

## СТІЙКІСТЬ ІДЕАЛЬНИХ ДРІБНОМАСШТАБНИХ МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНИХ МОД У ТОКАМАКУ

Проведено дослідження стійкості ідеальних балонних мод (ІБМ) та мод Мерсьє (ММ) у гофрованому токамаку з профілями тиску плазми та коефіцієнта запасу стійкості, близьких до експериментальних. За цих умов визначено локалізацію вказаних мод по радіусу плазмового шнура та інтервали тисків, при яких збуджуються ці моди. Запропоновано алгоритм оптимізації профілю тиску.

1. Збудження ідеальних магнітогідродинамічних мод (МГД-мод) в тороїдних магнітних конфігураціях є однією з обставин, які заважають досягненню режимів утримання плазми з великим  $\beta$  ( $\beta$  — відношення газокінетичного тиску плазми до тиску магнітного поля). В умовах інжекції в плазму пучків нейтральних частинок в сучасних токамаках формуються немонотонні профілі запасу стійкості  $q$  [1–3]. Відомо [4], що такі профілі  $q$  суттєво сприяють стабілізації ідеальних балонних мод (ІБМ) при пікірованому профілі тиску. Проте імовірним є збудження мод Мерсьє (ММ), якщо внаслідок перебудови профілю  $q$  в плазмі виникне область з  $q < 1$  або під впливом зовнішніх чинників матиме місце значне зменшення глибини магнітної ями токамака, що здійснює додатковий дестабілізуючий вплив на стійкість плазми. Одним із таких чинників може бути поздовжня неоднорідність (гофрування) утримуючого магнітного поля, що спричиняється скінченним числом струмових котушок [5, 6]. Тому виникає необхідність сформулювати такі профілі тиску плазми  $p$  та запасу стійкості  $q$ , які сприятимуть стабілізації ІБМ та ММ при їхньому одночасному збудженні у гофрованому токамаку. Цьому і присвячена дана робота.

2. Розглянемо рівноважну тороїдну плазму з аспектовим відношенням  $R/a = 3 \div 4$ , яку утримує гофроване магнітне поле. Глибина модуляції магнітного поля визначається відносною амплітудою гофрування  $\delta_N$ , яка змінюється у межах від часток відсотка до декількох відсотків. Період модуляції визначається числом струмових котушок  $N$ . Магнітне поле на осі токамака  $B_0$  має вигляд:

$$B_0(\varphi) = \frac{B}{\left(1 + \sum_n^N \delta_n e^{in\varphi}\right)^2}, \quad (1)$$

де  $B$  — основне тороїдне магнітне поле,  $\delta_0 = 0$ ,  $|\delta_n| \ll 1$ .

Розподіл рівноважного тиску плазми по малому радіусу запишемо таким чином:

$$p(\rho) = p_0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k\right)^l, \quad (2)$$

де  $p_0$  — тиск на осі плазмового шнура.

Розподіл параметра  $q$  по малому радіусу введемо за формулою:

$$q(\rho) = A \left[1 - B \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2n}\right]^m + C \exp\left[-D \left(\frac{\rho}{\rho_0} - F\right)^2\right]. \quad (3)$$

При  $C = 0$  співвідношення (3) визначає монотонний профіль  $q(\rho)$ . Величини  $A$  та  $B$  визначаються вибраними значеннями  $q_0$  в центрі плазми та  $q_p$  на межі плазми. У подальших числових розрахунках припустимо, що  $q_0 = 1,1$  та  $q_p = 1,5$ . Сталі  $C$ ,  $D$ ,  $F$  визначають координати точок  $\rho_{min}$ , в яких  $q(\rho/\rho_0 = \rho_{min}/\rho_0) = 1,05$ . В усіх розрахунках, якщо це спеціально не обумовлено,  $C = 9$ ;  $n = 1,5$ ;  $m = 2$ .

