

Міністерство освіти та науки України  
Національний університет “Кієво-Могилянська академія”  
Факультет природничих наук  
Кафедра фізико-математичних наук

**Кваліфікаційна робота**  
освітній ступень - бакалавр

на тему: «КОЛЕКТИВНІ ЗБУДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОННОГО ГАЗУ В  
КВАНТОВІЙ ЯМІ ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ»

Виконав студент 4 року навчання  
спеціальності  
104 Фізика та астрономія  
Пунько Олександр Анатолійович

Керівник Кухтарук Сергій  
Миколайович  
кандидат фізико-математичних  
наук, старший дослідник

Рецензент Лящук Ю.М.

Кваліфікаційна робота захищена  
з оцінкою

Секретар ЕК \_\_\_\_\_  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	2
1.1 Актуальність дослідження .....	2
1.2 Мета і задачі дослідження.....	3
ОСНОВИ КОЛЕКТИВНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЧАСТИНОК.....	5
2.1 Теорія плазми.....	5
2.2 Коливання електронного газу, ефект загасання Ландау .....	7
КОЛИВАННЯ ПЛАЗМОНІВ У КВАНТОВІЙ ЯМІ ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ .	9
3.1 Напівобмежена квантова яма.....	9
3.2 Побудова математичної моделі, система Власова-Пуассона .....	11
3.3 Пошук загальних розв’язків задачі.....	14
3.4 Аналіз дисперсійного рівняння.....	17
3.4 Динаміка плазмонів та хвиль ван Кампена .....	23
ВИСНОВКИ.....	32
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	33

## ВСТУП

### 1.1 Актуальність дослідження

Протягом останніх десятиліть відбувся великий прорив у розвитку напівпровідникової технології, що сприяло створенню більш енергоєфективних пристроїв. Зокрема, за допомогою нових матеріалів та технологій виробництва, вдалося значно зменшити розмір елементів в комп'ютерах та іншій електроніці і заодно підвищити їх продуктивність. Наприклад, сучасні комп'ютери можуть працювати з високою швидкістю та виконувати складні завдання при значно меншому розмірі та споживанні енергії, ніж це було раніше. Такі досягнення стали можливими завдяки активному розвитку напівпровідникової технології, яка в свою чергу тісно пов'язана з вивченням об'єктів розмірами порядку мікрометрів або нанометрів, а також гетероструктур [1], тобто структур які складаються із двох або більше напівпровідникових матеріалів із різними енергетичними зонами.

Дослідження низьковимірних структур в області терагерцової частини спектру є дуже важливим для хімії, фізики, біології, матеріалознавства та інших галузей науки. Ця частина спектру знаходиться в діапазоні частот від 0,1 до 10 терагерц (THz), що відповідає довжинам хвиль від 30 до 3000 мікрометрів ( $\mu\text{m}$ ). Оскільки спектри багатьох важливих органічних молекул, таких як молекули ДНК, білки, цукри та інші, знаходяться саме в цьому діапазоні частот. Дослідження низьковимірних структур може допомогти у вивченні їх структури та властивостей.

Плазмони – це колективні коливання електронів, які виникають завдяки кулонівській взаємодії [2]. Із досліджень в області плазмоніки відомо, що коливання плазмонів у двовимірних структурах знаходяться у області терагерцових частот. Це дає можливість використовувати

плазмонні структури для створення компактних і швидкодіючих електронних і оптичних пристроїв, таких як терагерцові генератори, детектори та інші.

## 1.2 Мета і задачі дослідження

Як відомо в електронному газі, можуть бути різні види дефектів, наприклад, домішкові дефекти, фонони або дефекти на поверхні. Розсіювання електронів на цих дефектах призводить до втрати енергії коливань плазмонів, отже, до їх згасання. Однак і за відсутності стороннього впливу, коливання плазмонів загасають, завдяки механізму загасання Ландау [3]. Це процес загасання плазмових коливань, що пов'язаний із взаємодією електронів, котрі беруть участь в коливанні, із неоднорідним електричним полем, яке вони ж і створюють. В результаті відбувається дефазування електронного газу, що приводить до загасання коливань плазми.

Коливання плазмонів в квантових ямах є особливо цікавим, оскільки вони можуть бути керовані зміною електричного поля, температури, геометричної конфігурації областей, тощо. У двовимірній квантовій ямі коливання плазмонів залежать від початкової функції розподілу. Ця функція визначає динаміку коливань плазмонів, що може бути досліджено експериментально.

В цій роботі квантова яма буде обмеженою із одного боку потенціальним бар'єром [4], тобто областю простору, де потенціальна енергія є набагато вищою, за енергетичний спектр плазмових коливань. Як наслідок, на межі розділу виникатиме відбиття плазмонів, із можливістю наростання чи спадання їх амплітуди, інтерференції, тощо.

Наразі активно проводять як теоретичні, так і експериментальні дослідження плазмових коливань, в двовимірному електронному газі, обмеженому границею в ряді робіт: [5 – 8]. Зокрема, в роботі [5]

представлені результати експериментальних досліджень за допомогою інфрачервоної наноскопії в яких досліджуються плазмони в графені поблизу границі. Отримано, що плазмові хвилі активно взаємодіють із поверхневими фононами за умови великих імпульсів  $q = 1/a$ , де  $a = 40\text{нм}$  – радіус кантеливера атомного силового мікроскопа, в області ближнього поля із центром  $\omega = 1128\text{ см}^{-1}$  (33.8 ТГц). Також важливим результатом є значне збільшення амплітуди плазмових коливань  $s(\omega)$  в спектральній області  $\omega \in [1110; 1250]\text{ см}^{-1}$  і наявність синього зміщення пікової частоти на  $10\text{ см}^{-1}$ . Автори припускають що ці ефекти пов’язані із високою густиною вільних носіїв заряду в зразку графену [5].

В роботі [6] автори досліджували динаміку поверхневих плазмонів графену в інфрачервоній частині спектру за допомогою атомного силового мікроскопа (АСМ). На відміну від попередньої роботи, тут науковці вивчали коливання електронного газу, що було спровоковане імпульсом інфрачервоного лазера із частотою  $\omega = 892\text{ см}^{-1}$  (26.8 ТГц), неподалік від границі напівпровідника. Змінюючи напругу, що прикладена до затвору, дослідники спостерігали: відбиття, інтерференцію та затухання плазмових коливань на його границі. Додатковою частиною дослідження стало визначення параметра затухання плазмових коливань  $\gamma_p = 0.135 \pm 0.015$ , де параметр  $\gamma_p = q_2/q_1$ , тобто співвідношення між уявною та дійсною частиною імпульсу плазмонів  $q_p = q_1 + iq_2$ . Отримане значення затухань плазмових коливань значно відрізняється від теоретичних очікувань. Зі слів авторів, головний вплив у збільшенні частоти вносить ненавмисне легування дірок графену при поступовій зміні напруги затвору  $V_g \in [-20; 30]\text{В}$  із кроком в  $\Delta V = 10\text{В}$  [6].

Зазначені експериментальні результати, та багато інших, що не приведені у Вступі, вказують на актуальність тематики досліджень. Таким чином, у даній роботі буде досліджено вплив початкової функції розподілу

електронів на коливання плазмонів у напівобмеженій квантовій ямі, що дозволить прояснити та візуалізувати розповсюдження плазмонів біля границі.

*Об'єктом дослідження є колективні коливання електронного газу у квантовій ямі поблизу границі, в залежності від різних початкових функцій розподілу електронів.*

*Предметом дослідження є частота та динаміка коливань системи а також фізичні ефекти електронного газу, що виникатимуть за різних функцій розподілу.*

## **ОСНОВИ КОЛЕКТИВНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЧАСТИНОК**

### **2.1 Теорія плазми**

Плазмою називають газ, що складається з нейтральних атомів, іонів і електронів. В плазмі іони та електрони мають велику енергію, завдяки чому вони стають зарядженими, відокремлюючись від атомів. В свою чергу це призводить до утворення магнітних та електричних полів у електронному газі, які взаємодіють з частинками плазми, впливаючи на їх рух.

Важливу роль у розвитку теорії плазми відіграли дослідження Релея, Ленгмюра та Тонкса. У 1903 році Релей зміг розв'язати задачу про поведінку сукупності електронів в моделі атома Томсона, що вказувало на можливість існування газу заряджених частинок. Ленгмюр та Тонкс провели дослідження газової плазми та змогли довести, що газ заряджених частинок може коливатися з певною частотою, яка стала відома як плазмова або ленгмюрівська частота. [9,10]

Основи теорії плазми в 1930-тих роках заклали Ландау та Власов. Ландау запропонував вивчати плазму як газ частинок з кулонівською взаємодією за допомогою кінетичного рівняння Больцмана:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \vec{p}} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} + \vec{p} \frac{\partial F}{\partial \vec{p}} = I\{F\} \quad (1.1)$$

Тут  $F(t, \vec{r}, \vec{p})$  – функція розподілу частинок певного сорту за координатами та імпульсами, аргументами якої є: час  $t$ , радіус-вектор  $\vec{r}$ , та імпульс  $\vec{p}$  частинки;  $W$  – кінетична енергія електронів в кристалі, відповідно  $\frac{\partial W}{\partial \vec{p}}$  – їх швидкість,  $I\{F\}$  – інтеграл розсіювання, який описує розсіювання частинки на різноманітних дефектах та інших частинках. Варто зауважити, що в загальному випадку кінетичне рівняння Больцмана (1.1) використовують для опису еволюції розподілу частинок в нерівноважній термодинамічній системі. Однак рівняння (1.1) також можна широко використовувати для опису електронного газу твердих тіл, адже воно дозволяє легко враховувати квантову статистику Фермі-Дірака.

Вже відоме рівняння (1.1) дозволяє визначати розподіл частинок у просторі та часі з урахуванням їх взаємодії між собою та з електричним і магнітним полями. Використовуючи цей підхід, Ландау зумів пояснити багато ефектів, спостережуваних у плазмі, таких як електронні та іонні лавини, плазмові хвилі та інші. Власов запропонував узагальнення кінетичного рівняння Больцмана на випадок заряджених частинок, що рухаються в електро-магнітному полі, ввівши силу Лоренца:

$$\vec{p} = -e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial W}{\partial \vec{p}}, \vec{B} \right] \right) \quad (1.2)$$

Тут  $-e$  – заряд електрона,  $\vec{E}$  – електричне поле та  $\vec{B}$  – магнітна індукція. Якщо підставити рівняння (1.2) в (1.1), то отримаємо рівняння, яке стало відомим як рівняння Власова, воно дозволяє описати еволюцію функції розподілу заряджених частинок в плазмі.

