Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

освітній ступінь – магістр

на тему: **«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МОДИФІКАЦІЙ ВИБОРЧОЇ СИСТЕМИ ГОТЛОБА ФРЕГЕ»**

Виконала: студентка 2-го року навчання

освітньо-наукової програми «Прикладна математика», спеціальності 113 Прикладна математика

Сушарник Діана Вадимівна

Керівник: Олійник Б.В.,

Доктор фіз.-мат. наук, професор

Рецензент________________________

(прізвище та ініціали)

Магістерська робота захищена

з оцінкою ________________________

Секретар ЕК ____________________

«____» _________________ 20____ р.

Київ – 2021

Зміст

ВСТУП

Виборчі системи використовуються для прийняняття колективних рішень і є необхідною складовою демократії. На сьогоднішній день існує багато різновидів виборчих систем, кожній з якій притаманні певні властивості, що більш чи менш підходять під потреби ситуації, що вимагає голосування.

Тому кількість виборчих систем постійно зростає, а правила гри постійно вдосконалюються.

Система Готлоба Фреге оригінальна своєю ідеєю накопичувати голоси у часі, що мало би гарантувати більш справедливу частоту перемог представників політичних меншин. Тож розглянути цю систему і проексперементувати із її можливими модифікаціями є гарним полем для математичних роздумів.

Під час дослідження цієї теми я модифікувала виборчу систему Готлоба Фреге за допомогою методу голосування Борда на сталому електораті і дослідила, як змінилися властивості отриманої системи. Цей напрямок можна продовжувати розвивати, і модифікувати, наприклад, оригінальну систему Г. Фреге, ввівши вагові коефіцієнти. Відкритим питанням для дослілжень лишається також дослідження системи Фреге і її модифікацій на тільки на сталому електораті, а й з динамічними даними. Крім того, було б цікаво дослідити, чи метод Фреге гарантує кращий захист від маніпуляцій, ніж інші системи.

РОЗДІЛ 1: Основні поняття теорії систем голосування

1.1 Поняття системи голосування та виборчих правил

Голосування - це процедура, яку застосовують, коли потрібно прийняти колективне рішення, а консенсусу немає чи він не є очевидний. Зазвичай, учасники обирають із певного списку альтернатив (кандидатів).
Найбільш типово згадувати про голосування в контексті політичних перегонів чи прийняття законів в парламенті, адже без виборів та голосування була би неможлива демократія. Проте до нього вдаються у різних сферах життя: від визначення переможця конкурсу талантів - до прийняття адміністративних рішень радою директорів компанії.
Інтуїтивно, система голосування - це проста гра, де єдиною метою є виграш, а коаліції учасників гри розглядаються лише за тим, чи досить у них сили, щоб виграти. [2]

Математична теорія систем голосування в багатьох аспектах може бути зведена до теорії ігор, яка бере свій початок від класичної праці Дж. фон Неймана і О. Моргенштерна [1].
Нехай, маємо скінченну множину $V = \{v_1, \dots v_n\}$, елементи якої вважатимемо «виборцями» (учасники голосування, які віддають свій голос), а також множину «кандидатів» (доступних альтернатив, серед яких виборці обирають) $C = \{c_1, \dots c_n\}$. Найпростіша процедура голосування полягає в тому, що кожен виборців висловлюється «за» або «проти» одного з кандидатів. Системою голосування називають правило, яке визначає, чи прийняте рішення за результатами процедури голосування. Наприклад, правило простої абсолютної більшості - коли перемагає та альтернатива, що набрала найбільшу кількість голосів.

1.2 Основні різновиди систем голосування

Існує безліч систем голосування, усі вони відрізняються між собою за кількістю виборців, довжиною списку кандидатів, а також і самими процедурами підрахунку голосів та визначення переможця, тому що кожна система більш