Припустимо, що у рівноважному стані перерізи магнітних поверхонь колові. Із зростанням тиску плазми центри цих поверхонь зсуваються відносно магнітної осі на величину  $\xi$ , а поверхні деформуються (їхня еліптичність характеризується параметром  $\alpha$ ). Рівноважну плазмову конфігурацію можна вважати визначеною, якщо відомі її метричні коефіцієнти  $g_{ik}$  системи координат з випрямленими силовими лініями магнітного поля [7]. В свою чергу коефіцієнти  $g_{ik}$  визначаються формою магнітних поверхонь, отже й залежністю від вказаних вище величин  $\xi$  та  $\alpha$  при вибраних розподілах рівноважних струмів, запасу стійкості  $q(\rho)$  (3) та тиску плазми (2). Систему рівнянь, яка визначає зміщення  $\xi$  та еліптичність  $\alpha$ , можна записати у вигляді [8]:

$$\begin{aligned} \hat{L} \left[ \frac{\rho}{\rho'} \left( \frac{\xi'}{\rho'} \right)' - K\rho + 3 \frac{\xi'}{\rho'} \right] = 4i \frac{\partial}{\partial \varphi} (K\rho) - 2iK \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \\ - 2\mu', \frac{\rho}{\rho'} \frac{\xi'}{\rho'} - \frac{2iRv^{(1)}}{\Phi'} + \bar{S}(\xi', \alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& (\mu + \hat{L}) \left[ \frac{\rho}{\rho'} \left( \frac{\alpha'}{\rho'} \right)' + 3 \frac{\alpha'}{\rho'} - 3 \frac{\alpha}{\rho} + 3 \left( \frac{\xi'}{\rho'} \right)^2 \right] = \\
& \quad + \frac{q'y}{q} \alpha_0^{(0)} - \frac{\rho'}{\Phi'} \left[ \left( \frac{v'}{\rho'} \right)' + \frac{2\pi \bar{B}_{01}}{\bar{B}_0^2} \right], \quad (11) \\
& = -\frac{8iRv^{(2)}}{\Phi'} + 2(\mu + \hat{L}) \frac{\xi'}{\rho'} \Psi - \Psi \hat{L} \frac{\xi'}{\rho'} + \frac{\xi'}{\rho'} \hat{L} \Psi, \quad (5) \\
& \hat{L}v^{(0)} = -i \frac{4\pi^2 \rho' R \rho^2 \rho'}{\Phi'} \times \\
& \times \left[ K \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\xi'}{\rho'} \frac{\xi''}{\rho'} \right) + K' \left( \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{4} \frac{\alpha'}{\rho'} - \frac{1}{8} \frac{\xi'^2}{\rho'^2} \right) \right], \quad (6) \\
& (\mu + \hat{L}) \mathcal{N}^{(2)} = \frac{i2\pi^2 \rho' \rho^2 \rho'}{\Phi'} K \rho \frac{\xi'}{\rho'}. \quad (7)
\end{aligned}$$

У співвідношеннях (4) – (7)  $\rho$  – радіус гофрованої магнітної поверхні,  $v^{(1)}$  та  $v^{(2)}$  – перша та друга полоїдальні гармоніки рівноважних струмів,  $K$  – кривина магнітної осі,

$$\mu_J = \frac{RJ}{\Phi'} \left( \frac{\rho}{\rho'} \right)^{(0)}, \quad \hat{L} = \mu - i \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \Psi = \frac{\rho}{\rho'} \left( \frac{\xi'}{\rho'} \right)' + 3 \frac{\xi'}{\rho'},$$

явний вигляд нелінійного по тиску плазми доданка  $\bar{S}(\xi', \alpha)$  у (4) подано у [8],  $(\dots)'$  – похідна по координаті  $a$ ,  $R$  – великий радіус тора.

