МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КЕРОВАНИХ МАРКОВСЬКИХ ПОЛІВ

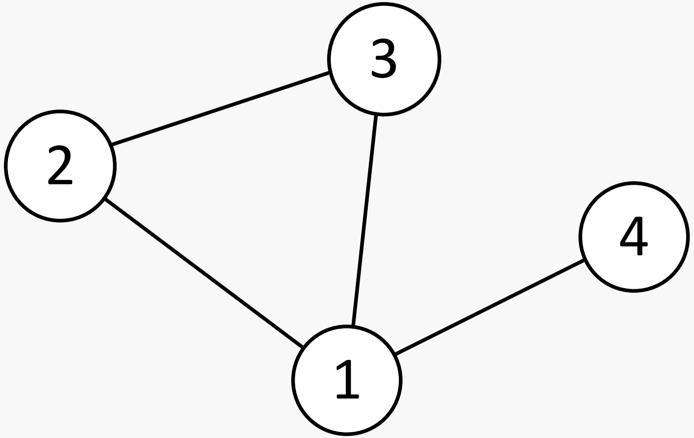
Магдич Назар

Мета

- Описати процес побудови моделей економічних процесів та пошуку оптимальних стратегій керування на скінченному горизонті.
- Розробити алгоритм пошуку оптимальних марковських стратегій на скінченному горизонті для вирішення прикладних задач з економіки.

Випадкове поле Маркова

$G = (V, B)$ – скінченний, ненаправлений граф;
V – множина вершин;
$B = \{(k,\ j)\}$ – множина ребер;
$N(k) = \{j : \{(k, j)\} \in B\}$ – окіл вершини k.
$\widetilde{N}(k) = N(k) \cup \{k\}$ – повний окіл вершини k.
$X_i = \{x_i\}$ – множина можливих станів вершини $i \in V$.
$X = \times_{i \in V} X_i$ – глобальний простір станів системи
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – ймовірнісний простір.



Марковський процес з локальною, синхронною взаємодією – випадкова величина ξ_k^t, що приймає значеннями з X_k визначена на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ просторі, що залежить від часу t, має локальні ймовірності переходу:

$$P\left(\xi_k^{t+1} = y_k \middle| \xi_{V-\{k\}}^t = x_{V-\{k\}}^t, \dots, \xi_{V-\{k\}}^0 = x_{V-\{k\}}^0\right) = P\left(\xi_k^{t+1} = y_k \middle| \xi_{\tilde{N}(k)}^t = x_{\tilde{N}(k)}^t\right);$$

Та має синхронні ймовірності переходу:

$$P(\xi_K^{t+1} = x_K^{t+1} | \xi^t = x^t) = \prod_{k \in K} P\left(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} \middle| \xi^t = x^t\right), \qquad K \subset V,\ \ x^t, x^{t+1} \in X;$$

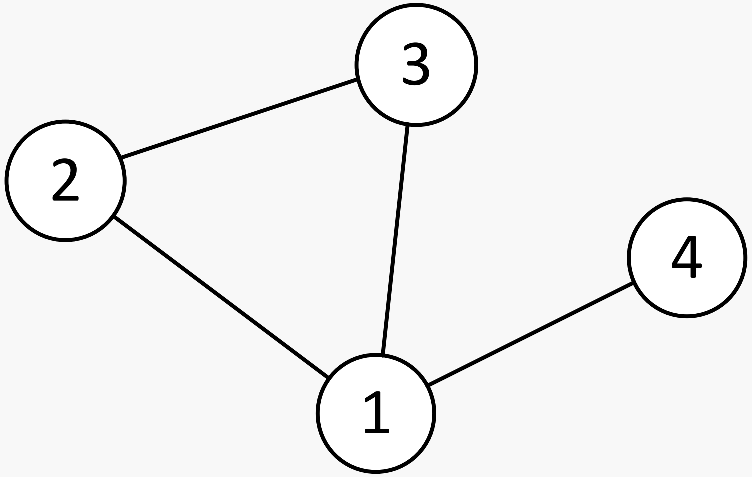
Керування

Марковське випадкове поле ξ;

$A_i = \{a_i\}$ – множина можливих дій в вершині $i \in V$.

$A = \times_{i \in V} A_i$ – глобальний простір можливих дій в системі.