придатна до тих чи інших ситуацій, що вимагають голосування.
Серед найбільш відомих:
- *Метод простої абсолютної більшості* - дозволяє брати участь у виборах одночасно $C \geq 2$ кандидатів, виборці віддають перевагу 1 кандидату в бюлетені, перемагає той, хто набрав 50% + 1 голос
- *Метод відносної більшості* - перемагає кандидат, що отримав більшість голосів, не зважаючи на відсоткову частку. Цим методом послуговується виборча система Готлоба Фреге, яка розглядається в цій роботі.
- *Бінарні методи.* Багатоетапні, і мають на меті голосування по парам альтернатив в ході декількох турів за принципом відносної більшості для визначення найбільш кращої альтернативи. Серед найбільш поширених - метод Кондорсе та процедура внесення поправок, що зараз застосовується Конгресом США. [7]
- *Метод відносної антибільшості* при якому виборцям пропонується голосувати навпаки, проти одного пункту в списку.
- *Метод схвального голосування*, за якого виборці можуть віддати кілька рівноцінних голосів одночасно кільком кандидатам
- Група *позиційних методів* голосування, за яких позиція кандидата у бюлетені впливає на розподіл балів, що враховуються при підрахунку результатів. А виборець може змінювати цю позицію, відповідно.

1.3 Метод підрахунку голосів Борда

Один з найвідоміших позиційних методів голосування - підрахунок Бордá (рейтингове голосування), названий так на честь Жана-Шарля де Бордá, співвітчизника та сучасника Кондорсе [3]. Бордá описував нову процедуру як вдосконалений варіант принципу відносної більшості. Метод Борда полягає у тому, що кожен виборець повинен розставити усі доступні в бюлетені альтернативи в порядку надання їм переваги. Бали кандидатам присвоюються на підставі позиції відповідного кандидата в бюлетені. За кожним бюлетенем кожен з n кандидатів, отримує від n до 1 балів за таким принципом: той, хто стоїть на першому місці, отримує n балів, наступний n-1, і т.д. Канидидат з найменшим пріоритетом отримує 1 бал.

Після збору бюлетенів бали кожного кандидата підсумовуються і вибори виграє той, хто отримав максимальну кількість балів. Підрахунок Борда часто використовується в деяких видах спорту, наприклад, в професійному бейсболі чи американському футболі. [7]

РОЗДІЛ 2: Виборчі системи із накопиченням голосів

2.1 Оригінальна система Г. Фреге

Більшість систем розглядають вибори як одиничну подію в часі, і наприкінці кожних виборів визначають переможця, на чому вибори можна вважати завершеними. Німецький математик та філософ Готтлоб Фреге (1848–1925) вбачав у цьому поле для подальшого вдосконалення систем голосування.

Він займався проблемою «справедливого» обрання парламентарів у Рейгстаг імперської Німеччини, до якого представники обирались раз на 5 років, і від кожного округу обирався свій парламентар. Система передбачала голосування за принципом абсолютної більшості всередині кожного з округів, за необхідності у 2 тури, якщо під час першого жоден з кандидатів не набирав потрібну кількість голосів. Г. Фреге припустив [5], що за наявної системи утискаються політичні меншини, адже кандидати, які представляють невелику групу виборців, є «непрохідними» і не мають шансів на перемогу.

Вчений вважав [5], що система була би більш справедливою, якби усі кандидати перемагали час від часу. При чому, пропорційно до того, яку частку електорату вони представляють. Він розглянув вибори, як низку регулярних подій t_1, t_2, …, t_n, пов’язаних між собою у часі, і запропонував, щоб голоси кандидатів, які взяли участь в одних виборах, не втрачалися до наступних - а накопичувалися, утворюючи так званий Стіменцаль (ориг. “Stimmenzahl”), або абсолютний особистий рейтинг кандидата, що бере участь у виборах регулярно. Він також пропонував після проведення кожної ітерації виборів знімати у переможця «плату за перемогу», що урізало би перевагу лідерів і давало би фору іншим кандидатам на наступниї виборах. Плата за перемогу, на думку Фреге, мала становити середнє арифметичне, округлене до цілої частини числа, від суми усіх балів, що «розігрувалися» між кандидатами в кожному турі виборів.

Фреге лише запропонував систему, він не формалізував її мовою математики, і не проводив, відповідно, математичного аналізу, чи є така система «справедливою». Це зробив у своїй праці інший вчений, Поль Харенштайн [4].