Неусереднене рівняння малих коливань, впроваджене за принципом Коннора-Хасті-Тейлора [9] для токамака має вигляд:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dy} \frac{1}{Q_{LM}} \frac{dF}{dy} - \\
& - q^2 \left[ W_0 + q \frac{d}{dy} A_M + \frac{4\pi^2 \eta \gamma^2 g}{\Phi'^2 Q_{LM}} (1 + 2q^2) \right] F = 0, \quad (8)
\end{aligned}$$

де  $F(a, y)$  – повільно змінювана функція балонної змінної  $y$ , яка пов'язана зі збуреним зміщенням елемента плазми  $X$  співвідношенням  $X = F(a, y) \exp(imqy)$ ;  $m$  – номер гармоніки по великому азимуту;  $\gamma$  – інкремент зростання збурень.

$$\begin{aligned}
W_0 & = - \left( \frac{2\pi \rho'}{\Phi'^2} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{g}}{\bar{B}_0^2} \right)^{(0)} + \frac{\Omega}{\Phi'^2} - \mu' \alpha_0^{(0)}, \\
\frac{1}{Q_{LM}} & = L_{LM} = \\
& = \frac{\Phi'^2}{4\pi^2 \sqrt{g} \bar{B}_0^2} \left[ \left( \frac{yq'}{q} \right)^2 g^{11} - 2 \frac{yq'}{q} g^{1b} + g^{bb} \right], \quad (10) \\
A_M & = - \left( \frac{2\pi \rho'}{\Phi'} \right)^2 L_{\parallel}^{-1} \left( \frac{\sqrt{g}}{\bar{B}_0^2} \right)^{(1)} +
\end{aligned}$$

У співвідношеннях (8–11)  $\Omega = \rho' V''' + J' \chi' - I' \Phi'$ ;  $\chi$ ,  $\Phi$  – полоїдний і торойдний магнітні потоки;  $I$ ,  $J$  – поперечний і поздовжній рівноважні струми, які протікають між магнітними поверхнями;  $g = \det g_{jk}$ ;  $\mu$  – густина плазми;  $\alpha_0 = \bar{j}_0 \bar{B}_0 / \bar{B}_0^2$ ;  $\bar{j}_0$  – густина рівноважного струму. Позначення  $(\dots)^{(0)}$  та  $(\dots)^{(1)}$  – усереднена по кутових змінних та осцилююча по цих змінних частини відповідних величин. Система рівнянь (4) – (11) визначає стійкість ідеальних МГД-мод у гофрованому токамаку.

3. Застосуємо здобуті вище аналітичні результати для дослідження стійкості ідеальних МГД-мод у гофрованому токамаку з довільними профілями запасу стійкості  $q$  та  $p$ . Для обраних згідно зі співвідношеннями (1) – (3) розподілів тиску плазми  $p$ , коефіцієнта запасу стійкості  $q$  та магнітного поля  $B_0(\phi)$  із рівнянь (4) – (7) визначаємо у явному вигляді зміщення  $\xi$ , еліптичність магнітних поверхонь  $\alpha$  та рівноважний осцилюючий струм  $v$ . Це дозволяє з огляду на (9) – (11) визначити коефіцієнти рівняння (8) у кожній точці радіуса плазмового шнура. Вільним параметром у рівнянні (8) залишається інкремент збуджених мод  $\gamma$ .

Задача на стійкість плазми в досліджуваному випадку еквівалентна задачі на існування при обраних значеннях інкремента  $\gamma$  локалізованих в  $y$  – просторі розв'язків рівняння (8), оскільки лише локалізовані розв'язки за умови переходу до реального простору кутової змінної  $\theta$  визначають фізично допустимий розподіл амплітуди зміщення елемента плазми по малому радіусу тора. Дослідження умов існування локалізованих розв'язків рівняння (8) будемо проводити за допомогою числового аналізу. Припустимо, що поздовжнє магнітне поле токамака створюється набором  $N=20$  струмових котушок, амплітуда гофрування магнітного поля  $\delta_N \approx (0,2—6\%)$ . Розподіл тиску плазми обрано з огляду на (2) для  $\kappa = 1$ ,  $l = 2$ .