Якщо швидкість електронів значно менша за швидкість світла, то в силі Лоренца можна знехтувати доданком з магнітною індукцією, оскільки її

вплив на рух частинки буде незначним. Однак, якщо ввести скалярний потенціал електричного поля  $\varphi(t, \vec{r})$ , за правилом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (1.3)$$

то ми отримаємо систему Власова-Пуассона для електронного газу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \vec{p}} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} + e \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \frac{dF}{d\vec{p}} = 0 \\ \Delta\varphi = 4\pi e \int (F - f_0) d\vec{p} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Система (1.4) є більш простою ніж повна система Власова (з магнітними полями) оскільки містить менше рівнянь та невідомих. Однак, навіть у випадку системи Власова-Пуассона виникають значні труднощі при отриманні точних результатів.

## 2.2 Коливання електронного газу, ефект загасання Ландау

Для вивчення вібраційних властивостей електронного газу Власов застосував лінеаризоване рівняння Власова-Пуассона (1.4) для тривимірного електронного газу (3DEG). Варто зауважити, в цій роботі досліджуємо коливання двовимірного електронного газу в напівобмеженій квантовій ямі. Координатно-часову залежність функції розподілу Власов зміг представити як плоску хвилю –  $f(t, \vec{r}, \vec{p}) = f_{\vec{k}}(\vec{p})e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}$ , – що відповідає перетворенню Фур'є. Це є дуже важливий крок, адже, як в часи Власова, так і за нинішнього рівня розвитку комп'ютерних технологій, неможливо описати рух окремого електрона чи іона в межах кристалічної ґратки матеріалу. В такому випадку потенціал системи теж можна представляти як плоску хвилю:  $\varphi(t, \vec{r}) = \varphi_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}$ , – тоді розв'язок цієї системи отримаємо у наступному вигляді:

$$f_{\vec{k}} = \frac{e\varphi_{\vec{k}}}{(\omega - \vec{v}\vec{k})} \vec{k} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \quad (1.5)$$

Тут  $\vec{k}$  – хвильовий вектор, вздовж якого розповсюджується фронт хвилі,  $i$  – уявна одиниця,  $\omega$  – циклічна частота,  $\vec{v} = \frac{\partial W}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m^*}$  – швидкість руху електронів у плазмі,  $m^*$  - ефективна маса електрона [11].

У зв'язку із ізотропністю плазми, можна довільним чином обрати систему координат, тому нехай хвильовий вектор направлений вздовж осі  $ox$ . Якщо підставити розв'язок (1.5) в лінеаризоване рівняння Пуассона, та перейти від інтегрування за імпульсами, до інтегрування за швидкостями, ми отримаємо діелектричну функцію Власова, що описує коливання електронного газу:

$$\epsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km^*} \int \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{dv}{\omega - kv} \quad (1.6)$$

Зрозуміло, що інтеграл (1.6) буде розбіжним, коли  $\omega = kv$ . Тому Власов вирішив брати цей інтеграл у сенсі головного значення [12]. В решті-решт він зміг отримати розв'язок коли рівноважна функція розподілу електронів  $f_0$  відповідає розподілам Максвелла та Фермі-Дірака.

Пізніше Ландау виступив із критикою до підходу Власова у розв'язання рівняння (1.6), адже вважав безпідставним взяття розбіжного інтегралу в діелектричній функції. Натомість Ландау запропонував власний спосіб розв'язання лінеаризованої системи Власова-Пуассона, він припустив, що в початковий момент часу був заданий нерівноважний розподіл електронів. У зв'язку із цим виникають загасаючі коливання вільного електронного газу, які Ландау і визначав. В такому випадку плоскою хвилею варто представити лише координатну залежність збурень  $f_1(t, \vec{r}, \vec{p}) = f_{\vec{k}}(t, \vec{p})e^{i\vec{k}\vec{r}}$ . Тому отриману систему рівнянь можна розв'язати за допомогою методу перетворень Лапласа [13]. В результаті, в знаменнику скалярного потенціалу знаходиться діелектрична функція, яка дуже схожа на ту, що отримав Власов. Різниця в діелектричних функціях Власова та Ландау полягає в тому, що у Ландау уявна частина частоти в знаменнику не

нульова, а позитивна (завдяки методу Лапласа), що дозволяє позбутись розбіжності в інтегралі.

Ландау визначив частоту коливань плазмонів, значення якої збігається із результатом Власова:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m^*}} \quad (1.7)$$

де  $N$  – концентрація (3DEG). Однак Ландау додатково зміг отримати ще декремент загасання максвелівської плазми:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_0}{(ka)^3} e^{-\frac{1}{2(ka)^2}} \quad (1.8)$$

Цей результат і є відомий, як ефект загасання Ландау. Варто зауважити, що рівність (1.8) справедлива при  $ka \ll 1$ . Адже при  $ka \gg 1$  декремент загасання пропорційний  $\gamma \sim \ln ka$ , тому в цьому випадку, коливання загасають дуже швидко.

## **КОЛИВАННЯ ПЛАЗМОНІВ У КВАНТОВІЙ ЯМІ ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ**

### **3.1 Напівобмежена квантова яма**

В попередній роботі [14] ми досліджували поведінку плазмових коливань в двовимірній необмеженій квантовій ямі [15], де було отримано досить цікаві результати, особливо наростання коливань плазми за умови їх резонансу із хвилями ван Кампена [16]. Цей ефект був викликаний інжекттованим пучком електронів в область квантової ями, що створив точкове наростання потенціалу, і, як наслідок, коливання плазмонів, які протягом довгого часу могли наростати. Тепер цікавим є те, як будуть поводити себе плазмові коливання на межі поділу квантова

яма\потенціальний бар'єр, якщо їх збудити за допомогою зовнішнього впливу, наприклад точкового інжектування електронів чи удару лазером.

Як вже було обмовлено, наразі квантова яма буде напівобмеженою, тобто такою, що із одного боку оточена потенціальним бар'єром, який не можуть подолати заряджені частинки. У зв'язку із ізотропністю плазми в двовимірному електронному газі (2DEG), потенціальний бар'єр та орієнтацію системи координат можемо обрати довільним чином. Будемо розглядати квантову яму на основі GaN, що матиме границю вздовж осі  $oy$ , а хвилі будуть розповсюджуватись вздовж осі абсцис; вісь  $oz$  – нормальна до площини двовимірного електронного газу.

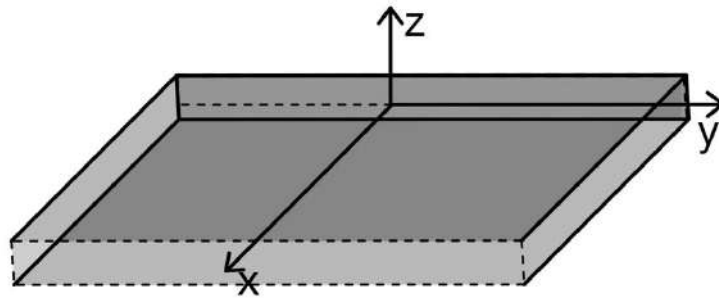


Рисунок 1: схематичне зображення напівобмеженої квантової ями

В початковий момент часу, за відсутності зовнішніх сил та полів, при достатньо високих температурах (порядку кімнатних  $T = 300k$ ) електрони в двовимірному електронному газі будуть розподілені за законом Максвела:

$$F_0(\vec{p}) = \frac{n_0 e^{-\frac{|\vec{p}|^2}{2m^*k_B T}}}{2\pi m^* k_B T} \quad (2.1)$$

Тут  $n_0$  – початкова концентрація електронів,  $\vec{p}$ ,  $m^*$ ,  $T$  – імпульс, ефективна маса та температура системи відповідно,  $k_B$  – стала Больцмана, а квадрат модуля імпульсу можна розписати як  $|\vec{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2$ . Функція (2.1) – функція початкового розподілу, тож вона нормована таким чином, щоб виконувалась наступна рівність:

$$\int F_0(\vec{p}) d^2\vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(p_x, p_y) dp_x dp_y = n_0 \quad (2.2)$$

Зрозуміло, що цей розподіл є рівноважним, тому коливання в системі відсутні.

### 3.2 Побудова математичної моделі, система Власова-Пуассона

Для математичного опису плазмових коливань в (2DEG) варто звернутись до системи Власова-Пуассона (1.4), де попередньо представимо функцію розподілу електронів у такій формі:

$$F = F_0(\vec{p}) + F_1(\vec{r}, \vec{p}, t), F_0 \gg F_1 \quad (2.3)$$

тут  $F_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$  – функція яка задає відхилення від рівноважного розподілу заряджених частинок в початковий момент, як це робив Ландау (розділ 2.2). Зважаючи на це лінеаризована система Власова-Пуассона (1.4) буде записана так:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m^*} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} + e \vec{\nabla} \varphi|_{z=0} \frac{dF_0}{d\vec{p}} = 0 \\ \Delta \varphi = \frac{4\pi e \delta(z)}{\kappa_0} \int F_1(\vec{r}, \vec{p}, t) d^2 p \end{cases} \quad (2.4)$$

де  $\kappa_0$  – діелектрична проникність. Варто пам'ятати, що (2DEG) – це низьковимірна структура, і розмір плівки вздовж осі  $oz$  є нехтовно малим (близько декількох розмірів атома). Тому для опису впливу електричного поля на систему електронного газу використовуємо дельта функцію Дірака [17].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0) dz = 1 \quad (2.5)$$

тут  $z_0$  – положення плівки в просторі вздовж осі  $oz$ , для зручності варто вважати, що  $z_0 = 0$ , тобто плівка графену розташована на початку осі аплікату.

Якщо функцію  $F_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$  та електричний потенціал  $\varphi(z, t)$  представити у формі плоских хвиль, що розповсюджуються вздовж хвильового вектора

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  (вздовж осі абсцис), то систему рівнянь (2.4) можна переписати наступним чином:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p_x}{m^*} \frac{\partial F_1}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=0} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{4\pi e \delta(z)}{\kappa_0} \int F_1(x, \vec{p}, t) d^2 p \end{cases} \quad (2.6)$$

Для подальшого аналізу системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (2.6) треба виконати інтегральне перетворення Лапласа [13], що дозволить перейти від координатно-часової до хвильової залежності наших функцій. Перетворення Лапласа ставить у відповідність кожній функції із області дійсних чисел (оригіналу), функцію, що існує в комплексній площині (образ).