Відповідно до формулювань П. Харренштайна [4], ми маємо C - набір із $m \geq 2$ *кандидатів.* Вибори за оригінальною системою Г. Фреге проходять ітеративно, в певні моменту часу $t \geq 1$ під час кожної ітерації обирається свій переможець (ориг. *Representative)* repr (t). Позначимо n_t *кількість виборців*, що беруть участь у виборах в момент часу t. Під час кожних виборів виборцям надається бюлетень з усіма кандидатами, і вони віддають свою перевагу лише 1 з них, протягом кожного туру кандидат-переможець обирається більшістю голосів в цьому турі. Позначимо через π_j^t суму голосів, що набрав кандидат j на виборах в момент часу t. Нехай, усі виборці приходять на вибори і віддають свій голос за 1 з кандидатів. Маємо $n_t = \sum_{j \in C} \pi_j^t$.

Фреге працював із *сталим* або *фіксованим електоратом*, коли кількість виборців і кількість кандидатів, а також кількість голосів, що виборці віддають за певних кандидатів є константою, і не змінюється при інших t так, що якщо $n_t = n, \pi_j^t = \pi_j$ для всіх $j \in C$ і $t \geq 1$.

У кожному турі t виборчого процесу загальний бал σ_j^t обчислюється для кожного кандидата j на основі балів, отриманих на момент цих виборів π_j^t, і балів, отриманих на попередніх виборах. Кандидат, який отримав максимальний сукупний бал σ_j^t за на виборах t, визначається *переможцем* на цих виборах, тобто repr (t) = argmax $j \in C$ σ_j. У випадку рівної кількості голосів переможцем є кандидат, який стоїть вище у списку (лексикографічно). Формально ми визначаємо сукупний бал σ_j^t кандидата j в момент часу t індуктивно, щоб для кожного $t \geq 1$:

$\sigma_j^t = \pi_j^t$

$$\sigma_j^{t+1} = \begin{cases} \sigma_j^t + \pi_j^{t+1} - \lfloor \frac{1}{m} \sum_{k \in C} \sigma_k^t \rfloor \\ \sigma_j^t + \pi_j^{t+1}, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

$\lfloor \frac{1}{m} \sum_{k \in C} \sigma_k^t \rfloor$ - пропонувалась Фреге як ціна за перемогу, яку мав сплачувати переможець 1 раз, після своєї перемоги на виборах ітерації t. Це число було обране таким чином, що сукупні бали всіх кандидатів гарантовано залишатимуться невід'ємними у будь-який час.

2.2 Приклад виборів, проведених за оригінальною системою Фреге зі сталим електоратом

Розглянемо вибори, на яких маємо сталий електорат із десятьма виборцями $n_1 = n_2 \ldots = n_t = 10$, які обирають одного з 3 кандидатів a, b та c і віддають щоразу по 5, 3 та 2 голосів за кожного кандидата відповідно. У Таблиці 1 наведено значення σ_j^t для t = 1,. . . , 10.

При t=1 перемагає кандидат a, адже має максимальний σ_j^t. При t=2 кожен кандидат зберігає голоси, отримані ним при t=1, а також отримує нові голоси при t=2, які дорівнюють голосам при t=1 (за означенням сталого електорату). Таким чином, для кандидатів b та c сукупні оцінки в момент t=2 становлять 3 + 3 = 6 та 2 + 2 = 4 відповідно. Ціна за перемогу, що сплатив кандидат a t= 1, становить 3 = ⌊10 / 3⌋, її потрібно відняти при обрахуванні σ_a^2. Відповідно, σ_a^2 обчислюється як 5 + 5 - 3 = 7. Отже, при t = 2 кандидат a знову перемагає на виборах. Процедура виборів за таким принципом повторюється 10 разів.

time t	σ_a^t	σ_b^t	σ_c^t	*repr (t)*	$\lfloor \frac{1}{m} \sum_{k \in C} \sigma_k^t \rfloor$
1	5	3	2	a	3
2	7	6	4	a	5
3	7	9	6	b	7
4	12	5	8	a	8
5	9	8	10	c	9
6	14	11	3	a	9
7	10	14	5	b	9

8	15	8	7	a	10
9	10	11	9	b	10
10	15	4	11	a	10

Таблиця 1. Приклад оригінальної виборчої системи Г.Фреге зі сталим електоратом

Згідно пропозиції Г.Фреге, вибори є *справедливими*, якщо виконується умова *пропорційності:*

