Властивості Діаграм Вороного на уніциклічних графах

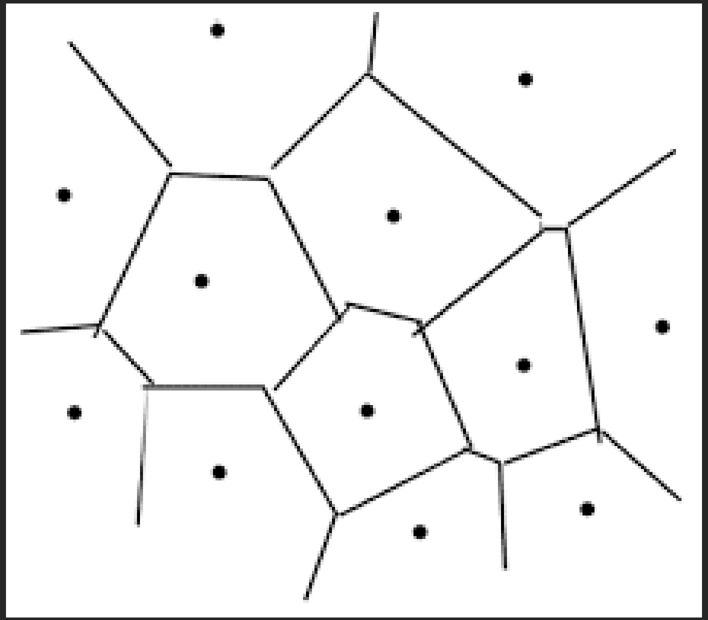
Виконала студентка 4-го року навчання, Прикладна математика 113

Соколова Діана Тимурівна

Керівник – Олійник Богдана Віталіївна

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Діаграми Вороного на площині



Позначимо Евклідову відстань між двома точками p і q через $dist(p,q)$:

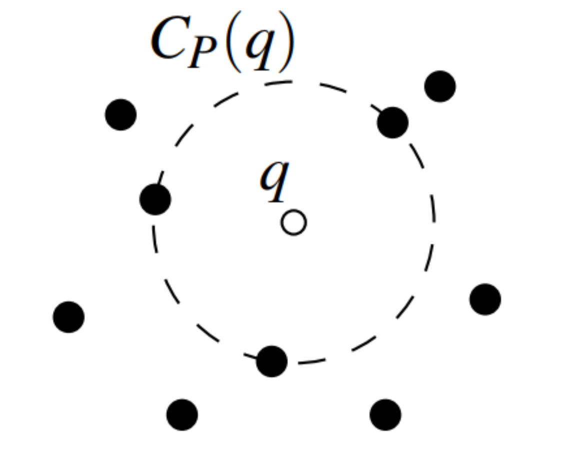
$$dist(p,q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

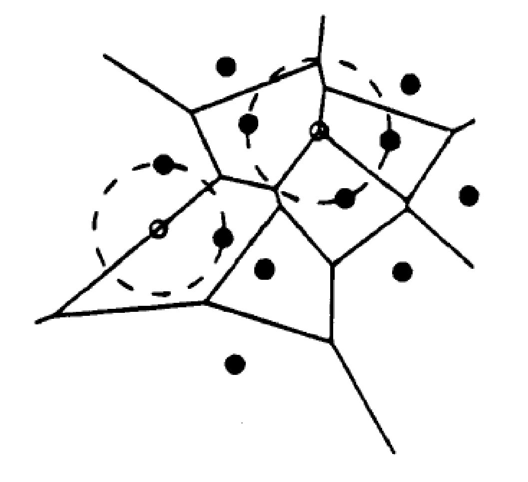
Нехай $P = \{p_1, p_2 \ldots, p_n\}$ — набір із n різних точок на площині; ці точки є сайтами (sites).

Ми визначаємо діаграму Вороного множини P як розбиття площини на n клітин, в кожній клітині знаходиться рівно одна точка множини P, з властивістю, що точка q лежить у клітині, що відповідає сайту p_i тоді і тільки тоді, коли $dist(q, p_i) < dist(q, p_j)$, для кожного $p_j \in P$, при $j \neq i$.

Геометричні властивості

Точка q є вершиною P тоді і тільки тоді, коли її найбільше порожнє коло $C_p(q)$ містить три або більше вершин на своїй межі.