Марковська локальна детермінована стратегія – відповідність δ_k між значенням випадкової величини $\xi^t_{\tilde{N}(k)}$ в повному околі вершини k та елементом a^t_k з множини можливих дій в вершині k;



Кероване марковське поле

Керований процес з локальною взаємодією на графі $G = (V, B)$ – пара (ξ, δ), де:

- $\xi = (\xi^t,\ t \in \mathbb{N})$ – марковський локальний процес з локальною взаємодією, з множиною станів $X = \times_{k \in V} X_k$.
- $\delta = \{\delta_k,\ k \in V\}$ – марковська локальна детермінована стратегія.

Існування оптимальної стратегії

Теорема [1]:

Для керованого процесу (ξ, δ) на графі $G = (V, B)$, зі скінченною множиною станів X та скінченною, незалежною від часу t множиною дій A, існує єдина оптимальна стратегія, що належить множині детермінованих локальних марковських стаціонарних стратегій .

[1] Ruslan K. Chornei Hans Daduna, Knopov Pavel S. Controlled Markov Fields With Finite State Space on Graphs // Stochastic Models. — 2005. — Vol. 21. — P. 1–28.

Процес побудови моделі

Для побудови моделі керованого процесу (ξ, δ) необхідно :

- Визначити структуру графа G.
- Визначити множини допустимих станів у вершинах X та допустимих рішень A.
- Визначити цільову функцію.

Модель має задовольняти обмеження:

- Множини станів та дій скінченні та обмежені.
- ξ - марковський процес з локальною, синхронною взаємодією.
- δ – марковська локальна стаціонарна детермінована стратегія.

Моделі з компактними множинами станів та дій.

Множина станів: $X_k = x_k = [x_{min},\ x_{max}]$;
Множина можливих дій: $A_k = a_k = [a_{min},\ a_{max}]$;

Дискретні відповідники неперервних проміжків надалі позначатимемо символом *:

Множина станів: $X_k^* = x_k^* \ = \ \{x_{min}, x_{min} + \Delta x, \ldots, x_{max} - \ \Delta x\ \ x_{max}\}$,
Множина можливих дій фірми: $A_k^* = \{a_{min}, a_{min} + \Delta a\ , \ldots,\ a_{max} - \Delta a,$
a_{max}

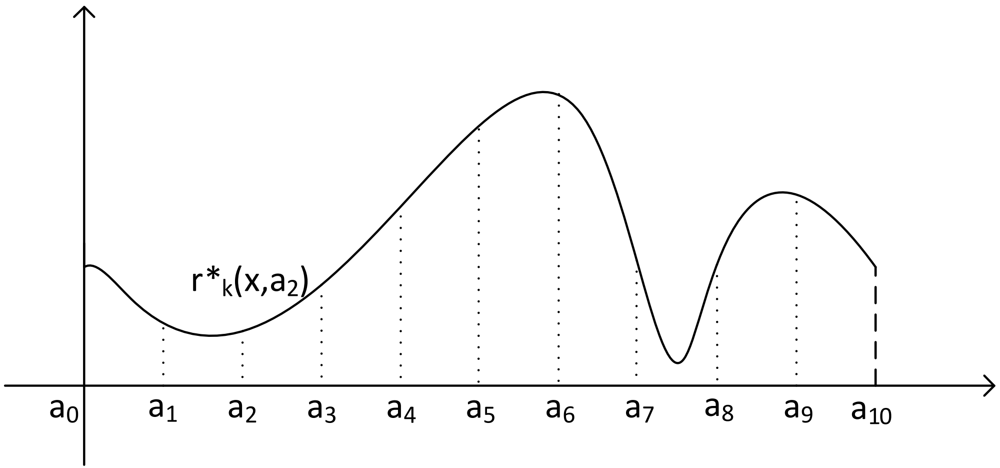
Нехай, функція однокрокових втрат $r(x,a)$ є відокремлюваною і задається наступним чином:

$$r(x,a) = \sum_{k\in V} r_k(x_{\widetilde{N}(k)}, a_k);$$

$r(x,a)$ має $2\cdot|V|$ аргументів у випадку повного графа G

Нехай однокрокова втрата для вершини k: $r_k(x_{\widetilde{N}(k)}, a_k)$, визначена на проміжку допустимих дій $A_k = [a_0, a_{max}]$, зображена на рисунку.

Визначимо функцію $r_k^*(x_{\widetilde{N}(k)}, a_k)$, на множині A_k^*, яка набуває свого найменшого в точці a_2.



Оптимальна стратегія керування на скінченному горизонті

Стратегія δ_y є оптимальною на скінченному горизонті T_0 за заданого початкового стану $y \in X$ якщо:

$$p_{T_0}(y) = \inf_{\delta \in LD_S} \left(Q_{T_0}^{\delta}(y)\right), \qquad Q_{T_0}^{\delta}(y) \text{ } - \text{ очікувані середні витрати.}$$

Або:

$$p_{T_0}(y) = \sup_{\delta \in LD_S} \left(Q_{T_0}^{\delta}(y)\right), \qquad Q_{T_0}^{\delta}(y) \text{ } - \text{ очікувана середня винагорода.}$$

$p(y)$ – значення, яке набуває оптимальна стратегія.