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.7)$$

тут  $f(t) \in \mathbb{R}$  – функція оригіналу,  $F(\omega) \in \mathbb{C}$  – її образ,  $\omega = a + ib$  – комплексна змінна. Таке перетворення дозволяє нам простіше розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків із заданими початковими умовами, адже зводить їх до лінійних рівнянь відносно нової змінної. Після знаходження функції, що є розв'язком диференціального рівняння в області комплексних чисел, ми можемо повернутись до функції дійсного аргументу за допомогою оберненого перетворення Лапласа [13].

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.8)$$

де  $\sigma > 0$  – задає інтегрування у верхній півплощині комплексної  $\omega$ , вище усіх особливостей підінтегральної функції.

Таким чином, використовуючи інтегральне перетворення (2.7) для першого рівняння системи (2.6) можемо отримати наступну рівність:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p_x}{m^*} \frac{\partial F_1}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=0} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} \right) = \\ = -f_0 - i\omega f_\omega + \frac{p_x}{m^*} \frac{\partial f_\omega}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial x} \Big|_{z=0} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Якщо розглянути рівняння (2.9), то зрозуміло, що воно є функцією частоти  $\omega$  та координати  $x$ , однак, як вже було обговорено, нам буде зручно перейти до повністю хвильового представлення коливань плазмонів. В такому разі треба виконати ще одне перетворення Лапласа, аби замінити оригінал координати на образ хвильового вектора  $k$  вздовж цієї координати.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ikx} dx \left( -f_0 - i\omega f_\omega + \frac{p_x}{m^*} \frac{\partial f_\omega}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial x} \Big|_{z=0} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} \right) = \\ = -f_{0k} - i\omega f_{\omega k} - \frac{p_x}{m^*} f_{\omega 0} - e \frac{\partial F_0}{\partial p_x} (\varphi_{\omega 0}|_{z=0} + ik\varphi_{\omega k}|_{z=0}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

тут  $f_{0k}$  – Лаплас компонента початкової функції розподілу,  $f_{\omega 0}(\vec{p}) = f_\omega(x, \vec{p})|_{x=0}$  – функція розподілу електронів за імпульсами в початковій координаті,  $\varphi_{\omega 0}|_{z=0} = \varphi_\omega(x, z)|_{x=0, z=0}$  – скалярний потенціал в початковій координаті плівки,  $f_{\omega k}$  та  $\varphi_{\omega k}$  – Лаплас-Лаплас компонента функції розподілу та скалярного потенціалу.

Після всіх перетворень відповідну систему Власова-Пуассона (2.6) можна записати так:

$$\begin{cases} f_{0k} + i\omega f_{\omega k} + \frac{p_x}{m^*} (f_{\omega 0} + ikf_{\omega k}) + e \frac{\partial F_0}{\partial p_x} (\varphi_{\omega 0}|_{z=0} + ik\varphi_{\omega k}|_{z=0}) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_{\omega k}}{\partial z^2} - k^2 \varphi_{\omega k} = \varphi'_{\omega 0} - ik\varphi_{\omega 0} + \frac{4\pi e \delta(z)}{\kappa_0} \int f_{\omega k} d^2 p \end{cases} \quad (2.11)$$

У отриманій системі рівнянь (2.11), є 4 функції, які задають початкові та граничні умови задачі:  $f_{0k}$ ,  $f_{\omega 0}$ ,  $\varphi'_{\omega 0}$ ,  $\varphi_{\omega 0}$ . Надалі ми оберемо нульові граничні умови для електростатичного потенціалу та його першої похідної при  $x = 0$ . Що стосується двох інших функцій, тобто  $f_{0k}$ ,  $f_{\omega 0}$ , то ми будемо задавати їх виходячи з наступних міркувань. Спочатку ми повинні задати певну функцію  $f_0(t, x, \vec{p})$ , яка залежить від часу, координати  $x$ , та імпульсу. Будемо задавати  $f_0$  у вигляді хвильового пакету, що розповсюджується в

бік границі і відбивається від неї. При відбиванні знак імпульсу повинен змінюватись на протилежний, а координатна залежність змінюватись не повинна, що означатиме розгляд жорсткої границі. В результаті ми прийшли до такого виразу для  $f_0(t, x, \vec{p})$ :

$$f_0 = n_0^* \delta(p_y - p_y^0) \left( \cos \left( \omega_0 \left( t + \frac{x - x_0}{c_0} \right) \right) e^{-\frac{\left( t + \frac{x - x_0}{c_0} \right)^2}{\Delta t^2}} \delta(p_x + p_x^0) \right. \\ \left. + \cos \left( \omega_0 \left( t - \frac{x + x_0}{c_0} \right) \right) e^{-\frac{\left( t - \frac{x + x_0}{c_0} \right)^2}{\Delta t^2}} \delta(p_x - p_x^0) \right) \quad (2.12)$$

Тут  $x_0$  – точка в якій знаходиться імпульс при  $t = 0$ ,  $\omega_0$  – несуча частота імпульсу,  $c_0$  – групова швидкість розповсюдження хвильового пакету,  $\Delta t$  – його тривалість. Дельта-функції  $\delta(p_x - p_x^0) \delta(p_y - p_y^0)$  означають, що ми розглядаємо пучок електронів з однаковими імпульсами  $\vec{p}^0$  і концентрацією  $n_0^*$ , які вприснули в квантову яму. Такий випадок ми розглядали в роботі [14], тож цей пучок електронів буде збуджувати хвилю ван Кампена [16].

### 3.3 Пошук загальних розв'язків задачі

Як це й було в роботі [14], спочатку треба знати як розподілений скалярний потенціал в області квантової ями. Для цього нам треба розв'язати електростатичну задачу, що впливає із другого рівняння системи (2.11).

Оглянувши рівняння, ми можемо сказати, що при  $z \neq 0$  це однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Тому, в такому разі, будемо шукати розв'язок в формі:

$$\varphi_{\omega k} = C_1^{\pm} e^{-kz} + C_2^{\pm} e^{kz} \quad (2.13)$$

тут  $C_1^\pm$  і  $C_2^\pm$  – невідомі константи, причому знак “+” відноситься до розв’язку при  $z > 0$ , а знак “–” відноситься до розв’язку при  $z < 0$ . Для визначення цих констант необхідно використати наступні граничні умови: скалярний потенціал на нескінченостях прямує до нуля, функція потенціалу неперервна, при переході через плівку, а її похідна має стрибок в цій точці:

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi_{\omega k} = 0 \\ \varphi_{\omega k}|_{z=-\varepsilon} = \varphi_{\omega k}|_{z=\varepsilon} \\ \left. \frac{d\varphi_{\omega k}}{dz} \right|_{z=\varepsilon} - \left. \frac{d\varphi_{\omega k}}{dz} \right|_{z=-\varepsilon} = \frac{4\pi e n_{\omega k}}{\kappa_0} \end{cases} \quad (2.14)$$

Тут позначено  $n_{\omega k} = \int f_{\omega k} d^2p$ , що власне є збуренням концентрації у квантовій ямі. Важливо зауважити, наш хвильовий вектор  $k \in \mathbb{C}$ , і його можна представити у формі  $k = k' + ik''$ . В такому разі, пам’ятаючи про першу умову системи (2.14), ми маємо зважати на знак дійсної частини хвильового вектора. Тоді розв’язок диференціального рівняння матиме вигляд:

$$\varphi_{\omega k} = -\text{sgn}(k') \frac{2\pi e}{\kappa_0 k} n_{\omega k} e^{-\text{sgn}(k')|z|} \quad (2.15)$$

Отож, ми зуміли отримати функцію, що описує скалярний потенціал в квантовій ямі, а це означає, що тепер маємо перейти до розв’язку кінетичного рівняння Власова, яке є першим рівнянням системи (2.11). Якщо уважно оглянути рівняння, то ми маємо багато функцій, що є зображеннями оригіналів функції розподілу  $f$  та потенціалу  $\varphi$ , тому наразі нам треба знайти їх аналітичний вигляд.

Погрупувавши доданки та розв’язавши рівняння відносно  $f_{\omega k}$ , отримаємо наступний вираз:

$$f_{\omega k} = \frac{i}{\omega + \frac{p_x}{m^*} k} \left[ f_{0k} + \frac{p_x}{m^*} f_{\omega 0} - \frac{i2\pi e^2}{\kappa_0} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} \int \int f_{\omega k} d^2\vec{p} \right] \quad (2.16)$$

Як ми бачимо, отримане рівняння (2.16) є інтегральним, тому проінтегрувавши по всіх імпульсах, та позначивши потенціал в квантовій ямі:

$$\Psi_{\omega k} = \varphi_{\omega k}(z = 0) = \text{sgn}(k') \frac{2\pi e}{\kappa_0 k} \int \int f_{\omega k} d^2 \vec{p} \quad (2.17)$$

Загальний розв'язок можна коротко записати у такій формі:

$$\Psi_{\omega k} = \frac{N(\omega, k)}{\Delta(\omega, k)} \quad (2.18)$$

тут  $N(\omega, k)$  і  $\Delta(\omega, k)$  чисельник та знаменник функції потенціалу  $\Psi_{\omega k}$ , які задають її характер та дисперсію плазмонів відповідно, і мають вигляд:

$$N(\omega, k) = -i \frac{2\pi e}{\kappa_0 k} \int \int d^2 \vec{p} \left( \frac{f_{0k} + \frac{p_x}{m^*} f_{\omega 0}}{\omega + \frac{p_x}{m^*} k} \right) \quad (2.19)$$

$$\Delta(\omega, k) = 1 - \text{sgn}(k') \frac{2\pi e^2}{\kappa_0} \int \int d^2 p \frac{\frac{\partial F_0}{\partial p_x}}{\omega + \frac{p_x}{m^*} k} \quad (2.20)$$

Наступним кроком потрібно виконати інтегрування за імпульсами у виразі (2.19), але спочатку ми маємо знайти аналітичний вираз  $f_{0k}$  та  $f_{\omega 0}$ , як образів функції розподілу (2.10), відповідно до інтегрального перетворення Лапласа (2.7).

$$f_{0k}(\vec{p}) = \int_0^\infty f_0(0, x, \vec{p}) e^{ikx} dx \quad (2.21)$$

$$f_{\omega 0}(\vec{p}) = \int_0^\infty f_0(t, 0, \vec{p}) e^{i\omega t} dt \quad (2.22)$$

Інтеграли по  $x$  та по  $t$  зручно позначити наступним чином:

$$I_k^\pm = \int_0^\infty \cos\left(\frac{x \mp x_0}{c_0}\right) e^{ikx - \left(\frac{x \mp x_0}{c_0 \Delta t}\right)^2} dx \quad (2.23)$$

$$I_\omega = \int_0^\infty \cos\left(t - \frac{x_0}{c_0}\right) e^{i\omega t - \left(\frac{t - \frac{x_0}{c_0}}{\Delta t}\right)^2} dt \quad (2.24)$$

Вищезгадані інтеграли є досить складними і не можуть бути виражені елементарними функціями. В такому разі найпростішим шляхом є їх числове інтегрування, при кожному значенні  $k$  та  $\omega$  відповідно. Далі, виконавши інтегрування за імпульсами виразу (2.19), отримуємо наступну рівність:

$$N(\omega, k) = -i \frac{2\pi e n_0^*}{\kappa_0 k} \left[ \frac{I_k^+ + \frac{p_x^0}{m^*} I_\omega}{\omega + \frac{p_x^0}{m^*} k} + \frac{I_k^- - \frac{p_x^0}{m^*} I_\omega}{\omega - \frac{p_x^0}{m^*} k} \right] \quad (2.25)$$

Варто зазначити, що оскільки хвилі розповсюджуються вздовж осі координат  $x$ , параметр  $p_y^0$  не увійшов до виразу (2.25).