Бісектриса між точками p_i і p_j визначає ребро $Vor(P)$ тоді і тільки тоді, коли на бісектрисі є така точка q, що $C_p(q)$ містить як p_i, так і p_j на своїй межі, але не містить іншої точки.

І навпаки, нехай бісектриса p_i і p_j визначає ребро Вороного. Найбільше порожнє коло будь-якої точки q всередині цього ребра повинно містити p_i та p_j на його межі та жодних інших місць.

Визначення діаграми Вороного в довільному просторі

Нехай (X, d) метричний простір, де $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Нехай P підмножина X. Будемо називати елементи множини P сайтами (sites), щоб відрізняти їх від довільних точок X.

Клітини (cell) Вороного для кожного $s \in P$ визначаються так:

$$cell_{(X,d)}(s, P) = \{x \in X \mid \forall s' \in P : d\,(s, x) \leq d(s', x)\}$$

Діаграмою Вороного множини P в просторі (X, d) називається:

$$V_{(X,d)}(P) = \{cell(X, d)(s, P) \mid s \in P\}$$

Простір, що визначається графом

Нехай $G = (V, E)$ — простий граф.

Розглянемо метричний простір заданий на множині вершин графа $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ з метрикою $\mathrm{d_G}$, що визначається для довільних двох вершин u та w як довжина найкоротшого шляху, що їх з’єднує.

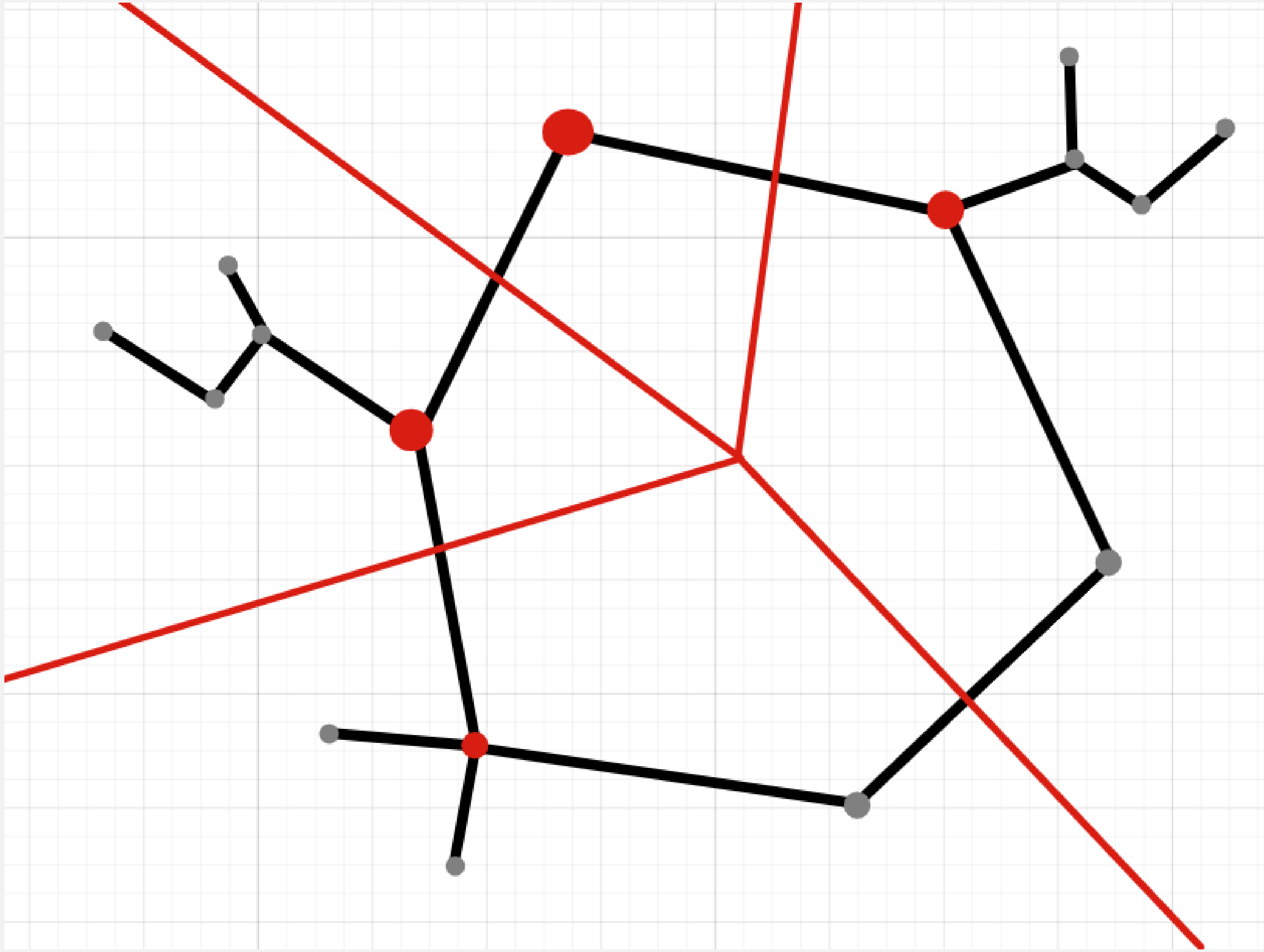
Нехай $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{V}$ — підмножина вершин множини P, для якої ми будуємо Діаграму Вороного.