Профіль коефіцієнта запасу стійкості  $q$  в монотонному та немонотонному режимах приведено на рис. 1. Відповідні до цих коефіцієнтів  $q$  радіальні розподіли ширини  $S$  приведено на рис. 2. У випадку монотонного профілю  $q_1(\rho)$  при відсутності гофрування магнітного поля ( $\delta_N = 0$ ) у периферійній частині плазми збуджуються ІБМ (рис. 3). Подальший розгляд будемо проводити для основних гармонік збуджених мод, тому що їхні інкременти максимальні. ММ у цьому випадку не збуджуються. Вплив гофрування магнітного поля ( $\delta_N = 5\%$ ) призводить до додаткової дестабілізації ІБМ та збудження у центральній частині плазмового шнура

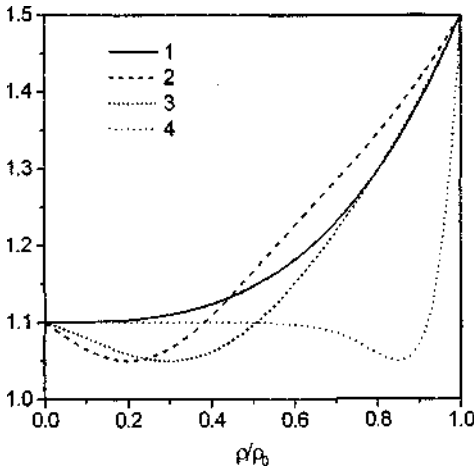


Рис. 1. Профілі  $q(\rho/\rho_0)$ :

- 1 — монотонний профіль  $q_1$ ;
- 2 — немонотонний профіль  $q_2$ ,  $\rho/\rho_0 = 0,2$ ;
- 3 — немонотонний профіль  $q_3$ ,  $\rho/\rho_0 = 0,3$ ;
- 4 — немонотонний профіль  $q_4$ ,  $\rho/\rho_0 = 0,85$ ;  $n = 4$

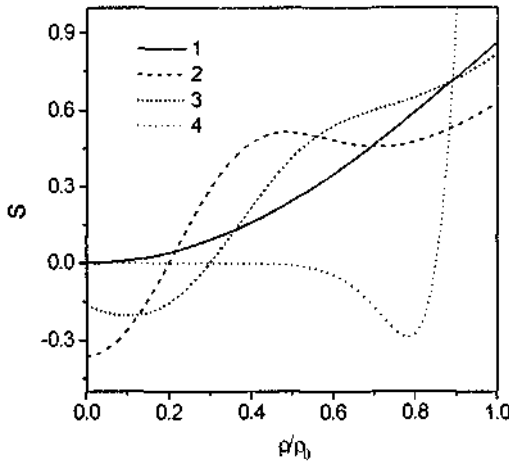


Рис. 2. Профілі ширини  $S(\rho/\rho_0)$ :

- 1 — шир  $S_1$  відповідає монотонному профілю  $q_1$ ;
- 2—4 — ширини  $S_2$  —  $S_4$  відповідають немонотонним профілям  $q_2$  —  $q_4$

ММ. Зазначимо, що у даному випадку ММ визначає максимально досяжне значення  $\beta_{кр}$  ( $\beta_{кр}$  визначає мінімальне значення параметра  $\beta$ , починаючи з якого має місце нестійкість плазми).

$$\beta_{кр} = (8\pi / B_0^2) \sqrt{\bar{p}^2},$$

$$\text{де } \bar{p}^2 = p_0^2 \int_0^1 (1 - (\rho/\rho_0)^k)^{2n} d(\rho/\rho_0)$$

Використання немонотонного профілю  $q(\rho)$  для стабілізації ІБМ та ММ призводить до таких результатів. У режимі роботи токамака з профілем

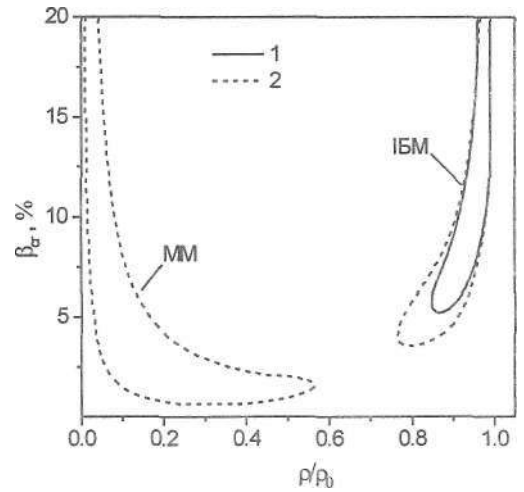


Рис. 3. Залежність  $\beta_{кр}$  від відносного радіуса  $\rho/\rho_0$  для монотонного  $q_1$  та ширини  $S_1$ :

