту колонку одиничної матриці. Визначимо матрицю C, отриману з матриці L шляхом заміни i, j-го рядків на рядки i, j з одиничної матриці відповідно. Якщо покладемо $v(n) = (v_1, ..., v_n)'$, то v задовольняє рівняння

$$Cv = e_i$$

Розв'язком такого рівняння буде

$$v(k) = (-1)^{i+k} \frac{detL(i,j|k,j)}{detL(j|j)}$$

для $k \neq j, v(j) = 0$. Струм, що входить в мережу через вершину i визначається як сума струмів від вершини y до i для всіх $y \in N(i)$ та дорівнює

$$\sum_{y \in N(i)} (v(y) - v(i)) = \sum_{y \in N(i)} (v(y) - 1) = \sum_{y \in N(i)} v(y) - d_i$$

Отримуємо значення для вхідного потоку струму

$$\frac{detL(j|j)}{detL(i,j|i,j)}$$

Це значення є оберненим до $r(i,j)$, визначеного нами раніше. Обернене значення до значення струму називають ефективним опором між i, j, це пояснює термін відстань опору.

2.2 Спрощувальні ланцюги

За аналогією з резисторами у електричному колі, можемо застосувати для обчислення відстані опору нетривіальних графів можемо використати правила еквівалентних резисторів. Правила різних комбінацій резисторів виводяться згідно з законом Ома, законом напруг та законом струмів Кіргхофа. Правила поєднання резисторів допомогають при обчисленні потоків струму або еквівалентного опору в складних структуно електричних колах.

2.2.1 Ланцюг – послідовне з'єднання

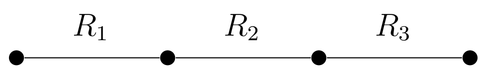

Рис. 2.1: Послідовне з'єднання резисторів

Якщо резистори з'єднані послідовно, як на рис. 2.1, то їх еквівалентний опір дорівнює сумі їх опорів.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + R_3$$

2.2.2 Паралельне з'єднання

Якщо резистори з'єднані паралельно(як на рис. 2.2), то для обчислення еквівалентного опору таку групу резисторів можна замінити на один резистор, опір якого становить

$$R_{eq} = \Big(\sum_{i=1}^{n} R_i^{-1}\Big)^{-1} = \Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\Big)^{-1}$$

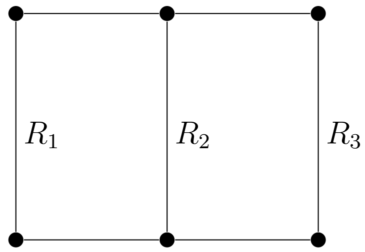

Рис. 2.2: Паралельне з'єднання резисторів

2.3 Метод нодальних потенціалів

Метод нодальних потенціалів є спрощенням розрахунків з використанням правил Кіргхофа для електричних кіл, що містять лише одне джерело струму. Його можна узагальнити і для менш тривіальних випадків, коли джерел струму декілька а структура може бути спрощена.

Суть метода полягає в наступному. Розглядаємо граф з n вершин, в якому кожне ребро має вагу $R_{ij} = R_{ji}$. Розглядаємо для нього показник "провідності"для кожного ребра, значення якого є оберненим до опору, а саме

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$$

Закони обчислення провідності обернені до законів обчислення опору, тому маємо

$\sigma_{eq} = \sigma_A + \sigma_B + ...$ – для паралельного з'єднання

$\sigma_{eq} = (\sigma_A^{-1} + \sigma_B^{-1} + ...)^{-1}$ – для послідовного з'єднання

Робимо наступні припущення. По-перше, покладемо $V_1 = \epsilon, V_n = 0$. Будемо вважати, що граф повний, тобто існують ребра між кожними двома вершинами з $V(G)$, для кожного ребра, якого насправді немає в графі, покладемо $\sigma_{ij} = 0$. Використовуючи правила спрощення для електричних ланцюгів, можемо звести будь який граф до неспрощувального, тому зосередимося на неспрощувальних лелектричних ланцюгах.