Позначимо $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Граф $G = (V, E)$ – уніциклічний, якщо він містить один і тільки один цикл та є зв'язним графом.

Граф діаграми Вороного

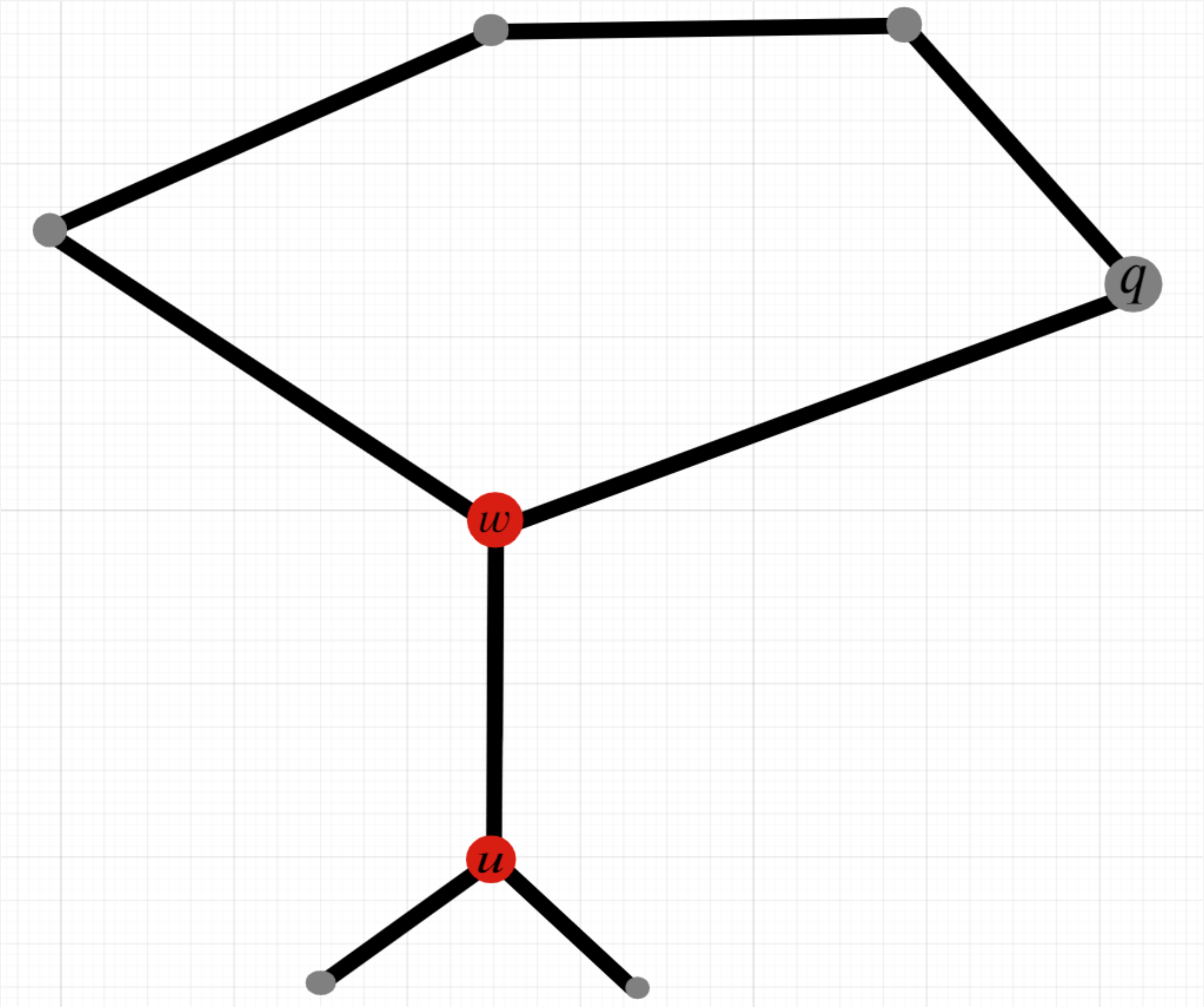
Ми будемо розглядати діаграми Вороного визначені на просторі, що визначений уніциклічним графом.