### 3.4 Аналіз дисперсійного рівняння

В попередньому розділі ми отримали математичну модель коливань вільного електронного газу, а тепер настав час аналізувати дисперсійне рівняння. Із фізичної точки зору дисперсійне рівняння задає зв'язок частоти плазмонів з хвильовим числом. Це дуже важливий елемент в побудові координатно-часової залежності функції скалярного потенціалу.

Як ми пам'ятаємо, розв'язок у формі (2.18) є лише Лаплас-Лаплас компонентою потенціалу, тому, як це вже було обмовлено, ми маємо виконати обернене перетворення Лапласа (2.8). Відомий наразі потенціал є функцією комплексного аргументу, із аналізу функцій комплексної змінної відомий метод інтегрування за допомогою теореми про лишки [18], в області де підінтегральна функція є аналітичною та існують полюси певного порядку при  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

$$Res^{(n)} \Psi_{\omega_0 k} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{d^{(n-1)}}{d\omega^{(n-1)}} [(\omega - \omega_0)^n \Psi_{\omega k}]. \quad (2.26)$$

В такому разі інтеграл (2.8) із підінтегральною функцією (2.18) треба представити сумою лишків, згідно із рівнянням (2.26).

Потенціал (2.18) в своєму знаменнику має діелектричну функцію (2.20). Як і раніше, нам треба знайти всі полюси відносно частоти, або ж значення  $\omega = f(k)$ , при яких знаменник потенціалу буде рівний нулю:

$$\Delta(\omega, k) \equiv 0 = 1 - \text{sgn}(k') \frac{2\pi e^2}{\kappa_0} \int \int d^2p \frac{\frac{\partial F_0}{\partial p_x}}{\omega + \frac{p_x}{m^*} k} \quad (2.27)$$

Зрозуміло, що інтеграл (2.27) буде збіжним, оскільки в нього входить комплексна частота, що унеможлиблює рівність  $\omega = -\frac{p_x}{m^*} k$ . Якщо взяти до уваги вираз (2.1), адже  $F_0$  – Максвелівська функція розподілу електронів за імпульсами, то цей інтеграл можна переписати наступним чином:

$$\Delta(\omega, k) = 1 - \text{sgn}(k') \frac{2\pi e^2}{\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_x} \left( \frac{n_0 e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m^* k_B T}}}{2\pi m^* k_B T} \right) \frac{dp_y dp_x}{\omega + \frac{p_x}{m^*} k} \quad (2.28)$$

Тут подвійний інтеграл (2.28) є повторним по  $p_y$ , тому зручно взяти цей інтеграл аналітично, адже це буде відомий інтеграл Пуассона. Для того, щоб вирази стали більш компактні, зручно буде ввести безрозмірні змінні. Отже, після інтегрування виразу (2.28) по  $p_y$ , будемо мати:

$$\Delta(\omega, k) = 1 + \text{sgn}(k') \Omega_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-x^2} dx}{\Omega + Kx} \quad (2.29)$$

Тут  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $K = \frac{kv_T}{\omega_0}$ ,  $\Omega_e^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\pi e^2 n_0}{\kappa_0 \omega_0 \sqrt{m^* k_B T}}$  – безрозмірні частота, хвильовий вектор та параметр в діелектричній функції (залежить від температури та концентрації), відповідно. Величина  $v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m^*}}$  називається тепловою швидкістю.

Не зважаючи на простіший вигляд виразу (2.29), знайти нулі дисперсійного рівняння, за умови інтегрування такої складної функції,

аналітично не є можливим. Також, слід зазначити, що вся розвинена теорія справедлива коли довжина хвилі набагато більша за середню відстань між електронами ( $\sim \frac{1}{\sqrt{n_0}}$ ). В такому разі, для пошуку полюсів, доцільно перейти до довгохвильового наближення,  $k \rightarrow 0$ . Як наслідок, знаменник виразу (2.29) можна розвинути в ряд Маклорена за степенями безрозмірного хвильового вектора.

$$\frac{1}{\Omega + Kx} = \frac{1}{\Omega} - \frac{x}{\Omega^2}K + \mathcal{O}(K^2) \quad (2.30)$$

Після розвинення в ряд нам стає досить просто розв'язати дисперсійне рівняння відносно частоти:

$$\Omega = \Omega_e \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}K}{2}} \quad (2.31)$$

Як це зрозуміло, рівняння (2.31) задає лише наближене значення дисперсії, адже воно отримано в рамках довгохвильового наближення. В реальній системі електронного газу частота  $\omega \in \mathbb{C}$ , тобто там має бути присутня уявна частина, величина якої характеризуватиме ступінь загасання Ландау.

Для точного розв'язку рівняння (2.29) варто використати числові методи пошуку комплексного кореня, тобто за кожного значення хвильового вектора  $k$  нам треба знайти відповідне  $\omega$ , що має як дійсну, так і уявну частину. Введемо заміну:  $S = \frac{\Omega}{K}$ , тоді вираз (2.29) перепишемо наступним чином:

$$\Delta(\omega, k) \cdot K \equiv 0 = K + \Omega_e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-x^2}}{S + x} dx \quad (2.32)$$

Варто зауважити, що інтеграл у виразі (2.32) збіжний при  $S = -x$ , адже  $Im(S) > 0$  (умова накладена зворотнім перетворенням Лапласа (2.8)). Оскільки ми очікуємо ефект загасання плазмонів ( $Im(S) < 0$ ), то нам потрібно здійснити аналітичне продовження підінтегральної функції (2.32)

на нижню півплощину комплексної  $S$ , так як ми це робили раніше [14]. В результаті ми отримуємо наступний інтеграл, що розділяється на дві складові, в залежності від величини уявної частини частоти коливань:

$$\Delta \cdot K = K + \Omega_e \left[ \sqrt{\pi} - S \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{S-x} dx + \begin{cases} i\pi S e^{-S^2}, & \text{Im}S = 0 \\ i2\pi S e^{-S^2}, & \text{Im}S < 0 \end{cases} \right] \quad (2.33)$$

тут  $\wp$  – інтеграл у сенсі головного значення. Виконавши чисельне інтегрування виразу (2.24), та повернувшись від змінної  $S$  до  $\Omega$  можемо порівняти точний та наближений розв'язки дисперсійного рівняння.

На (Рис. 2) представлено залежність частоти та декременту загасання коливань в залежності від хвильового вектора. Можна бачити, що при малих значення хвильового вектора, точний чисельний розв'язок ідеально збігається з розв'язком, який отримано в довгохвильовому наближенні. Декремент загасання прямує до нуля при малих значеннях  $k$ , і збільшується (по модулю) при великих хвильових векторах. Для побудови (Рис. 2) використано типові параметри квантової ями на основі GaN:  $m^* = 0.2m_0$ ,  $n_0 = 5 \cdot 10^{12} \text{см}^{-2}$ ,  $T = 300 \text{ К}$  та  $\kappa_0 = 9.8$ .

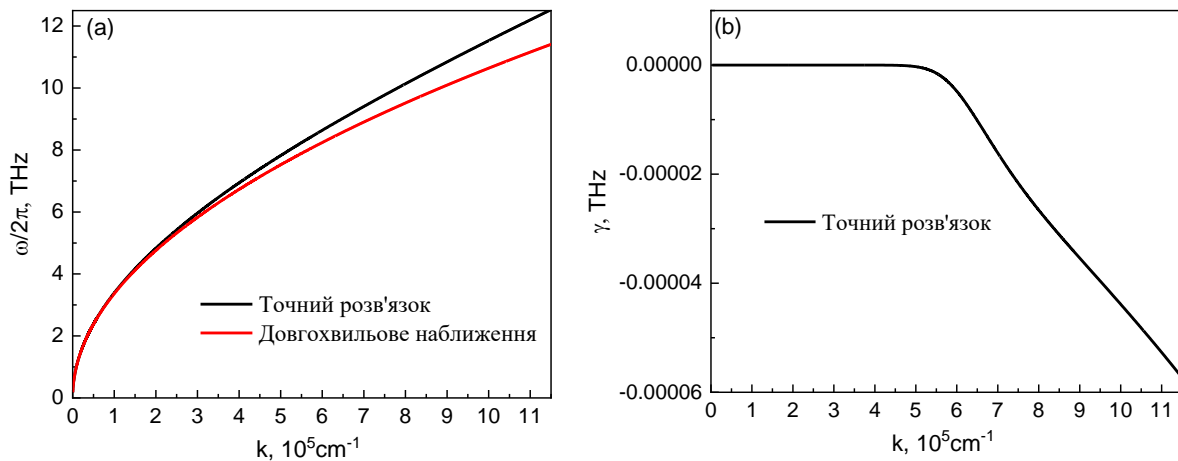


Рисунок 2: Залежність частоти (а) та декременту загасання (б) плазмонів від хвильового вектора.

Поява ненульового декременту загасання в електроній плазмі без жодних розсіянь називається ефектом загасання Ландау [3]. Фізичну

інтерпретацію цього ефекту продемонстровано на (Рис. 3), де схематично зображено функцію розподілу Максвела від швидкості  $v_x = p_x/m^*$ .