Позначимо потік струму вздовж ребра між вершинами i та j як I_{ij}. В термінах нодальних потенціалів

$$I_{ij} = \sigma_{ij}(V_i - V_j) = -I_{ji}$$

$$I_{ii} = 0$$

Мінімально з'єднанане, неспрощувальне коло містить принаймні $3n/2$ ребер, отже, стільки ж невідомих змінних (струмів) в розрахунках за традиційним методом використання правил Кіргхофа. Однак кількість невідомих нодальних потенціалів – $n - 2$, що для великих значень n є значно меншою кількістю невідомих та рівняннь.

В матричній формі метод нодальних потенціалів не виражають наступим чином[7]

$$\begin{pmatrix} c_1 & -\sigma_{1,2} & -\sigma_{1,3} & \dots & -\sigma_{1,n-1} & -\sigma_{1,n} \\ -\sigma_{2,1} & c_2 & -\sigma_{2,3} & \dots & -\sigma 2, n-1 & -\sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\sigma_{n-1,1} & -\sigma_{n-1,2} & -\sigma_{n-1,3} & \dots & c_{n-1} & -\sigma_{n-1,n} \\ -\sigma_{n,1} & -\sigma_{n,2} & -\sigma_{n,3} & \dots & -\sigma_{n,n-1} & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{out} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{in} \end{pmatrix}$$

В цій системі невідомими є $V_2, ..., V_{n-1}$.

Розділ 3

Відстань опору в деяких видах графів

У попередньому розділі наведено міркування та способи обчислення відстані опору в загальному випадку, для графа довільної структури. Проте у випадку, коли граф належить до певної родини, або має симетрію, обчислення значно спрощуються. В цьому розділі розглянемо способи обчислення відстані опору для окремих родин графів.

3.1 Ротаційно симетричні графи

Означення 3.1. *Автоморфізмом графа $G = (V, E)$ є перестановка σV та E така, що*

- $\sigma(E) = E$,
- $\sigma(V) = V$,
- *кожна з $e \in E$ інцидентна $v \in V \iff \sigma(e)$ інцидентна $\sigma(v)$.*

[6]

Означення 3.2. *Ротаційною симетрією називають автоморфізм графа $G\sigma \in Aut(G)$, цикли якого всі однакової довжини (більше ніж 2) і такий, що множина фіксованих точок σ або порожня, або спрощується до однієї вершини. [6]*

До ротаційно симетричних графів належать, зокрема, такі родини графів як Колесо, Віяло та Шестерня. Розглянемо відстань опору в таких графах.

3.1.1 Колесо

За означенням, граф-Колесо W_n (рис 3.1) є об'єднанням K_1 та C_n, де перше позначає одну вершину – центр колеса, а друге – цикл з n вершин. Позначимо вершини в циклі

[1]

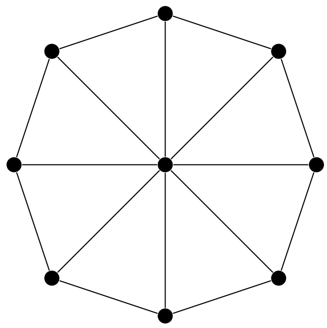

Рис. 3.1: Граф типу Колесо

C_n від 1 до n, а центральну вершину – n+1. Вважатимемо що ребра, які називатимемо спицями колеса, мають однакову вагу α.

Визначимо

$$\gamma = 2 + \frac{1}{\alpha}, \mu = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}, \nu = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$$

Визначаємо формулу для узагальнення чисел Фібоначчі $G_k(\alpha)$, які використовуватимемо для обчислення відстані опору в графах з родин Колесо та Віяло.

$$G_k(\alpha) = \frac{\mu^k - \nu^k}{\mu - \nu}$$

Для обчислення відстані опору в графі-Колесі можна використати наступну теорему.