Для будь-якого нескінченного ряду переможців repr(1), repr(2)… repr(t_n), що були обрані за умов сталого електорату, частота перемог кожного кандидата $\rho_j(t)$ має бути пропорційною до його частки електорату, π_j: $\rho_j(t) = t\,\frac{\pi_j}{n}$

П. Харренштайн довів [4], що оригінальна система Г. Фреге не є пропорційною при малих значеннях n, а пропорційності (а отже, справедливості за Г. Фреге) вона досягає лише з 290-ї ітерації голосувань.

2.3 Модифікована система П. Харренштайна

Оскільки оригінальна система Г. Фреге не була досконалою з точки зору дотримання умов пропорційності - П. Харренштайн припустив, що її можна покращити, якщо допрацювати принцип, за яким знімається ціна за перемогу.

Як видно з прикладу, що проілюстрований в Таблиці 1, після певної ітерації виборів t ціна за перемогу стабілізується і приходить до граничного значення 10.

П. Харренштайн довів [4], що так відбувається за будь-яких вихідних умов системи за сталого електорату (незалежно від кількості кандидатів і виборців, розподілу голосів, тощо) і обчислив границю цієї ціни за перемогу = n_t

Як вирішення проблеми пропорційності вчений запропонував зробити ціну за перемогу константним значенням, що дорівнювало би $\sum_{k \in C} \sigma_k^t$ за кожної ітерації t.

Для наочної ілюстрації дотримання умов пропорційності цієї модифікації системи Г. Фреге розглянемо вибори зі сталим електоратом із десятьма виборцями $n_1 = n_2 \ldots = n_t = 10$, які обирають одного з 6 кандидатів a, b, c, d, e, та f віддають щоразу по 1, 1, 1, 1, 1 та 5 голосів за кожного кандидата відповідно. (Останній кандидат має очевидну перевагу, і за дотримання умови пропорційності має перемогти у виборах 5 разів при t = 10)

У Таблиці 2 наведено відповідні значення σ_j^t для t = 1,. . . , 10.

Для зручності система нормалізована, тож $\sum_{k \in C} \sigma_k^t = 1$, а $\sigma_a^t,\ \sigma_b^t,\ \sigma_c^t,\ \sigma_d^t,\ \sigma_e^t,\ \sigma_f^t$ = 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1 і 0.5 відповідно.

time t	σ_a^t	σ_b^t	σ_c^t	σ_d^t	σ_e^t	σ_f^t	*repr (t)*	$\lfloor \frac{1}{m} \sum_{k \in C} \sigma_k^t \rfloor$
1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	f	1
2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0	a	1
3	- 0.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5	f	1
4	- 0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0	b	1
5	- 0.5	- 0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	c	1
6	- 0.4	- 0.4	- 0.4	0.6	0.6	1	f	1
7	- 0.3	- 0.3	- 0.3	0.7	0.7	0.5	d	1
8	- 0.2	- 0.2	- 0.2	- 0.2	0.8	1	f	1
9	- 0.1	- 0.1	- 0.1	- 0.1	0.9	0.5	e	1
10	0	0	0	0	0	1	f	1

Таблиця 2. Ілюстрації дотримання умов пропорційності системи Г. Фреге, модифікованої П.Харренштайном

Як бачимо, на 10 ітераціях виборів кандидат f переміг 5 разів, а інші кандидати по 1 разу, що добре ілюструє дотримання умови пропорційності Фреге і такі вибори вважаються справедливими.

Доведення для загального випадку наводить Харренштайн в своїй роботі. [4][6]

РОЗДІЛ 3: Модифікація системи Г. Фреге із застосуванням підрахунку голосів Борда

Як перспективний напрямок дослідження П.Харренштайн зазначав [4], що оригінальну систему Г. Фреге можна поєднати із правилом підрахунку голосів Борда, і проаналізувати отриману систему, що ми і зробимо в цій роботі.

Розглянемо частковий випадок такої нової системи.

Нехай, як і П. Харренштайн в експериментах із системою Г. Фреге, маємо:

Фіксований електорат $n_t = 10$, множина кандидатів C = {a, b, c}, t = 10.