- 1 — при відсутності гофрування;
- 2 — при амплітуді гофрування  $\delta_N = 5\%$

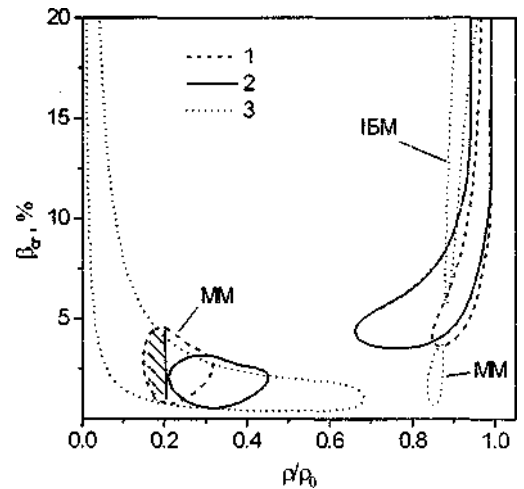


Рис. 4. Залежність  $\beta_{кр}$  від відносного радіуса  $\rho/\rho_0$  для немонотонних  $q$  та відповідних до них ширин  $S$  при амплітуді гофрування  $\delta_N = 5\%$ :

- 1 — дл  $q_2$  та  $S_2$ ; 2 — дл  $q_3$  та  $S_3$ ; 3 — дл  $q_4$  та  $S_4$

$q_2(\rho)$  мінімуми ширини  $S_2(\rho)$  потрапляють на області нестійкості ІБМ та ММ (на центральну та периферійну частини плазмового шнура), внаслідок цього ІБМ та ММ стабілізуються (рис. 4, крива 1). У режимі роботи токамака з профілем  $q_3(\rho)$  мінімум ширини  $S_3(\rho)$  потрапляє на область нестійкості ММ, внаслідок цього ММ стабілізуються у центральній частині шнура за винятком області  $0,2 \leq \rho_{\min}/\rho_0 \leq 0,45$  (рис. 4, крива 2), а ІБМ не стабілізуються. Для профілю  $q_4(\rho)$  мінімум ширини  $S_4(\rho)$  потрапляє на область нестійкості ІБМ, при цьому спостерігається стабілізація ІБМ та утворення двох незв'язних

областей нестійкості ММ (рис. 4, крива 3), яке пов'язано з позитивністю ширину в інтервалі значень  $0 \leq \rho/\rho_0 \leq \rho_{\min}/\rho_0$ . Аналогічні результати для ІБМ здобуті у роботі [4]. Зазначимо, що зона нестійкості ММ несиметрична відносно осі  $\beta_{\text{кр}}$  (наприклад, рис. 4, крива 1, заштрихована область при  $S < 0$ ): в області  $S > 0$  знаходиться більша частина зони нестійкості. Це означає, з одного боку, що зміна ширину  $S \Rightarrow -S$  може здійснювати стабілізуючий вплив (ММ: крива 1 на рис. 4). З іншого боку, немонотонний характер  $q(\rho)$  призводить до дестабілізації тих областей плазми (ММ: крива 3 на рис. 4), які були стійкі при монотонному профілі  $q_1(\rho)$  та ширину  $S_1(\rho)$ . У тих областях, де немонотонний профілі  $q(\rho)$  стабілізує вказані моди, спостерігається зменшення інкремента; в областях, де  $t(\rho)$  дестабілізує вказані моди — збільшення інкремента.

Отже, якщо у різних частинах плазмового шнура одночасно збуджуються ММ та ІБМ, потрібно сформулювати немонотонний, спадаючий по радіусу плазмового шнура профілі  $q(\rho)$  з мінімальним ширину в кожній області нестійкості.