На цьому розподілі виділено дві смужки синього та червоного кольорів, на границі яких відмічено фазову швидкість плазмонів  $v_{ph} = \omega/k$ . Синій колір позначає електрони, швидкість яких менша за фазову швидкість плазмонів, а червоний відповідно позначає швидкість електронів, що більша за фазову швидкість. В наслідок взаємодії між плазмонами та електронами відбувається обмін енергією: електрони, повільніші за плазмони (синій колір) намагаються сповільнити плазмони, забираючи в них енергію, тоді як електрони, що мають швидкість більшу за фазову швидкість плазмонів (червоний колір), намагаються прискорити плазмони, віддаючи їм енергію. Оскільки повільніших електронів більше ніж швидких, то, в цілому, більше енергії забирається в плазмонів, ніж передається їм. В результаті амплітуда коливань плазмонів зменшується з часом, що називають ефектом загасання Ландау.

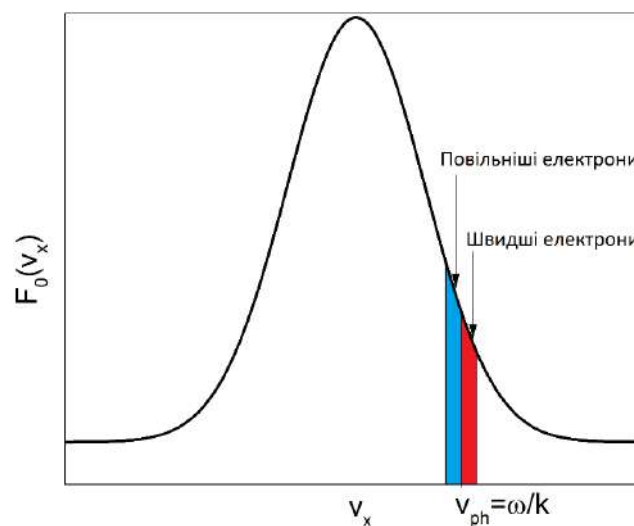


Рисунок 3: Розподіл Максвела та ілюстрація ефекту загасання Ландау.

Крім того, з (Рис. 3) можна зрозуміти чому ефект загасання Ландау є малим в довгохвильовому наближенні. справа в тому, що при малих хвильових векторах фазова швидкість плазмонів велика, оскільки  $v_{ph} \sim 1/\sqrt{k}$  (див. (2.31)). Отже, ми повинні зафіксувати тепер фазову

швидкість на (Рис. 3) при великих значеннях швидкостей, тобто на хвості функції розподілу Максвелла. Проте, зрозуміло, що в цьому випадку кількість електронів з швидкостями дещо меншим за фазову швидкість та більшим за неї буде приблизно однакова. Таким чином ефект загасання Ландау буде малим.

Рисунок 2 показує, що навіть при достатньо великих хвильових векторах ефект загасання Ландау невеликий: декремент загасання набагато менший за частоту плазмонів. Щоб збільшити цей ефект, можна зменшити концентрацію електронів. На (Рис. 4) показано дисперсію та декремент загасання плазмонів при таких же параметрах що і (Рис. 2), тільки концентрація електронів в 5 разів менша:  $n_0 = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ . З цього рисунку можна бачити, що при меншій концентрації частота плазмонів менша, а декремент загасання – більший. Проте, будь яке загасання – це негативний ефект. Для будь якого експерименту необхідно, щоб загасання були мінімальними. Тому в подальшому ми зосередимося на випадку з великою концентрацією носіїв, що показано на Рис. 2.

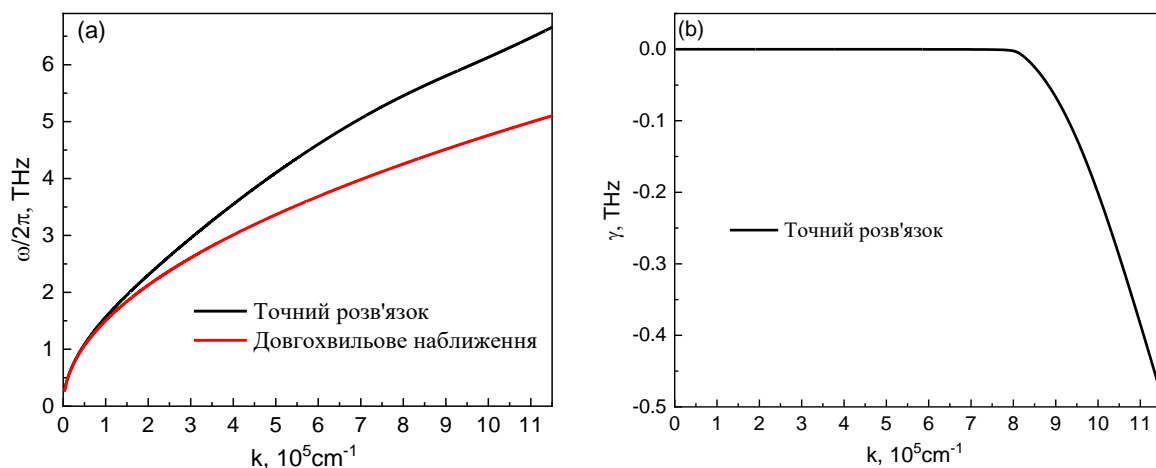


Рисунок 4: Залежність частоти (а) та декременту загасання (б) плазмонів від хвильового вектора для концентрації  $n_0 = 10^{12} \text{ см}^{-2}$

### 3.4 Динаміка плазмонів та хвиль ван Кампена

Після того як ми розглянули дисперсію плазмонів, що задається знаменником (2.18), повернемося до аналізу потенціалу в квантовій ямі. Для компактнішого представлення результатів, розділимо всі величини на характерне значення потенціалу:  $\Psi_0 = -\frac{2\pi en_0}{\kappa_0 k}$ , після чого вираз (2.25) буде записаний так:

$$N(\omega, k) = i\delta n \left[ \frac{I_k^+ + \frac{p_x^0}{m^*} I_\omega}{\omega + \frac{p_x^0}{m^*} k} + \frac{I_k^- - \frac{p_x^0}{m^*} I_\omega}{\omega - \frac{p_x^0}{m^*} k} \right] \quad (2.34)$$

де позначено  $\delta n = n_0^*/n_0$  – відношення концентрації додаткових електронів до концентрації електронів. Ми перейдемо до безрозмірних величин так як це зроблено у Розділі 3.4. Також, введемо додатково безрозмірний час  $\tau = \omega_0 t$ , та безрозмірну координату  $X = \omega_0 x / v_T$ . Оскільки надалі нас буде цікавити якісна картина розповсюдження хвиль, ми будемо представляти результати в безрозмірному вигляді. Тоді формула (2.34) матиме вигляд:

$$N(\Omega, K) = i\delta n \left[ \frac{I_K^+ + V_{vK} I_\Omega}{\Omega + V_{vK} K} + \frac{I_K^- - V_{vK} I_\Omega}{\Omega - V_{vK} K} \right] \quad (2.35)$$

де позначено  $V_{vK} = \frac{p_x^0}{m^* v_T}$ , що має зміст безрозмірної швидкості хвилі ван Кампена. Подібно до того, як було в роботі [14], крім збудження плазмонів в системі, що описується  $\Delta(\Omega, K)$ , збуджуються хвилі ван Кампена з частотою  $\Omega = V_{vK} K$ , що задається знаменником (2.35), в якому є полюси  $\Omega = \pm V_{vK} K$ .

Якщо оглянути вираз (2.12), то в нього входять параметри, які необхідно задати. Виберемо несучу частоту  $\omega_0 = 2\pi \cdot 1$  ТГц,  $\delta t = 2$  пс. Швидкість розповсюдження пакету будемо приймати рівною швидкості хвилі ван Кампена, яку ми будемо змінювати. Координату  $x_0$  будемо обирати кожен раз іншою, фіксуючи імпульс на такій відстані, щоб при  $t =$

0 він був далеко від границі, а час за який він добігав до границі був кожен раз один і той же: 100 пс. Подібного до того як це було в роботі [14] нас будуть цікавити випадки, коли плазмони як в резонансі із хвилями ван Кампена, так і ні. Тому спочатку необхідно визначити умову резонансу.

Оскільки безрозмірна частота нормована на несучу частоту, то для нашого імпульсу безрозмірна частота фіксована:  $\Omega_0 = 1$ . В такому разі швидкість ван Кампена  $V_{vK} = \Omega_0 / K = 1/K$ . Звідси  $K = 1/V_{vK}$ , що означає, що в початковому пакеті хвильові вектори будуть центруватися довкола значення  $1/V_{vK}$ . Підставивши це значення хвильового вектора в (2.31) і одиницю замість частоти отримаємо умову резонансу:

$$V_{vK}^{res} = \frac{\Omega_e^2 \sqrt{\pi}}{2} \quad (2.36)$$

Якщо взяти параметри при яких побудовано (Рис. 2), то  $V_{vK}^{res} \approx 33.4$ . Отже резонансний безрозмірний хвильовий вектор  $1/V_{vK}^{res} \approx 0.03 \ll 1$ , що означає, що в резонансі буде добре виконуватись довгохвильове наближення і ми зможемо користуватись спрощеними виразом для  $\Delta(\Omega, K)$  в розрахунках потенціалу.

Перейдімо до аналізу чисельних результатів. Спочатку розглянемо нерезонансний випадок зафіксувавши  $V_{vK} = 10$ . Хвильовий вектор в цьому випадку має значення 0.1, в розмірних змінних є  $3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-2}$ , що належить довгохвильовому наближенню (див. Рис. 2). Розрахований просторовий розподіл потенціалу зображено на Рис. 5, з якого можна бачити, що цей розподіл має форму Гаусового пакету з максимумом в безрозмірній координаті  $X_0 \approx 6300$ . Далі ми розраховували з певним кроком у часі просторові розподіли імпульсу. В результаті ми змогли спостерігати розповсюдження такого імпульсу до границі і його відбивання.

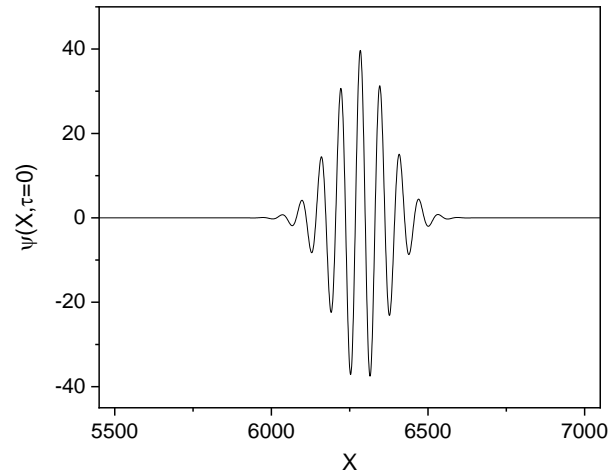


Рисунок 5: Початковий розподіл потенціалу в квантовій ямі при  $V_{vK} = 10$ .