Крок 1. Опишемо процедуру першої ітерації виборів t_1:

Щоб вибори відбулись за правилом Борда, задамо усім виборцям порядок, у якому вони розташовують кандидатів у своєму бюлетені. Нехай, розподіл голосів за 1 місце в списку буде 5:3:2, як в прикладі, який досліджував П.Харренштайн. Решту вподобань 10 виборців приведемо у таблиці:

Бюлетень n	*1 місце*	*2 місце*	*3 місце*
1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	c	b
6	b	c	a
7	b	c	a
8	b	a	c
9	c	a	b
10	c	a	b

Табл. 3 Розподіл вподобань виборців за правилом Борда

Отже, частота, з якою кандидати займали певну позицію у бюлетенях, приведена в матриці:

N в бюлетені / *Кандидат*	*1*	*2*	*3*
a	5	3	2
b	3	4	3
c	2	3	5

Табл. 4 Матриця частотності розташування кандидатів на кожній позиції в списку виборчого бюлетеня

Оскільки n(C)= 3, кандидат, що зайняв 1 позицію в бюлетені, отримує 3 бали, 2 позицію - 2 бали, 3 - 1 бал, відповідно.

За результатами t_1 кандидати отримують відповідну кількість балів:

π_a^1 = 5x3 + 3x2 + 2x1 = 23;

π_b^1 = 3x3 + 4x2 + 3x1 = 20;

π_c^1 = 2x3 + 3x2 + 5x1 = 17.

Отже, наш фіксований електорат $n_t = 10$ розподілив свої вподобанння між кандидатами a, b і c як 23, 20 і 17 голосів за кожного відповідно.

Крок 2. Проведемо вибори за системою Фреге 14 разів за сталого електорату, вызначеного на Кроці 1. Обчислимо значення σ_j^t для кожного кандидата під час кожної ітерації виборів, визначимо переможців. Для обчислення значення *ціни перемоги* скористаємося формулою з оригінального методу Фреге.

time t	σ_a^t	σ_b^t	σ_c^t	*repr (t)*	$\lfloor \frac{1}{m} \sum_{k \in C} \sigma_k^t \rfloor$
1	13	20	17	a	20
2	26	40	34	b	33
3	49	27	51	c	42
4	72	47	26	a	48
5	47	67	43	b	52
6	70	35	60	a	55

7	38	55	77	c	56
8	61	75	38	b	58
9	84	37	55	a	58
10	49	57	72	c	59
11	72	77	30	b	59
12	95	38	47	a	60
13	58	58	64	c	60
14	81	78	21	a	60

Табл. 5 Оригінальна система Фреге, що задіяна на сталому електораті, визначеному за правилом Борда

Емпірично встановлюємо, що система Фреге, модифікована таким чином, стабілізує свою плату за перемогу до верхньої межі, яка не зможе більше рости із певної ітерації:

$$\lim_{t\to\infty} \lfloor \frac{1}{m} \sum_{k\in C} \sigma_k^t \rfloor = \sum_{j\in C} \pi_j^1$$

Ціна за перемогу стабілізується на значенні суми голосів, що були розіграні між кандидатами в 1 ітерації виборів.

Оскільки за вихідними умовами нашого прикладу у виборах брали участь 3 кандидати, загальна сума балів кожного бюлетеня становила 3+2+1 = 6 балів. За наявності 10 виборців $\sum_{j\in C} \pi_j^1$ = 10x6 = 60.

А ітерація стабілізації t наступає тоді, коли $\sum_{j\in C} \pi_j^t$ = n(C) x $\sum_{j\in C} \pi_j^1$.

Тобто в тому турі виборів, де сума голосів усіх кандидатів дорівнює їхній сумі голосів у 1 турі, помножену на кількість кандидатів. (В нашому випадку починаючи з t = 12 $\sum_{j\in C} \pi_j^t$ = 180 = 3x60.)

Дослідимо цю модифіковану систему на справедливість і пропорційність.