4. Згідно із [4] критичний тиск стосовно збудження ІБМ досить точно описується формулою:

$$\beta_{\text{кр}} = \min_{[\rho_{\min}, 1]} \left( \alpha_{\text{кр}} \frac{P_0}{P'_0} \frac{\varepsilon}{q_{\min}^2} \overline{(P)^2} \right), \quad (12)$$

$\alpha_{\text{кр}} = \sqrt{2(16/9)(1-q^{-2})^{1/3}}$ ,  $P'_0 = -\rho_0 k l \rho_{\min}^{k-1} (1-\rho_{\min}^k)^{l-1}$ ,  $P = p/\rho_0$ . Така форма запису  $\beta_{\text{кр}}$  (12) дозволяє дослідити питання про форми профілів тиску плазми, при яких ІБМ є найбільш стійкими. Із формули (12) випливає, що фактично лише градієнт тиску в об-

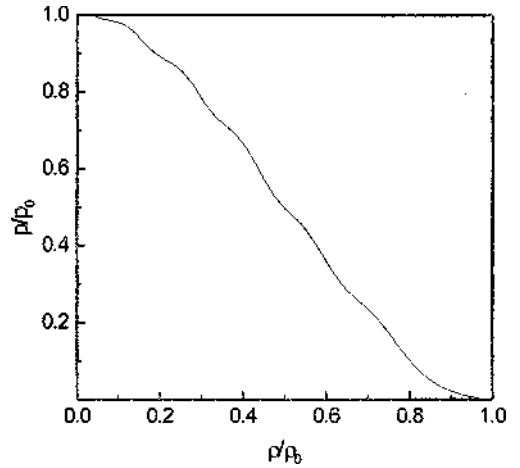


Рис. 6. "Східчастий" профілі тиску

ласті нестійкості вказаних мод визначає критичне  $\beta$ . Тому для ІБМ, локалізованих на периферії плазми, найбільш несприятливими щодо стійкості є "розширені" профілі тиску плазми, які відповідають омічному та  $H$  — режимам. Ефект немонотонності  $q$  в цьому випадку не дає помітного збільшення значення  $\beta_{\text{кр}}$ . Це пов'язано з наявністю великого градієнта тиску на межі плазми. Тому стабілізації ІБМ сприяє "пікірований" в центрі та "плоский" на периферії профілі тиску плазми. Але такий профілі тиску є несприятливим щодо стійкості ММ, які збуджуються в центральній частині плазмового шнура, оскільки необхідною умовою стійкості ММ також є наявність мінімального градієнта тиску в області збудження. Ця умова впливає з критерію стійкості ММ [10]. Для профілі тиску з  $\kappa = 2$ ,  $l = 2$  області нестійкості ІБМ та ММ одночасно припадають на області з невеликим градієнтом тиску. Звідси випливає, що саме такий профілі тиску потрібно оптимізувати з метою мінімізації градієнта тиску в кожній області нестійкості. Для цього пропонується така ітераційна процедура:

$$p_1\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = p\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + C_1 \exp\left[\left(5\frac{\rho}{\rho_0} - d_1\right) - 4,7\left(5\frac{\rho}{\rho_0} - d_1\right)^2\right], \quad (13)$$

де коефіцієнт  $C_1$  визначає висоту "сходинок", а коефіцієнт  $d_1$  — розташування "сходинок" на глад-

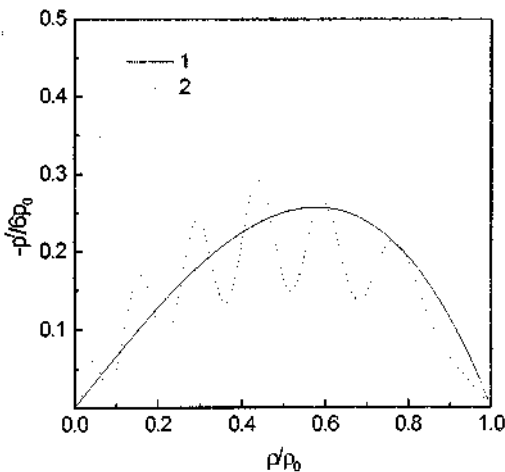


Рис. 5. Залежність градієнта тиску від відносного радіуса  $\rho/\rho_0$  для:

- 1 — профілі тиску з  $\kappa = 2, l = 2$ ;
- 2 — "східчастого" профілі тиску

кому профілі (2). При цьому функція  $\frac{dp_1\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}$  має один мінімум (рис. 5). Другий крок здійснюється аналогічно:

$$p_2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = p_1 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) + C_2 \exp \left( \left( 5 \frac{\rho}{\rho_0} - d_2 \right) - 4,7 \left( 5 \frac{\rho}{\rho_0} - d_2 \right)^2 \right). \quad (14)$$

При цьому функція  $\frac{dp_2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)}{d \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)}$  має два мінімуми,

і так далі.

1. *Levinton F. M. et al*, improved confinement with reversed magnetic shear in TFTR // *Phys. Rev. Lett.*— 1995.— Vol. 75.— P. 4417.
2. *Strait E. J. et al*. Enhanced confinement and stability in DIII-D discharges with reversed magnetic shear // *Phys. Rev. Lett.*— 1995.—Vol. 75.—P. 4421.
3. *Fujita T. et al*. Internal transport barrier for electrons in JT-60U reversed shear discharge // *Phys. Rev. Lett.*— 1997.— Vol. 78.— P. 2377.
4. *Медведев М. В., Юрченко Э. И.* Возможность достижения больших в токамаке относительно баллонной неустойчивости при немономтонном профиле / *Физика плазмы.*— 1994.— Т. 20, № 12.— С. 1043—1050.
5. *Михайловский А. Б.* Теория МГД-устойчивости токамаков с анизотропной плазмой // *Физика плазмы.*— 1982.— Т. 8.— С. 841.
6. *Демченко В. В., Макурин С. В., Омельченко А. Я.* Устойчивость мод Мерсье плазмы конечного давления в гофрированных тороидальных магнитных ловушках // *УФЖ.*— 1987.— Т. 32, № 6.— С. 861—868.
7. *Михайловский А. Б.* Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках.— М.: Атомиздат, 1978, гл. 5.
8. *Демченко В. В.* и др. Устойчивость g-моды в гофрированных тороидальных ловушках с пространственной магнитной осью. М.: ЦНИИатоминформ // Препринт ХФТИ 86-6.— 1986.
9. *Connor I. W., Hastie R. J., Taylor I. B.* Higher Mode Number Stabilities of an Axisymmetric Toroidal Plasma // *Pr. Royl. Soc*— 1979.— Vol. A 365.—N 1 — P. 1—17.
10. *Шафранов В.Д.,ЮрченкоЭ.И.*Критерий желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии // *ЖЭТФ.*— 1967.—Т. 53,—С. 1175.

*Anisimov I. O., Omelchenko O. Ya., Romashchenko O. V.*  
**STABILITY OF IDEAL SMALL SCALE MAGNETO  
 HYDRODYNAMIC MODES IN TOKAMAK**

*We reported the results of the investigation of the stability of ideal balloon modes and Mersier modes in corrugated tokamak. The profiles of plasma pressure and stability factor were found to be close to experimental ones. The localization of abovementioned modes with respect to plasma cord radius and pressure intervals, where these modes can be excited, were estimated under these conditions. The algorithm of pressure profiles optimization was proposed.*

5. Установлено, що найскладніше стабілізувати ММ в центральній частині плазми, оскільки первісний профіль тиску в цій зоні плоский. Внаслідок цього границя по  $\beta_{кр}$  для мод Мерсье мало змінюється при зміні профілю тиску плазми. Ефект немономтонності  $q$  в цьому випадку не дає помітного збільшення значення  $\beta_{кр}$ . На периферії плазми в області локалізації ІБМ оптимізація профілю тиску та ефект немономтонності  $q$  призводять до суттєвого (п'ятикратного) збільшення значення  $\beta_{кр}$ .