На (Рис. 6) показано просторово-часовий розподіл потенціалу  $\psi(X, \tau)$  з якого можна бачити як розповсюджується початковий імпульс з (Рис. 5). Можна бачити, що при розповсюдженні через середовище з дисперсією імпульс розширюється, потім відбивається і рухається в зворотному напрямку.

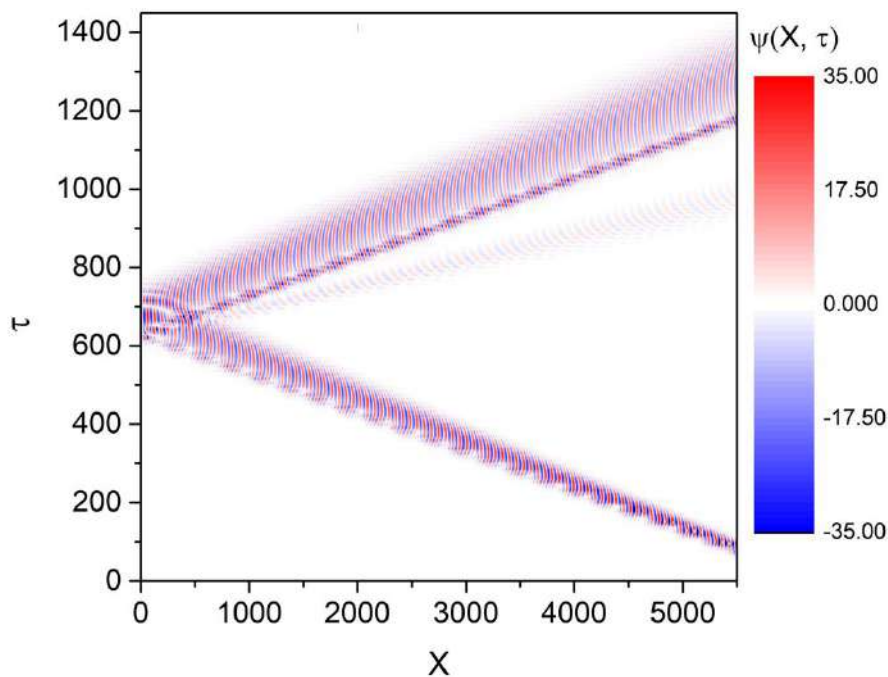


Рисунок 6: Просторово-часовий розподіл потенціалу при  $V_{vK} = 10$ .

Також на (Рис. 6) можна бачити інтерференцію біля границі  $X = 0$  між частиною імпульсу, що доходить до границі та частиною, що вже відбилася. Більше того, можна бачити, що після відбиття з'явився додатковий імпульс, що рухається з більшою швидкістю ніж наш початковий. Його амплітуда менша ніж амплітуда основного імпульсу, тому він виглядає “більш блідим”.

На (Рис. 7) показано кілька розподілів потенціалу в різні моменти часу. При  $\tau = 300$  можна бачити, що форма пакету відрізняється від зображеної на (Рис. 5). Якщо оцінити безрозмірну групову швидкість плазмонів  $V_g = \frac{d\Omega}{dK} \sim 1/\sqrt{K}$ , то при  $K = 0.1$ ,  $V_g \approx 9.1$ , яка близька до  $V_{vK}$ . Зазначимо, що групова швидкість хвиль ван Кампена збігається з  $V_{vK}$ . Тому на (a) та (b) ми спостерігаємо пакет ван Кампена та, поряд пакет плазмонів з  $K = 0.1$ , які рухаються з близькими груповими швидкостями.

Додаткова хвиля, що виникає на (Рис. 6) добре видно на (Рис. 7 (c), (d)). Зокрема, на (Рис. 7 (d)) її можна бачити попереду імпульсу. У неї частота осциляцій менша ніж в інших двох імпульсах, що позаду неї. Коли ми розглядаємо просторові розподіли, то краще говорити не про частоту, а про хвильовий вектор. Таким чином, у цієї хвилі, хвильовий вектор менший, а групова швидкість більша. Якщо ми згадаємо, що у нас несуча частота початкового імпульсу 1 ТГц, то ми можемо визначити хвильовий вектор плазмону, що відповідає цій частоті з (Рис. 2):  $k \approx 8.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2}$ , який відповідає безрозмірному хвильовому вектору  $K \approx 0.03$  та груповій швидкості плазмону  $V_g \approx 16.7$ . Тобто з цих оцінок випливає, що ми ідентифікували цю хвилю як плазмон, що має менший хвильовий вектор ніж у початкового імпульсу. Ми бачимо чітко, що цей плазмон проявляє себе після відбивання від границі. Таким чином ця хвиля з'являється в результаті явища, яке називається конверсія хвиль (або конверсія мод). Зміст його в тому, що частина енергії нашого імпульсу переходить в іншу

хвилю. Таке явище спостерігають, наприклад, в акустиці, коли поверхнева хвиля Релея відбивається від границі і її частина енергії йде на створення повздовжньої акустичної хвилі [19]. Отже, якщо підсумувати, то на (Рис. 7(d)) можна перерахувати наступні пакети зліва направо: плазмон з  $K = 0.1$  (широкий пакет), хвиля ван Кампена з  $K = 0.1$  (вузкий пакет, але з найбільшою амплітудою) та конвертований плазмон з  $K \approx 0.03$ . Останній має значення хвильового вектору  $1/V_{vK}^{res}$ , тобто визначається умовою резонансу (див. (2.36) та коментар під ним), що необхідно для конверсії.

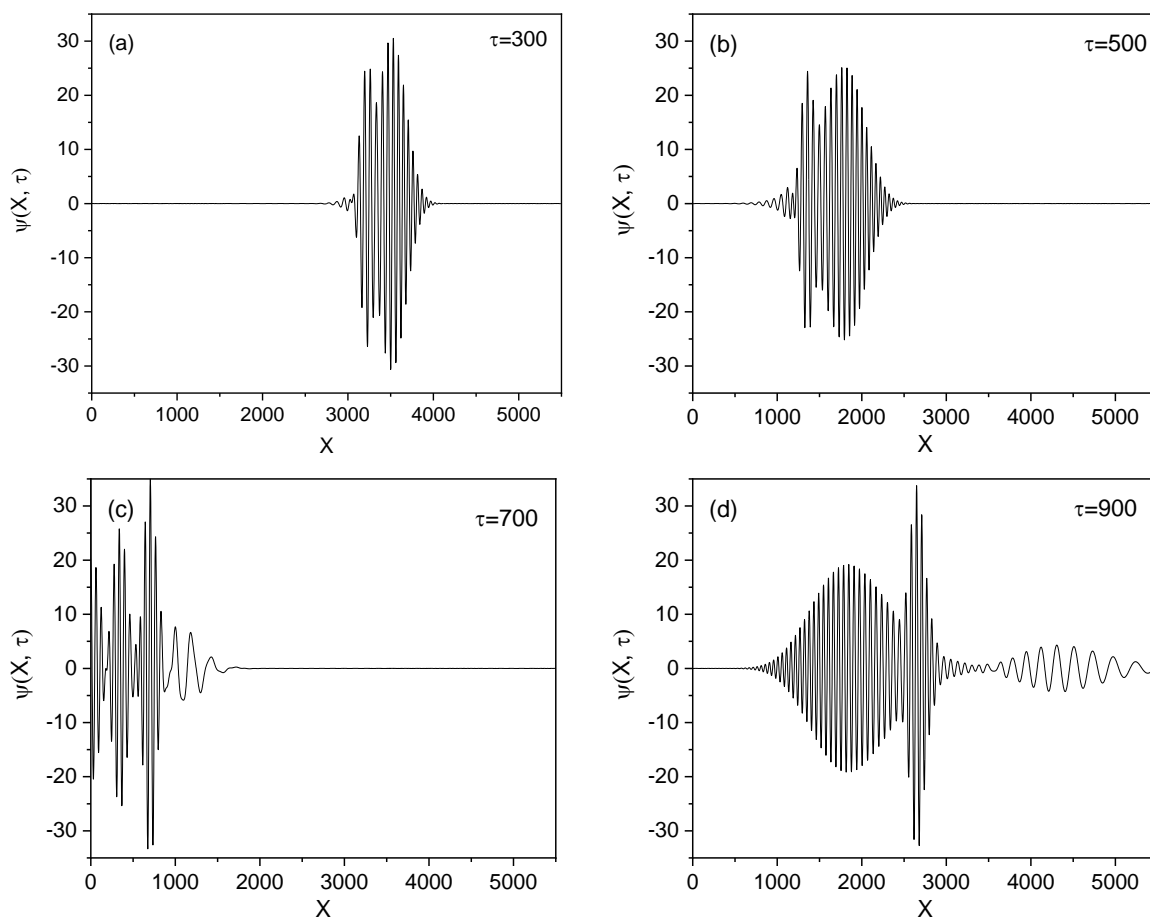


Рисунок 7: Просторові розподіли потенціалу в різні моменти часу при  $V_{vK} = 10$ .

Тепер збільшимо швидкість хвиль ван Кампена до  $V_{vK} = 20$ . Заважимо, що це все ще не резонансний випадок. В цьому випадку  $K = \frac{1}{20} = 0.05$ . Оскільки збільшилась швидкість  $V_{vK}$ , то і початкова координата імпульсу  $X_0$  теж збільшилась. На відміну від (Рис. 6), тепер групова

швидкість плазмонів  $V_g \approx 12.9$ , що помітно менше ніж  $V_{vK}$ . Тому ми бачимо, що початковий імпульс одразу розділяється на два імпульси, які рухаються з різними груповими швидкостями: попереду пакет ван Кампена, а позаду – пакет плазмонів. Зазначимо, що пакет плазмонів розширюється з часом через дисперсію (чим більший хвильовий вектор та частота, тим менша групова швидкість плазмона, тому хвилі з більшими частотами рухаються повільніше ніж хвилі з меншими частотами), тоді як для пакету хвиль ван Кампена групова швидкість не залежить від частоти чи хвильового вектору і його форма не змінюється. При відбитті також спостерігається додаткова хвиля, яка утворилася в результаті конверсії. Проте, групова швидкість цього пакету, як і раніше,  $V_g \approx 16.7$ , що менше за  $V_{vK} = 20$ . Тому тепер конвертований плазмон рухається не попереду як раніше, а між хвилею ван Кампена з  $V_{vK} = 20$  та плазмоном з  $V_g \approx 12.9$ .