$Q_{T_0}^{\delta}(y) = E_y^{\delta} \frac{1}{1+T_0} \sum_{t=0}^{T_0} r(x, a);$

Пошук оптимальних стратегій.

- На нескінченному горизонті: “Policy Improvement Procedure”[1].
- На скінченному горизонті $T = T_0$: Метод оберненої математичної індукції.

[1] Derman C. Finite State Markovian Decision Processes. *Academic Press*: 1970, 39p.

Алгоритм пошуку оптимальних стратегій на скінченному горизонті

1) Обрахувати однокрокову винагороду на останньому кроці T: $r^T(x^T, a^T)$ для усіх можливих станів системи $x^T \in X$
2) Обрахувати суму однокрокової винагороду на попередньому кроці $T-1$ та очікуваної винагороди на кроці T. ẃонцвёоьо иц $\{a_k^{t-1}, k \in V\}$ є ч шщондчитьі ич цвпг цфі ѓ чҐчёцтьдвцчҐдоцвечщнио нв идв чъьвцццтщнто
3) В зворотньому порядку обраховувати очікувану винагороду, від кожного попереднього кроку $t = T - i,\ i = 1,2,\ldots,T$, до останнього кроку T. На кожній ітерації визначати дії $\{a_k^j, k \in V\}$ такі, що призводять до найбільшої очікуваної винагороди.
4) Пункт 3) алгоритму повторюється допоки $t \geq 0$.

Результат роботи алгоритму

Для кожного початкового стану $y \in X$ отримуємо послідовність дій в системі $\{a^t, t = 0,1,\ldots,T\}$ що призводять до найбільшого очікуваного виграшу при початковому стані y.

$$\sup_{\{a^t\} \in A^0 \times \ldots \times A^T} \left(r^0(y, a^0) + \sum_{t=1}^{T} E_y r^t(x^t, a^t)\right); \ (1)$$

Оскільки за означенням керованого марковського процесу з локальною взаємодією, ймовірності переходу системи є незалежними від часової змінної t, то послідовності дій $\{a^t\}$ можливо представити у вигляді стратегій δ_y

Дієвість алгоритму

$$\frac{\sup\limits_{\delta_y \in LD_S}\left(r^0(y,a^0)+\sum_{t=1}^{T} E_y r^t(x^t,a^t)\right)}{T+1} = \sup_{\delta_y \in LD_S}\left(\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} E_y^{\delta} r^t(x^t,a^t)\right) =$$

$$= \sup_{\delta_y \in LD_S}\left(\frac{1}{T+1} E_y^{\delta} \sum_{t=0}^{T} r^t(x^t,a^t)\right) = \sup_{\delta_y \in LD_S}\left(Q_T^{\delta}(y)\right);$$

Тому знайдена за допомогою алгоритму стратегія δ_y є оптимальною на скінченному горизонті T за початкового стану y.

Оцінка складності алгоритму

Загальна кількість обчислень в найгіршому випадку:

$$O(|X| + |X|^2|A| + T(|X||A|));$$

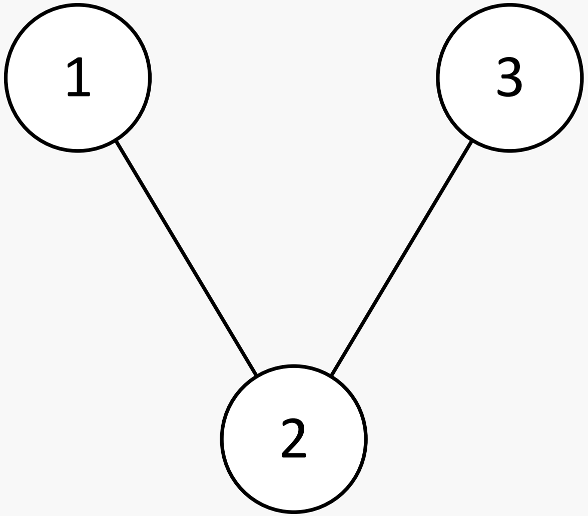
- $|X|$ - кількість обчислень однокрокової винагороди $r(x, a)$.
- $|X|^2|A|$ - кількість обчислень ймовірностей переходу системи між станами.
- $T(|X||A|)$ – кількість обчислень очікуваної винагороди від кроку t до останнього кроку T.