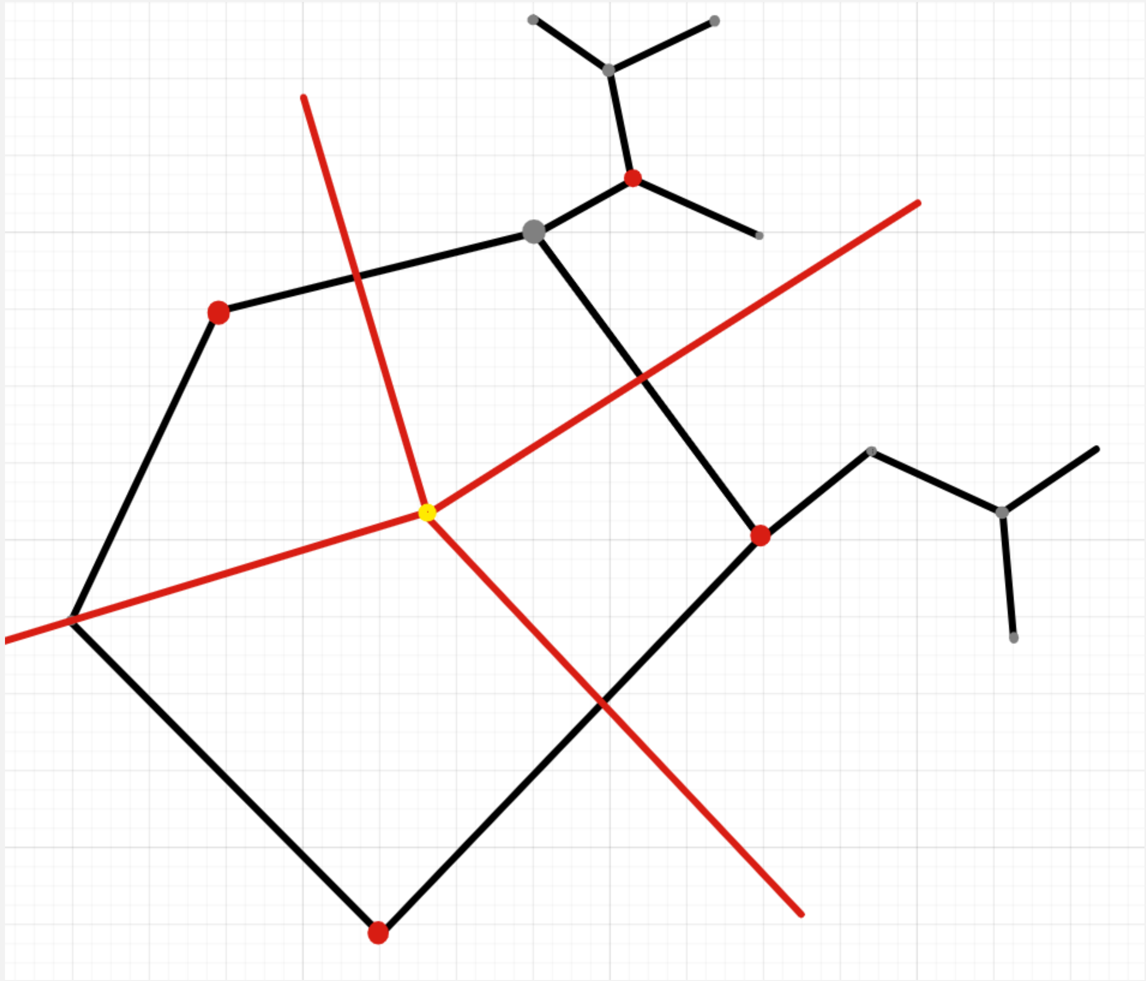
Нехай $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ є підграфом уніциклічного графу $G = (V, E)$, який є простим циклом.