Теорема 3.1. *Нехай n – натуральне число, $n \geq 3$. Тоді для W_n справедливі такі результати:*

1. *Відстань опору між n+1 (центральною) вершиною та вершиною $i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ становить*

$$r_{n+1,i} = r_{i,n+1} = \frac{G_n^2}{G_{2n} - 2G_n}$$

2. *Відстань опору між вершинами з циклу $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ становить*

$$r_{i,j} = \frac{G_n^2}{G_{2n} - 2G_n}\left[2 - \frac{G_{2k}}{G_k}\right] + G_k$$

де

$$k = \begin{cases} |j - i| & \textit{if } |j - i| \leq \left[\frac{n}{2}\right] \\ n - |j - i| & \textit{if } |j - i| > \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases}$$

[1]

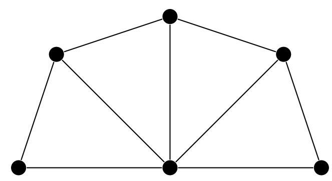

Рис. 3.2: Граф-Віяло

3.1.2 Віяло

Родину графів Віяло(рис 3.2) визначають як $K_1 + P_n$, де P_n – це ланцюг з n вершин. Вершини ланцюга пронумеровані відповідно від 1 до n, а центральна вершина позначена $n+1$. Зауважимо, що якщо $\alpha = 1$, то $G_k(\alpha) = F_{2k}$, де F_r – це r-е число Фібоначчі. Тоді для підрахунку відстані опору в Віялі можемо використати теорему.

Теорема 3.2. *Нехай n – натуральне число, $n \geq 1$. Тоді для графа Fan_n справедливо наступне:*

1. *Відстань опору між (центральною) вершиною $n+1$ і вершиною $i \in \{1, ..., n\}$ можна обчислити як*
$$\frac{F_{2(n-i)} + F_{2i-1}}{F_{2n}}$$
2. *Відстань опору між вершинами ланцюга P_n $i, j \in \{1, ..., n\}, i < j$ становить*
$$\frac{F_{2(n-j)+1}(F_{2j-1} - F_{2i-1}) + F_{2i-1}(F_{2(n-i)+1} - F_{2(n-j)+1})}{F_{2n}}$$

[1]

3.1.3 Шестерня

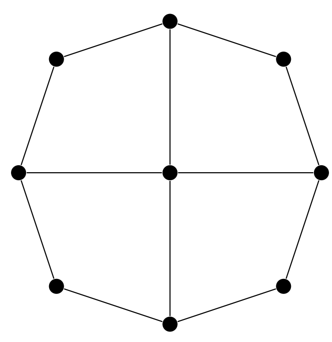

Рис. 3.3: Приклад графа-шестерні

Шестернею (gear) називають граф, який складається з K_1 та C_{2n}.

Граф шестерня є "спрощувальним якщо розглядати його з точки зору фізики, як електричне коло. Таким чином, можемо звести його до неспрощувального за допомогою правил поєднання резисторів та використати метод нодальних потенціалів, наведений для неспрощувальних електричних ланцюгів.

Розглянемо вершину k, що має степінь 2, тому що входить в ланцюг з ребер. Тоді значення σ_{ij} відповідних рядка та колонки матимуть лише два ненульові елементи, позначимо їх σ_{kl}, σ_{km}.

З фізичної точки зору можемо спростити таку структуру, замінивши її на одне ребро між двома сусідніми вершинами m, l, яке матиме провідність $\sigma_{ml} = \sigma_{lm} = (\sigma_{km}^{-1} + \sigma_{kl}^{-1})^{-1}$

Розглянемо спрощення з математичної точки зору. Нехай $k = 2, l = 3, m = 4$. Тоді матриця з методу нодальних потенціалів матиме наступний вигляд

$$\sum{}' = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -\sigma_{13} & -\sigma_{14} & -\sigma_{15} & \dots \\ 0 & c_2 & -\sigma_{23} & -\sigma_24 & 0 & \dots \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & c_3 & 0 & -\sigma_{35} & \dots \\ -\sigma_{41} & -\sigma_{42} & 0 & c_4 & -\sigma_{45} & \dots \\ -\sigma_{51} & 0 & -\sigma_{52} & -\sigma_{53} & c_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Як описано вище, $\sigma_{34} = \sigma_{43} = 0$. Ненульові значення в другому рядку це $\sigma_{23}, \sigma_{24}, c_2 = \sigma_{23} + \sigma_{24}$.