Числовий приклад задачі

Розглянемо числовий приклад задачі сформульованої в загальному вигляді в роботі [1]. Структура графа G зображена на малюнку.

- Множини станів: $X_k = \{-1,1\}$;
- Множини дій $A_k = \{\beta_1, \beta_2\}, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{4}$;
- Локальні ймовірності переходу між станами задані наступним чином [2]:

$$P(y_k | x_{\widetilde{N}(k)}) = \frac{e^{-\beta \sum_{\mathrm{j} \in N(k)} y_k x_{\mathrm{j}}}}{\sum_{k \in V} e^{-\beta \sum_{\mathrm{j} \in \widetilde{N}(k)} y_k x_{\mathrm{j}}}};$$



[1] David P. A., Foray D. Percolation Structures. Markov Random Fields, *The Economics and EDI Standards Diffusion*, Stanford University, 1992, 55p.
[2] Knopov P. S., Markov fields and their applications in economics. *Obchysljuvalna ta Prykladna Matematyka*, 1996, Vol. 80, 33–46p.

Функція винагород

Визначено функцію однокрокових винагород в момент часу t:

$$\mathrm{r}(x, a) = \sum_{i=1}^{n} \theta^t \cdot (-\alpha n_{x_k} + \gamma(x_k))$$

- $\theta = \frac{80}{100}$ – дисконт.
- $\alpha = \frac{1}{4}$ – коефіцієнт втрат через конкуренцію.
- n_{x_k} – кількість фірм, що знаходяться в стані x_k, тобто виробляють таку саму продукцію, $n_{x_k} = 1,2, \dots, |V|$.
- $\gamma(x_k)$ – дохід від продажу продукції x_k, задано наступним чином:

$$\gamma(x_k) = \begin{cases} \frac{7}{2}, & x_k = 1 \\ \frac{5}{2}, & x_k = -1 \end{cases};$$

Результат

Отримано локальну марковську детерміновану стаціонарну стратегію $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, що є оптимальною на скінченному горизонті $T = 10$.

$X_{\widetilde{N}(1)}$	δ_1	$X_{\widetilde{N}(2)}$	δ_2	$X_{\widetilde{N}(3)}$	δ_3
(-1,-1)	$\frac{1}{2}$	$(-1,-1,-1)$	$\frac{1}{2}$	(-1,-1)	$\frac{1}{2}$
(-1,1)	$\frac{1}{2}$	$(-1,-1,1)$	$\frac{1}{2}$	(-1,1)	$\frac{1}{2}$
(1,-1)	$\frac{1}{2}$	$(-1,1,-1)$	$\frac{1}{2}$	(1,-1)	$\frac{1}{2}$
(1,1)	$\frac{1}{4}$	$(-1,1,1)$	$\frac{1}{4}$	(1,1)	$\frac{1}{4}$
		$(1,-1,-1)$	$\frac{1}{2}$		
		$(1,-1,1)$	$\frac{1}{4}$		
		$(1,1,-1)$	$\frac{1}{4}$		
		$(1,1,1)$	$\frac{1}{4}$		

Висновки

Розглянуто керовані марковські поля, як інструмент моделювання економічних процесів. Визначено його недоліки, зокрема при моделюванні процесів, для яких множини станів та дій представлені як проміжки на числовій прямій, Запропоновано звуження задачі пошуку оптимальної стратегії до пошуку оптимальної стратегії на скінченному горизонті. Для цього введено визначення оптимальної стратегії на скінченному горизонті, запропоновано алгоритм пошуку такої стратегії, обґрунтувано його дієвість та оцінено складність обчислень. Сформульовано економічну задачу, для вирішення якої застосовано запропонований алгоритм.

Джерела

- Chornei R. K., Daduna H., Knopov P. S. Controlled Markov Fields with Finite State Space on Graphs, *Stochastic Models*. 2005. Vol. 21. 1–28p.
- Derman C. Finite State Markovian Decision Processes. *Academic Press*: 1970, 39p.
- Kauffman S. A. The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution. *Oxford University Press*, 1993, 734p.
- David P. A., Foray D. Percolation Structures. Markov Random Fields, The Economics and EDI Standards Diffusion – Center for Economic Policy Research, Stanford University, 1992. 55p.
- Knopov P. S., Some Applied Problems From Random Field Theory, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, Vol. 46, No. 1.
- Knopov P. S., Markov fields and their applications in economics. *Obchysljuvalna ta Prykladna Matematyka*, 1996, Vol. 80, 33–46p.