Вершина $u \in V \setminus \hat{V}$ графу G проектується в вершину $w \in \hat{V}$, якщо для будь-якої іншої вершини $q \in \hat{V}$, виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q)$$



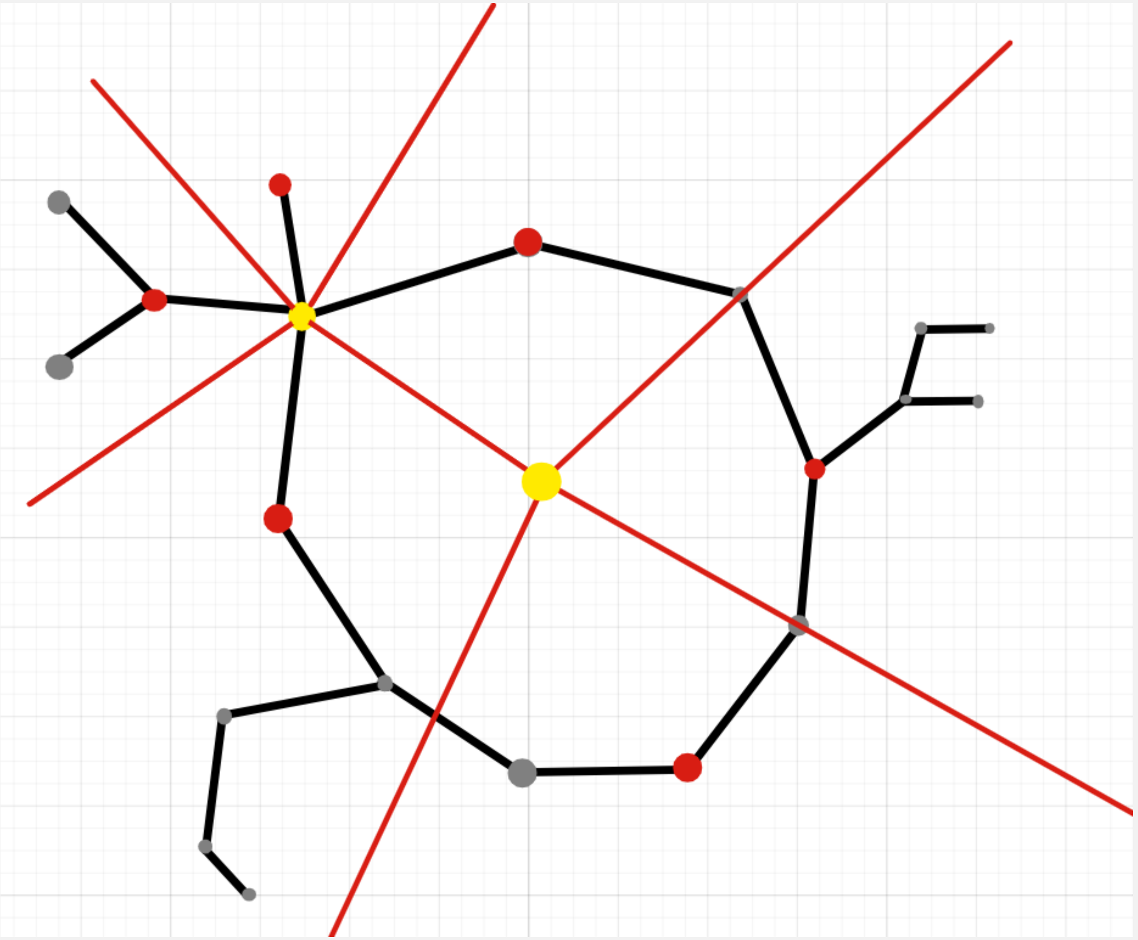
Теорема 1.
Якщо $P \subseteq \widehat{V}$, або всі точки множини P проектуються в різні точки циклу графа, то граф Діаграми Вороного є графом-зіркою з нескінченними променями.



Теорема 2.

