

DOI: 10.37863/umzh.v73i9.6106

УДК 512+517.98

Д. І. Морозов (Нац. ун-т „Києво-Могилянська академія”)

## ОПИС КЛАСУ СТРОГО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ СКІНЧЕННОСТАНОВИХ ІЗОМЕТРИЙ КІЛЬЦЯ $Z_2$

The condition of strict differentiability is a strengthening of the concept of differentiability, which is naturally applicable to the class of  $p$ -adic functions. In this article, we study the strict differentiability of finite-state isometries of the ring  $Z_2$ .

Умова строгої диференційовності є посиленням поняття диференційовності, природним для застосування до класу  $p$ -адичних функцій. Дану статтю присвячено дослідженню строгої диференційовності скінченностановивих ізометрій кільця  $Z_2$ .

Дослідження групових автоматів є технічно достатньо складною задачею [1, 2]. Відображення групових автоматів 2-адичними функціями надає зручну техніку для роботи з ними [4, 5]. Оскільки на даний момент існує багато нерозв'язаних проблем, пов'язаних із групою скінченностановивих автоматних підстановок, то є природним виділення множини функцій у класі 2-адичних ізометрій з певними властивостями, що відповідають скінченностановивим автоматам.

Однією з таких властивостей є строга диференційовність функцій кільця  $Z_2$  [3, 6]. Строга диференційовність є природним посиленням диференційовності для  $p$ -адичних функцій.

Умова строгої диференційовності накладає певні обмеження на поведінку функції в порівнянні зі звичайною диференційовністю. Особливості даних обмежень були використані при доведенні теореми 1.

Метою даної роботи є опис класу скінченностановивих строго диференційовних функцій кільця  $Z_2$ .

**Означення 1.** Нехай  $Z_2$  — кільце цілих 2-адичних чисел. На цьому кільці задано неархімедів метричний простір з ультраметрикою  $\rho(x, y) = \left( \frac{1}{2^{\text{ord}_2(x, y)}} \right)$ , де  $\text{ord}_2(x, y)$  — максимальна довжина спільного початку 2-адичного запису чисел  $x$  та  $y$  кільця  $Z_2$ .

**Означення 2.** Нехай  $f$  — ізометрія кільця  $Z_2$ . Запишемо  $x \in Z_2$  у вигляді суми  $x = x^{(n)} * 2^n + x_{(n)}$ , де  $x_{(n)} = x \bmod 2^n$  — 2-кове невід'ємне ціле число довжиною не більше за  $n$ .

Оскільки  $f$  — ізометрія, а отже для неї

$$(f(x_1^{(n)} * 2^n + x_{(n)}) - f(x_2^{(n)} * 2^n + x_{(n)})) : 2^n,$$

то для кожного  $x_{(n)}$  функцію  $f$  єдиним чином можна записати у вигляді

$$f(x) = f_{x_{(n)}}(x^{(n)} * 2^n + \alpha_{id}(f_{x_{(n)}}^{[n]}(x_{(n)})),$$

де

$$f_{x_{(n)}} : Z_2 \rightarrow Z_2,$$

$$f_{x(n)}^{[n]} : \mathbb{Z}_{2^n} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^n},$$

$$\alpha_{id} : \mathbb{Z}_{2^n} \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \alpha_{id}(x) = x.$$

Ізометрію  $f_{x(n)}$  назвемо станом  $n$ -го рівня функції  $f$ .

**Означення 3.** Означимо для ізометрії  $f$  кільця  $\mathbb{Z}_2$  множину станів  $\mathfrak{S}_f$  таким чином:

$$\mathfrak{S}_f = \{f_x | x \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Будемо називати ізометрію  $f$  кільця  $\mathbb{Z}_2$  скінченностановою, якщо її множина станів  $\mathfrak{S}_f$  є скінченною:

$$|\mathfrak{S}_f| < \infty.$$

Природним є питання про те, які зі строго диференційовних [6] ізометрій є скінченностановими, а отже скінченноавтоматними.

**Означення 4.** Означимо проєкцію ізометрії  $a$  кільця  $\mathbb{Z}_2$  на кулю  $B\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$  для  $x \in \mathbb{Z}_2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  таким чином:

$$\pi_{x,n}[a] = a_{x_n},$$

де  $x_n = x \bmod 2^n$  і  $a_{x_n}$  — стан  $n$ -го рівня функції  $a$ .

**Означення 5.** Нехай  $a$  — ізометрія кільця  $\mathbb{Z}_2$ . Означимо множину  $F_a \subseteq \mathbb{Z}_2$  для  $t \in \mathbb{Z}_2$  таким чином:

$$F_a = \left\{ \frac{a(x) - a(y)}{x - y} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2, x \neq y \right\}.$$

**Означення 6.** Нехай  $a$  — ізометрія кільця  $\mathbb{Z}_2$ . Означимо множину  $F_a[n](t) \subseteq \mathbb{Z}_2$  для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$  таким чином:

$$F_a[n](t) = \left\{ \frac{a(x * 2^n + t) - a(y * 2^n + t)}{(x * 2^n + t) - (y * 2^n + t)} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2, x \neq y \right\}.$$

Очевидно, що для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$  має місце рівність

$$F_a[n](t) = F_{a_t}.$$

**Теорема 1.** Скінченностанова ізометрія кільця  $\mathbb{Z}_2$  є строго диференційовною в точці простору  $\mathbb{Z}_2$  тоді і лише тоді, коли її проєкція на певний окіл даної точки є лінійною функцією.