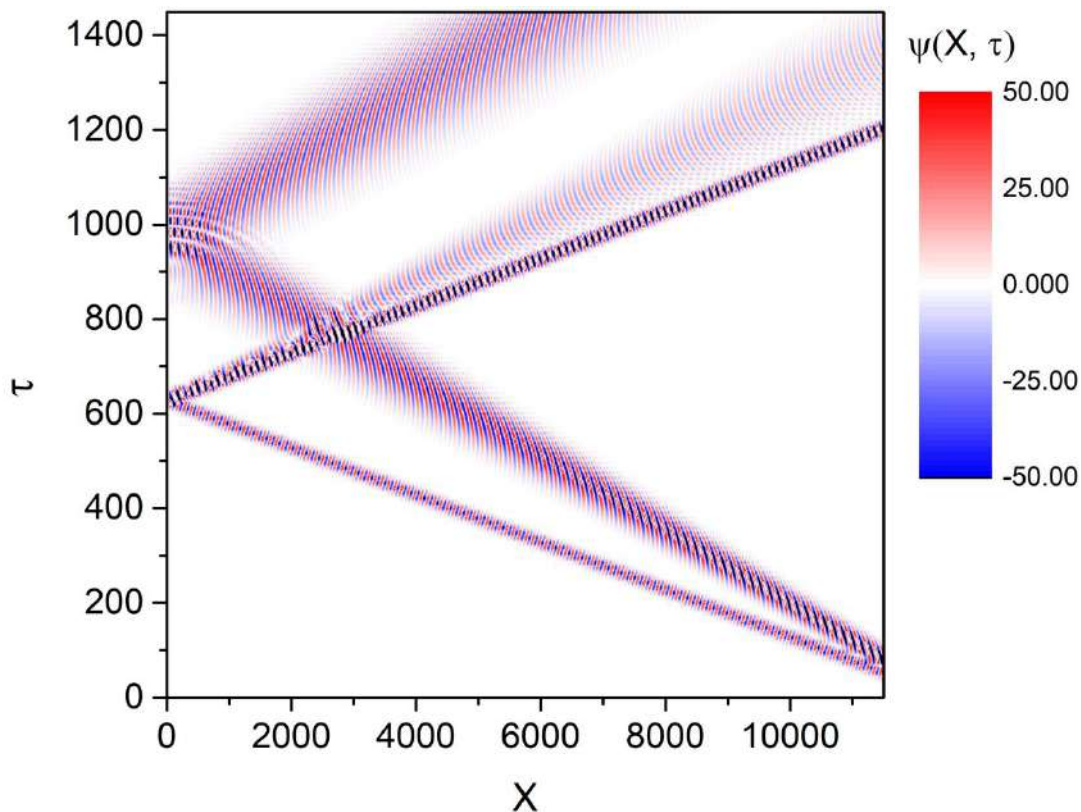


Рисунок 8: Просторово-часовий розподіл потенціалу при  $V_{vK} = 20$ .

На границі, як і раніше, помітна інтерференція хвиль, але тепер інтерференцію також можна спостерігати між падаючим плазмоном та конвертованим плазмоном приблизно при  $X \approx 3000$ .

На (Рис. 9) зображено потенціал у кілька моментів часу. Зокрема, при  $\tau = 400$  (а) можна бачити два пакети: попереду (ліворуч) пакет ван Кампена, а позаду пакет плазмонів. При  $\tau = 700$  (б) пакет ван Кампена уже відбився і поки зливається з конвертованим пакетом плазмонів, а падаючий пакет плазмонів ще не дійшов до границі. Звідси можна зробити висновок, що конвертація відбувається саме хвиль ван Кампена в плазмони, оскільки після відбивання падаючого пакету плазмонів нова хвиля не утворюється (див. Рис. 9(с)).

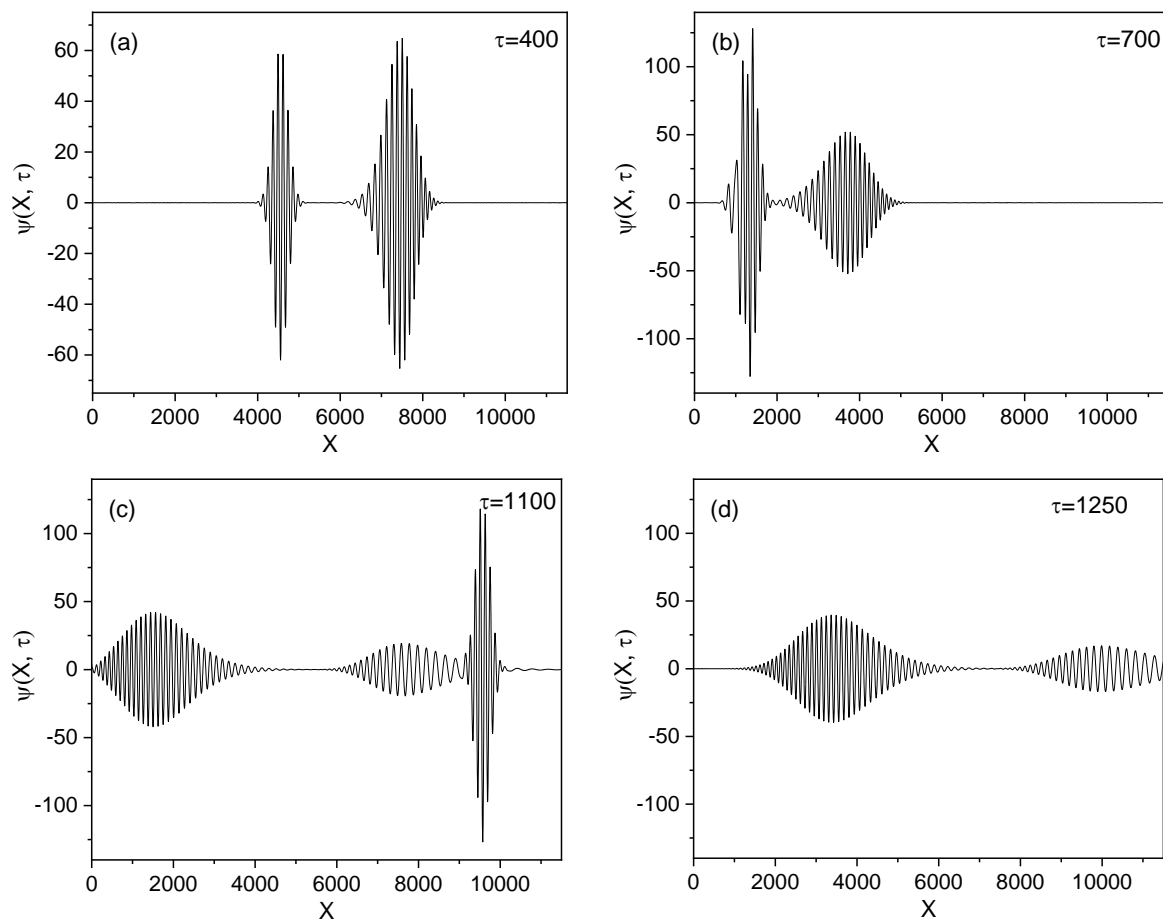


Рисунок 9: Просторові розподіли потенціалу в різні моменти часу при  $V_{vK} = 20$ .

Так при  $\tau = 1100$  (с) можна бачити три пакети: ліворуч відбитий плазмон ( $K = 0.05$ ), по центру конвертований плазмон, а праворуч пакет ван Кампена. При  $\tau = 1250$  (d) в нашому полі зору залишились тільки відбитий та конвертований плазмони.

Також, з (Рис. 9) можна бачити, що після відбивання пакету ван Кампена відбувається не тільки конвертація хвиль, а й амплітуда хвилі ван Кампена зростає майже у два рази. Це відбувається в наслідок взаємодії між електронами та хвилями, аналогічно до того, як продемонстровано на (Рис. 3): енергія від електронного пучка переходить у хвилі ван Кампена і конвертується у плазмони.

Нарешті, розглянемо випадок резонансу хвиль ван Кампена та плазмонів. Як зазначалось, в цьому випадку  $V_{vK}^{res} \approx 33.4$ . Групова швидкість плазмонів при цьому  $V_g \approx 16.7$  при  $K \approx 0.03$ . В попередній роботі [14], де розглядалася квантова яма без границь і плоскі хвилі (а не хвилеві пакети) в резонансі спостерігався лінійний ріст амплітуди коливань потенціалу, який відбувався внаслідок переходу енергії від додаткового пучка електронів до плазмонів. Тепер, застосовуючи більш складний підхід, ми змогли спостерігати в реальному часі та просторі цей ефект.

На (Рис. 10) показано просторово-часовий розподіл потенціалу в квантовій ямі в умовах резонансу між плазмонами та хвилями ван Кампена. Оскільки групова швидкість хвиль ван Кампена  $V_{vK}$  вдвічі більша за групову швидкість плазмонів, останні відстають від хвиль ван Кампена. Проте, цього разу, пакети не розділяються, а навпаки заповнюються коливаннями простір між собою. Це виглядає так, ніби один імпульс розширюються при розповсюдженні. Насправді ж відбувається перехід енергії від електронного пучка в плазмони, в результаті якого, після хвилі ван Кампена залишається хвіст, який заповнює простір між плазмонами та хвилями ван Кампена. Це можна бачити на (Рис. 11 (a), (b)).