Не зважаючи на те, що нова система використовує формулу ціни за перемогу оригінальної системи Фреге - навіть на малих кількостях ітерацій виборів явної переваги не має жоден з кандидатів. Але ми спостерігаємо закономірний паттерн перемог:

a b c - a b - a c b - a c b - a c - a

що періодично змінює напрямок руху від a до c, і в зворотньому напряму, що вказує на щонайменше почерговість перемог кандидатів.

Ймовірно, система може не виявитись пропорційною, адже кандидати перемагатимуть по черзі.

Крок 3. Скористаємось програмним кодом П. Харренштайна [6], щоб перевірити частотність перемог на більшій кількості ітерацій t.

Емпірично встановлюємо, що нова модифікація системи на прикладі зі сталим електоратом з розподілом 23, 20, 17 голосів за кожного кандидата дозволяє перемогти рівно 23 рази кандидату a 20 кандидату b і 17 c відповідно за 60 ітерацій голосувань. Отже, можемо сказати, що вона також відповідає умові пропорційності, починаючи з ітерації t = $\sum_{j \in C} \pi_j^1$, а почерговий паттерн перемог кандидатів a, b, c є закономірним, адже 23:20:17 ≈ 1: 1: 1.

Введення правила Борда вплинуло на систему Фреге таким чином, що навіть за невеликої групи виборців (10 осіб) і за того ж самого розподілу вподобань щодо фаворитів (5:3:2 розподіл голосів щодо пріоритетного кандидата в бюлетені), решта (не-прохідних) кандидатів отримують бали, замість того, щоби просто програвати. Що нагадує своєю ідеєю підхід Готлоба Фреге у його системі.

Проте разом ці 2 системи «згладжують» політичні шанси на успіх кандидатів настільки, що кожен з них отримує рівні шанси на перемогу у перспективі.

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі розглянуто виборчу систему Готлоба Фреге і її модифікацію П.Харренштайном [4], а також запропоновано нову модифікацію на основі поєднання оригінальної системи Г. Фреге та правила голосування Борда [3]. Виявлено, що нова модифікована система Г. Фреге зберігає деякі властивості оригінальної системи щодо прямування «ціни за перемогу» до граничного значення, і також досягає строгої пропорційності в перемозі кандидатів лише після багатьох ітерацій проведення виборів. Дослідження може мати практичне використання для подальшого вдосконалення виборчого процесу і пошуку більш справедливих виборчих правил.

Список використаних джерел

1. Дж.фон Нейман, О. Моргенштерн «Теорія ігор та економічна поведінка», М., — вид. «Наука», 1970, 707 с
2. Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power, and Proof Springer-Verlag. Alan D. Taylor (1995) ISBN 0-387-94391-9 and 0-387-94500-8;[3] with Allison Pacelli: Taylor, Alan D.; Pacelli, Allison M. (2008). 2nd edition. ISBN 9780387776439.
3. Umberto Grandi, Andrea Loreggia, Francesca Rossi, Vijay Saraswat. A Borda Count for Collective Sentiment Analysis. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Springer Verlag, 2016, 77 (3), pp.281–302. ffhal-03165031f
4. A Mathematical Analysis of an Election System Proposed by Gottlob Frege. Paul Harrenstein Marie-Louise Lackner, Martin Lackner, 2020G.
5. Frege. Vorschläge für ein Wahlgesetz. In G. Gabriel and U. Dathe, editors, Gottlob Frege: Werk und Wirkung. Mit den unveröffentlichten Vorschlägen für ein Wahlgesetz von Gottlob Frege, pages 297–313. Mentis, 2000.
6. P. Harrenstein, M.-L. Lackner, and M. Lackner. A Python implementation of Frege's voting method, Apr. 2020. URL https://doi.org/10.5281/zenodo.3754113.
7. Стратегические игры. Доступный учебник по теории игр / Авинаш Диксит, Сьюзан Скит и Дэвид Рейли-младший ; пер. с англ. Н. Яцюк ; [науч. ред. А. Минько]. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2017. — 880 с.
8. A. Casella. Storable Votes: Protecting the Minority Voice. Oxford University Press, 2012.
9. D. S. Felsenthal and M. Machover. *The Measurement of Voting Power*. Edward Elgar Pub- lishing, 1998.
10. M. L. Balinski and H. P. Young. Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote. Yale University Press, 1982.