З іншого боку, матриця, що описує неспрощувальне електричне коло це

$$\tilde{\sum}{}' = \begin{pmatrix} c_1 & -\sigma_{13} & -\sigma_{14} & -\sigma_{15} & \dots \\ -\sigma_{31} & \tilde{c_3} & -\tilde{\sigma_{34}} & -\sigma_{35} & \dots \\ -\sigma_{41} & -\tilde{\sigma_{43}} & \tilde{c_4} & -\sigma_{45} & \dots \\ -\sigma_{51} & -\sigma_{53} & -\sigma_{54} & c_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Тут $\tilde{\sigma_{34}} = (\sigma_{23}^{-1} + \sigma_{24}^{-1})^{-1}$, тоді як $\tilde{c_3}, \tilde{c_4}$ містять $\sigma_{34} = \sigma_{43}$. [7]

Таким чином, можемо використовувати метод нодальних потенціалів для неспрощувального електричного кола, який було наведено раніше.

Розділ 4

Мінімальний та максимальний ефективний опір для графа з n вершин

Розглянемо зв'язний зважений граф з однаковою вагою для всіх ребер: $G = (V, E), V(G) = \{1, ..., n\}, \forall e_{ij} \in E(G)\ W(e_{ij}) = w_{ij} = \alpha$. Зробимо припущення про структуру графа, що забезпечуватиме мінімальну та максимальну відстань опору для такого графа.

Означення 4.1. *Ефективний опором графа R_G називають сума всіх відстаней опору між всіма парами вершин графа G.[4]*

$$R_G = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} R_{ij}$$

Теорема 4.1. *Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф з $V(G) = \{1, ..., n\}, E(G) = \{e_1, ..., e_m\}$, нехай $i, j \in V(G)$. Тоді*

$$\begin{cases} r(i,j) = d(i,j) & \text{якщо } G \text{ – дерево} \\ r(i,j) \geq d(i,j) & \text{інакше} \end{cases}$$

де $d(i, j)$ – звичайна відстань між вершинами i, j. [4]

Теорема 4.2. *Ефективний опір графа лише зменшується з додаванням нових ребер та збільшенням ваг ребер. [4]*

4.1 Мінімальна відстань опору для графа з n вершин

Оскільки ефективний опір графа зменшується з додаванням нових ребер, мінімальним він буде з максимально можливою (без паралельних ребер) кількістю ребер, тобто у повному графі K_n.