**Доведення.** Нехай  $a$  — ізометрія кільця  $\mathbb{Z}_2$ . Запишемо  $x \in \mathbb{Z}_2$  у вигляді суми  $x = x^{(n)} * 2^n + x_{(n)}$ , де  $x_{(n)} = x \bmod 2^n$  — 2-кове невід'ємне ціле число довжини  $n$ .

Означимо

$$F_a(x, y) = \frac{a(x) - a(y)}{x - y}.$$

Строго диференційовність ізометрії  $a$  в точці  $z \in \mathbb{Z}_2$  рівносильна існуванню границі в ультраметриці

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (z,z)} F_a(x, y).$$

Оскільки  $a$  — скінченностанова ізометрія, то послідовність станів  $\{a_{x(i)} \mid i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  містить скінченну кількість різних елементів. Отже, в цій послідовності знайдеться стан  $b$ , що зустрічається нескінченну кількість разів.

Означимо зростаючу нескінченну послідовність номерів  $\{t_i\}$ , для яких  $a_{t_i} = b$ . Означимо послідовність  $\bar{x}$  таким чином:

$$\bar{x}_n = x^{(t_n)}.$$

Оскільки  $a$  — ізометрія, то мають місце рівності

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (z,z)} F_a(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_n, x_n)} F_b(x, y) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

або обидві границі не існують. Отже, для існування границі (1) необхідне виконання рівності  $|F_b| = 1$ .

Множина  $F_b$  складається з єдиного елемента тоді і тільки тоді, коли  $b$  є лінійною функцією.

Справді, нехай

$$\frac{b(x) - b(y)}{x - y} = \text{const}_1 \quad \forall x, y \in Z_2, \quad x \neq y.$$

Тоді

$$b(x) = \text{const}_1 * x + (b(y) - \text{const}_1 * y).$$

Оскільки  $b(x)$  не залежить від  $y$ , то

$$b(y) - \text{const}_1 * y = \text{const}_2.$$

Остаточно маємо

$$b(x) = \text{const}_1 * x + \text{const}_2 \quad \forall x \in Z_2.$$

Теорему доведено.

**Лема 1.** Якщо скінченностанова ізометрія кільця  $Z_2$  є строго диференційовною в певній точці, то вона є строго диференційовною в кожній точці деякого її околу.

**Доведення.** Справді, функція з лінійною проєкцією на певний окіл є строго диференційовною в кожній точці цього околу.

**Означення 7.** Назвемо ізометрію  $f: Z_2 \rightarrow Z_2$  кусково-лінійною, якщо  $Z_2$  розбивається на скінченну кількість околів, проєкція на кожний з яких для функції  $f$  є лінійною функцією.

**Теорема 2.** Скінченностанова ізометрія  $f$  кільця  $Z_2$  є строго диференційовною тоді і лише тоді, коли вона є кусково-лінійною функцією.

**Доведення.** Оскільки ультраметричний простір  $Z_2$  є компактним, то з покриття околами з теореми 1 можна виділити скінченне підпокриття. Оскільки простір є ультраметричним, то з цього підпокриття можна виділити підпокриття, що складається з куль, які не перетинаються. На кожній такій кулі проєкція ізометрії  $f$  є лінійною функцією, отже,  $f$  — кусково-лінійна функція.

**Теорема 3.** Скінченностанова ізометрія кільця  $Z_2$  не є строго диференційовною в жодній точці тоді і лише тоді, коли вона не містить лінійних станів.

*Доведення.* Якщо скінченностанова ізометрія  $f$  не містить лінійних станів, то згідно з теоремою 2 вона не є строго диференційовною в кожній точці кільця  $Z_2$ .

Теорема 2 повністю описує клас строго диференційовних функцій, що є скінченностановими груповими автоматами над двійковим алфавітом.

Теорема 3 дозволяє будувати приклади функцій кільця  $Z_2$ , що не є строго диференційовними в жодній точці.

Напрямок подальшого дослідження є розширення отриманих в умовах строгої диференційовності результатів на клас диференційовних функцій.

### Література

1. L. Bartholdi, Z. Sunik, *Some solvable automaton groups*, Contemp. Math., **394**, 11–29 (2006).
2. R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchanskii, *Automata, dynamical systems, and groups*, Proc. Steklov Inst. Math., **231**, 128–203 (2000).
3. Н. Коблиц,  *$p$ -Адические числа,  $p$ -адический анализ и дзета-функции*, Мир, Москва (1982).
4. Д. І. Морозов, *Ізометрії та стискаючі функції кільця  $Z_2$* , Вісн. Запорізь. нац. ун-ту, № 1, 90–97 (2014).
5. Д. І. Морозов, *Ізометричність поліномів над кільцем цілих 2-адичних чисел*, Наук. зап. НаУКМА. Фіз.-мат. науки, **113**, 13–15 (2011).
6. C. Weisman, *On  $p$ -adic differentiability*, J. Number Theory, **9**, 79–86 (1977).

Одержано 05.05.20