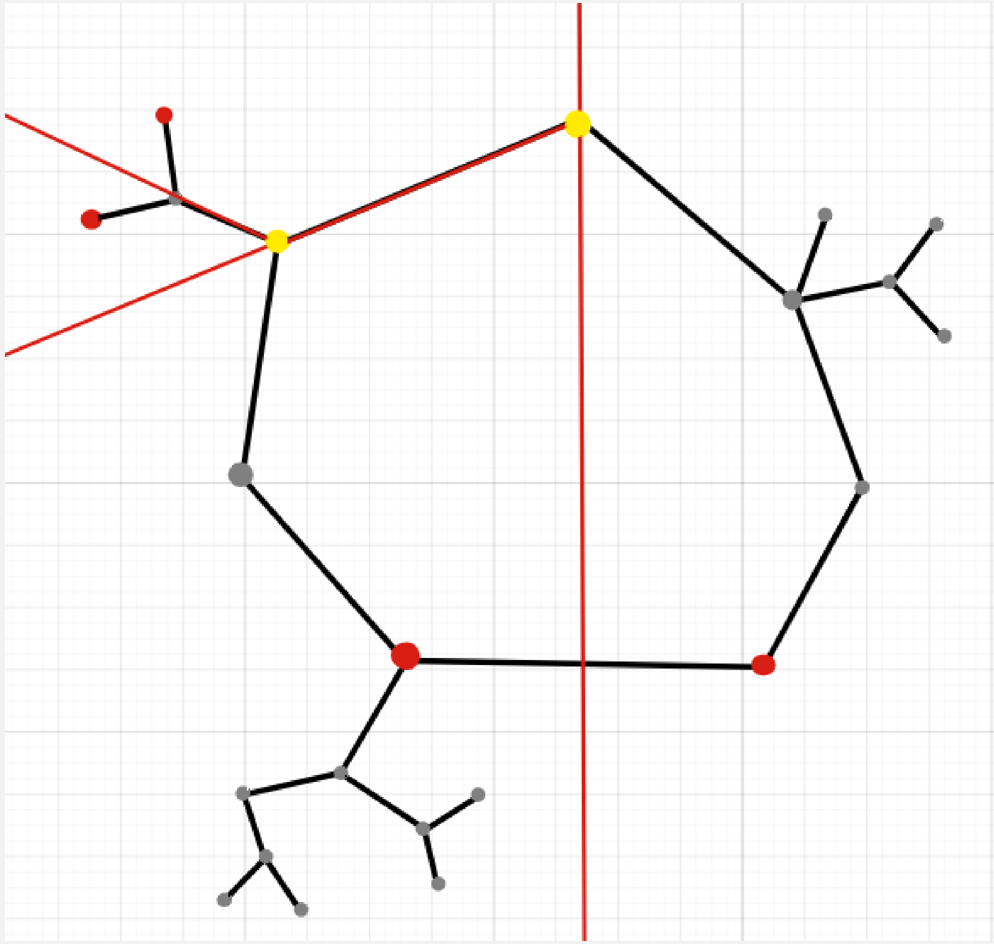
Нехай дві вершини p_1 та p_2 множини P рівновіддалені від вершини s, тобто $d_G(p_1, s) = d_G(p_2, s)$, причому p_1 та p_2 проектуються в s, якщо s - вершина циклу, або p_1, p_2, s – проектуються в одну і ту ж вершину циклу r.

Тоді якщо немає такої вершини p_k множини P, яка знаходиться на шляху, тобто $d_G(p_1, s) = d_G(p_1, p_k) + d_G(p_k, s)$ та $d_G(p_2, s) = d_G(p_2, p_k) + d_G(p_k, s)$ то s належить ребру діаграми Вороного.



Теорема 3.

Нехай дві вершини p_1 та p_2 множини P рівновіддалені від вершини s циклу графа G, тобто $d_G(p_1, s) = d_G(p_2, s)$, причому немає такої вершини p_k множини P, яка знаходиться на шляху між p_1, p_2 та s. Тоді, якщо вершина u суміжна з s в циклі, рівновіддалена від p_1 та p_2 і найближчої вершини p_j множини P, то ребро us належить графу діаграми Вороного.



Висновки

1. Доведено що, якщо всі точки множини P лежать на циклі або проектуються в різні точки циклу графа, то граф діаграми Вороного є графом-зіркою з нескінченними променями.
2. Показано, що за певних умов вершина циклу або вершина що в неї проектується належить ребру діаграми Вороного.
3. Сформульовано умови, за яких ребро уніциклічного графу, належить ребру діаграми Вороного.