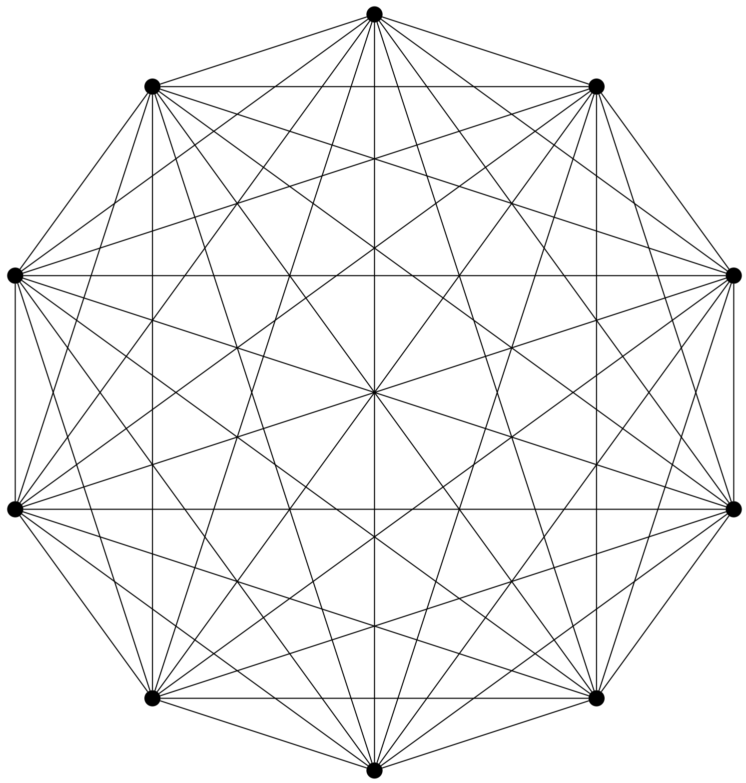

Рис. 4.1: Повний граф для 10 вершин

Значення ефективного опору в повному графі становить [5]

$$n - 1$$

Значення відстані опору між кожною парою вершин i, j в повному графі становить [3]

$$\frac{2}{N}$$

4.2 Максимальна відстань опору для графа з n вершин

Оскільки, як видно з теорем, відстань опору завжди менше або дорівнює звичайній відстані між вершинами, а також виходячи з законів поєднання послідовного або

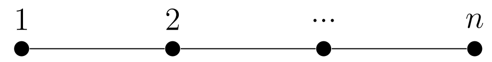

Рис. 4.2: Лангцюг P_n

паралельного поєднання резисторів, можемо зробити виновок. Максимальний ефективний опір буде в графі типу ланцюг P_n(рис 4.2).

Максимальною вістанню між двома вершинами в такому графі буде відстань між першою та останньою вершиною. Вона дорівнює сумі опорів усіх ребер ланцюга.

$$r(1,n) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_{ij}}$$

Висновки

Курсову роботу присвячено дослідженню поняття відстані опору в графах.

В першому розділі роботи були наведені необхідні теоретичні відомості для визначення поняття відстані опору. Наведені означення зв'язності графа, необхідних для подальших обчислень характеристичних матриць для графа, а саме матриці суміжності, Кіргхофа, узагальнена оберненої до даної, означення кістякового дерева та лісу. Також уведено поняття кістякового 2-дерева графа G та кістякового 2-дерева, що розділяє дві вершини в зв'язному графі G. Наведено різні визначення поняття відстані опору.

У другому розділі були представлені загальні способи обчислення відстані опору в графі, а саме зведення до системи лінійних рівняннь з використанням законів Кіргхофа та метод нодальних потенціалів.

У третьому розділі були розглянуті способи визначення відстані опору в окремих родинах графів,а саме в ротаційно-симетричих графах.

У четвертому розділі досліджені припущення про структуру графа, що забезпечує мінімальну та максимальну відстань опору для даного графа з n вершин та однаковими вагами для всіх ребер.

Список використаних джерел

[1] R. B. Bapat та Somit Gupta. "Resistance Distance in Wheels and Fans". в: *Indian J. Pure Appl. Math.* 1.41 (лют. 2010), с. 1—13.

[2] R.B. Bapat. *Graphs and Matrices.* ISBN: 978-1-84882-980-0.

[3] Karel Devriendt та Renaud Lambiotte. "Non-linear network dynamics with consensus-dissensus bifurcation". в: (21 лют. 2020). URL: https://arxiv.org/pdf/2002.08408.pdf.

[4] W. Ellens та ін. "Effective graph resistance". в: *Linear Algebra and its Applications* (435 2011), с. 2491—2506.

[5] Wendy Ellens. "Effective resistance. and other graph measures for network robustness". 29 квіт. 2011. URL: https://www.math.leidenuniv.nl/scripties/EllensMaster.pdf.

[6] Hubert de Fraysseix. "An Heuristic for Graph Symmetry Detection". в: (). URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F3-540-46648-7_29.pdf.

[7] Mikhail Kagan та Brian Mata. "A physics perspective on the resistance distance for graphs". в: (11 лют. 2018).

[8] Мельников О. И. та Емеличев В. А. *Лекции по теории графов.* Наука, 1990. ISBN: 5-02-013992-0.

[9] Матвеев А. Н. *Электричество и магнетизм : учебное пособие.* Высшая школа, 1983.