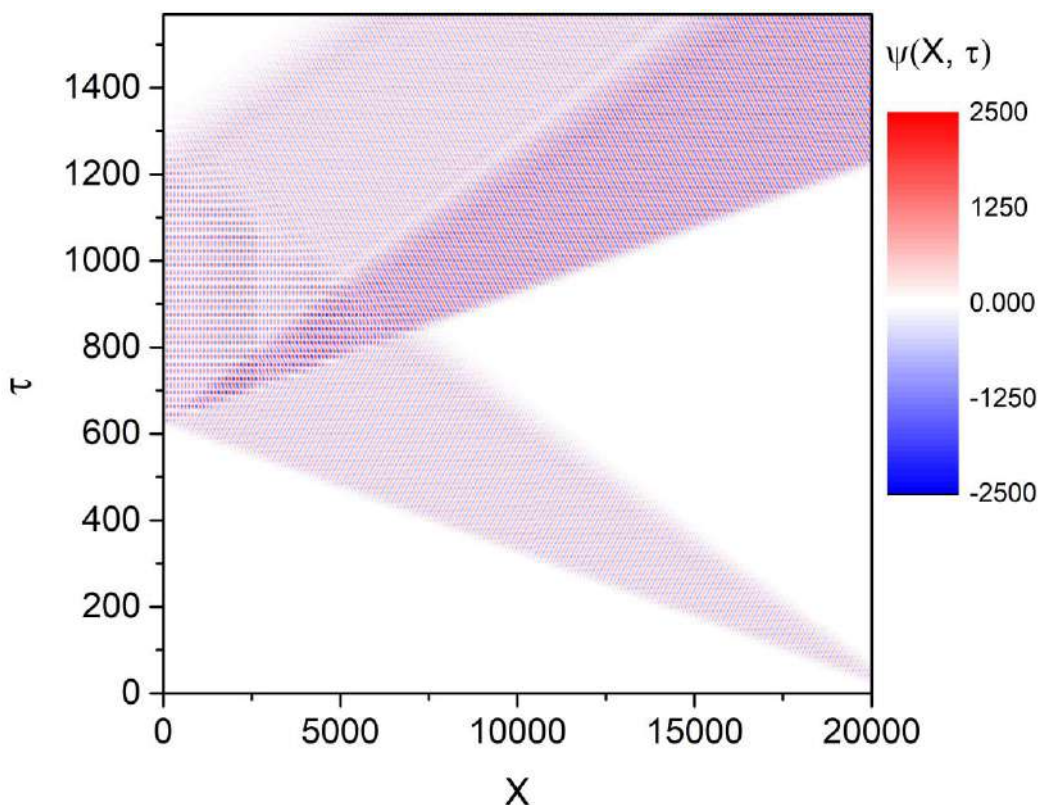


Рисунок 10: Просторово-часовий розподіл потенціалу при  $V_{vK}^{res} \approx 33.4$ .

Після відбивання хвилі ван Кампена від границі, знову відбувається конвертація в плазмони та збільшення амплітуди хвилі ван Кампена, проте ці плазмони мають такі ж хвильові вектори як і раніше, тому вони вкотре залишаються позаду хвиль ван Кампена (див. Рис. 11(c), (d)). Проте, хвиля ван Кампена зі збільшеною амплітудою тепер залишає позаду себе хвіст із більшою амплітудою плазмону, що можна бачити на (Рис. 11(d)). Дійсно, можна бачити попереду імпульс з більшою амплітудою, який складається з хвилі ван Кампена попереду, та плазмонним хвостом позаду. Далі, можна спостерігати плазмони з меншою амплітудою, які відбилися від границі без конвертації.

Наскільки нам відомо, отримана динаміка розповсюдження хвиль в двовимірній плазмі не розглядалася раніше. Квантова яма є унікальним об'єктом для дослідження такої динаміки, оскільки, наприклад, в графені, де розглядалися розповсюдження плазмонів біля границі [5-8], такі ефекти

неможливі. Дійсно, завдяки лінійному Діраківському спектру електронів графену, неможлива ситуація резонансу між плазмонами графену та хвилями ван Кампена [20].

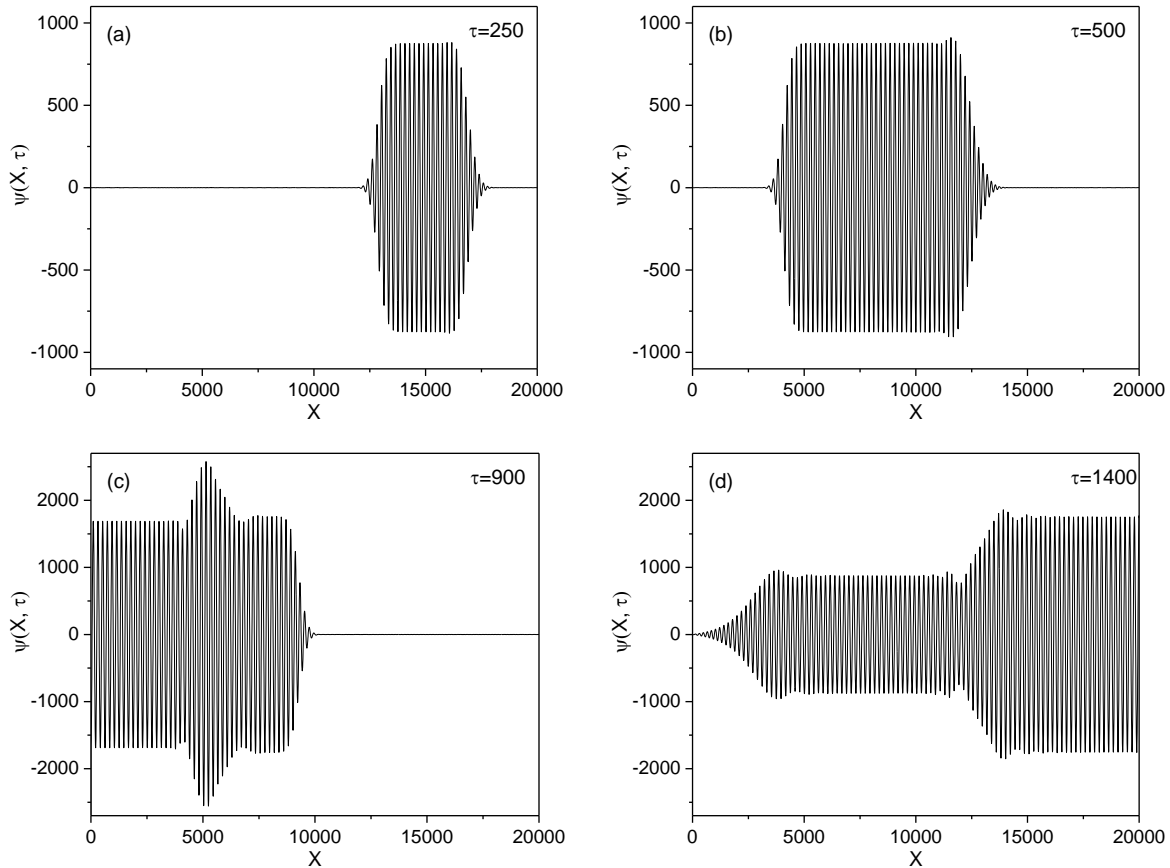


Рисунок 11: Просторові розподіли потенціалу в різні моменти часу при  $V_{vK}^{res} \approx 33.4$ .

## ВИСНОВКИ

В цій роботі було розглянуто коливання вільного електронного газу (плазмонів) та хвиль ван Кампена у області двовимірної квантової ями обмеженої границею.

1. Використовуючи методи дійсного та комплексного аналізу, ми зуміли показати, що Лаплас-Лаплас компонента потенціалу має вигляд дробу, в чисельник якого входить початкова та гранична

функція розподілу електронів за імпульсами, а нулі знаменника задають спектр плазмонів в системі.

2. Розглянули спектр плазмонів та описали фізичні причини загасання Ландау.
3. Продемонстрували розповсюдження пакету хвиль ван Кампена та плазмонів за різних значеннях швидкості додаткового пучка електронів.
4. У випадку, коли плазмони не в резонансі з хвилями ван Кампена, після відбивання хвиль від границі ми отримали та ідентифікували додатковий конвертований пакет плазмонів з хвильовим вектором, що відрізняється від центрального хвильового вектора початкового пакету.
5. В резонансному випадку хвиля ван Кампена розповсюджуючись залишає за собою плазмонний хвіст, який виникає внаслідок переходу енергії від електронного пучка до плазмонів.
6. Отримані ефекти можуть бути корисними для побудови генераторів та підсилювачів хвиль в ТГц діапазоні спектру.

## **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Davies J. H., The physics of low-dimensional semiconductors an introduction. (1998).
2. Maier S. A., Plasmonics: Fundamentals and Applications. (2007) .
3. Landau, L. On the vibration of the electronic plasma. (1946).
4. Donald A. Neamen, McGraw-Hill Education , "Semiconductor Physics and Devices: Basic Principles" (2018).

5. Fei Z., Gregory O. Andreev, Wenzhong B, Lingfeng M., Zhang, A. S., McLeod , Wang C., Margaret K., Zeng Zhao S., Dominguez G., Thiemens, Michael M., Fogler, Michael J. Tauber, Antonio H. Castro N., Chun N. L., Keilmann F., Basov D. N., Infrared Nanoscopy of Dirac Plasmons at the GrapheneSiO<sub>2</sub> Interface. (2011).
6. Fei Z., Rodin A. S., Andreev G. O., Bao W., McLeod A. S., Wagner M., Zhang L. M., Zhao Z., Thiemens M., Dominguez G., Fogler M. M., Castro N., Lau C. N., Keilmann F. & Basov D. N. v, Gate-tuning of graphene plasmons revealed by infrared nano-imaging. (2012).
7. Fei Z., Rodin A. S., Gannett W., Dai S., Regan W., Wagner M., Liu M. K., McLeod A. S., Dominguez G., Thiemens M., Antonio H. Castro N., Keilmann F., Zettl A., Hillenbrand R., Fogler M. M. and Basov D. N., Electronic and plasmonic phenomena at graphene grain boundaries (2013).
8. Fei Z., Andreev G. O., Bao W., Zhang L. M., McLeod A. S., Wang C., Stewart M. K., Zhao Z., Dominguez G., Thiemens M., Fogler M. M., Tauber M. J., Castro-Neto A., Lau C. N., Keilmann F., Basov D. N., Infrared nanoscopy of Dirac plasmons at the graphene-SiO<sub>2</sub> interface (2011).
9. Tonks, Lewi and Langmuir, Irving, Oscillations in Ionized Gases (1929).
10. Jammer, M., The Conceptual Development of Quantum Mechanics. New York: McGraw-Hill. (1966).
11. Kittel, Charles. Introduction to solid state physics. (2005).
12. Дороговцев А. Я., Д69 Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. (1993).
13. Массалітіна Є.В., Кільчинський О.О., Операційне числення. Теорія та методика розв'язування задач. (2018).
14. Пунько О.А., Вплив початкових умов на динаміку плазмонів у низьковимірних структурах. (2023).

15. Опейда Й., Швайка О., Глосарій термінів з хімії. (2008).
16. I. H. Hutchinson., Principles of Plasma Diagnostics, (2002).
17. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П., Загальний курс фізики: навчальний посібник. (2001).
18. Morse P.M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 147, Part 1 (1953).
19. Graczykowski B., The reflection of Rayleigh surface waves from single steps and grooves, J. Appl. Phys, 112, 103520 (2012)
20. Kukhtaruk S. M. and Kochelap V. A., Phys. Rev. B 92, 041409(R) (2015).