

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

**ШОСТА ВСЕУКРАЇНСЬКА КОНФЕРЕНЦІЯ
МОЛОДИХ ВЧЕНИХ
З МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

21–22 квітня 2017
Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Організаційний комітет

Голова: Олійник Богдана Віталіївна

Дрінь Світлана Сергіївна
Дяченко Сергій Миколайович
Лепеха Тетяна Сергіївна
Щестюк Наталія Юріївна

Дуденко Маргарита Анатоліївна
Крюкова Галина Віталіївна
Руссев Андрій Валерійович

Програмний комітет

Ванін Володимир Володимирович
Гончаренко Яніна Володимирівна
Горшков В'ячеслав Миколайович
Іванов Олександр Володимирович
Клесов Олег Іванович
Олійник Богдана Віталіївна
Працьовитий Микола Вікторович
Самойленко Ігор Валерійович
Торбін Григорій Мирославович
Швець Василь Олександрович

Глибовець Микола Миколайович
Горобець Юрій Іванович
Дудкін Микола Євгенович
Івасишен Степан Дмитрович
Локтев Вадим Михайлович
Петравчук Анатолій Петрович
Пилявська Ольга Степанівна
Сиротюк Володимир Дмитрович
Чорней Руслан Константинович
Шут Микола Іванович

Секції

Секція 1.

Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь
Керівник: Клесов Олег Іванович

Секція 2.

Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу
Керівник: Працьовитий Микола Вікторович

Секція 3.

Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики
Керівник: Олійник Богдана Віталіївна

Секція 4.

Фізики та математичної фізики

Керівники: Івасишен Степан Дмитрович, Шут Микола Іванович

Секція 5.

Методики навчання математики і фізики

Керівники: Вірченко Ніна Опанасівна, Сиротюк Володимир Дмитрович

Зміст

Секція 1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь	9
<i>V. O. Drozdenko</i> Approximations of aggregate claim amounts of insurance companies by hermitian polynomials	9
<i>K. I. Khainatska</i> Application package for research and vizualization attractors of some dissipative dynamic systems.....	10
<i>O. O. Sukhorukova</i> Generalized γ -generating matrices and Nehari-Takagi problem .	11
<i>V. O. Voloshyna</i> On some properties and applications of W^n representation	12
<i>Д. А. Волошин</i> Алгебраическая липшицевость и субдифференциальное исчисление в векторных пространствах	14
<i>Н. В. Дивляш</i> Відстані Кульбака — Лейблера, Хелінгера та χ^2 між розподілом салемівського типу та рівномірним розподілом.....	16
<i>С. В. Донецький</i> Клас функцій AC	17
<i>М. Є. Дудкін, О. В. Ковальова</i> Обернена матриця типу Якобі відповідна сильній проблемі моментів Гамбургера	18
<i>Т. О. Єр'оміна</i> Дослідження властивостей неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку	19
<i>Т. О. Заболотько</i> Про класи існування розв'язків задачі Коші для одного параболического рівняння зі зростаючими коефіцієнтами.....	21

<i>В. В. Кусій</i>	
Асимптотична поведінка випадкового блукання	22
<i>О. Є. Лагодзінський</i>	
Генерація поля Ченцова за розкладом Хаара	23
<i>Є. І. Лемешко</i>	
Існування компромісних станів у складних динамічних системах з притягальною взаємодією	24
<i>О. В. Маляр</i>	
Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні	25
<i>К. Ю. Матюшина</i>	
Дослідження параметрів якості систем масового обслуговування	26
<i>М. П. Мороз</i>	
Про розподіл значень однієї ніде не монотонної та майже скрізь недиференційовної функції	27
<i>К. Р. Острійчук</i>	
Спосіб генерування стаціонарних випадкових полів з обмеженим спектром	28
<i>А. Г. Островська</i>	
Про числа Фібоначчі з однаковою кількістю цифр	29
<i>С. П. Ратушняк</i>	
Розподіл значень функцій з фрактальними властивостями, означених в термінах Q_2 -зображення чисел	30
<i>Н. В. Рогова</i>	
Про застосування просторів Хермандера до деяких напівднорідних еліптичних крайових задач	31
<i>О. В. Свинчук, М. В. Працьовитий</i>	
Одна сім'я неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями	32
<i>В. О. Сіренко</i>	
Детермінований хаос у системі «бак з рідиною — джерело збудження»	33

І. І. Сіренька, О. А. Тимошенко

Підсилений закон великих чисел для розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь 34

О. В. Слуцький

Про пакувальну довірчість деяких сімейств множин 35

Є. О. Стрій

Практичне знаходження статистичних закономірностей послідовностей елементів скінченної множини 36

Н. І. Турчина

Про одну модельну крайову задачу 37

Л. М. Чубик

Дослідження ймовірності помилки при класифікації методом найближчого сусіда 38

Секція 2. Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу 39

І. І. Гарко

Про нові достатні умови довірчості систем циліндрів Q^* -зображення для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку 39

І. В. Замрій, Н. А. Василенко

Властивості однієї сім'ї функцій, визначених в термінах Q_7 -зображення дійсних чисел 40

Є. І. Калашнікова

Деякі функції, пов'язані з розкладом дійсних чисел в знакододатний ряд Лյурота 41

І. М. Лисенко

Однопараметричне раціональне Q_∞ -зображення і його застосування 42

М. Л. Лупайн

Про нові фрактальні феномени, пов'язані з розподілами випадкових величин з незалежними GLS-символами 43

<i>В. П. Маркітан</i>	
Фрактальні властивості множин, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею.....	44
<i>Ю. П. Маслова, М. В. Працьовитий</i>	
Трійковий аналог функцій Радемахера та його узагальнення	45
<i>І. С. Мороз</i>	
Про одну параметричну сім'ю неперевних функцій з фрактальними властивостями	46
<i>О. Р. Сатур</i>	
Граничні розподіли дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією	47
<i>О. В. Сміян, Г. М. Торбін</i>	
Про необхідні і достатні умови фрактальної довірчості сімейств циліндрів Q_∞ -зображення	49
<i>А. С. Чуйков, М. В. Працьовитий</i>	
Аналог Трибін-функції, означеної у термінах ланцюгових та нега-трійкових дробів	50
Секція 3. Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики	51
<i>О. V. Grytsenko, S. V. Karpa</i>	
Dropout as a Bayesian Approximation.....	51
<i>S. O. Kozerenko</i>	
Markov graphs of linear and metric maps on trees	52
<i>G. V. Kriukova</i>	
On the Robustness of Kernel Principal Component Analysis.....	53
<i>N. O. Lugovska</i>	
On the commuting graphs of unitriangular matrix groups	54
<i>Т. Л. Войтович</i>	
Система підтримки рішень на прикладі побудови аналітичного регіонального сервісу	55

<i>А. С. Волос</i>	
Різні групоїди на множині елементів узагальненої послідовності Фібоначчі	56
<i>М. А. Дуденко</i>	
Уніциклічні графи метричної розмірності 2 з двома основними вершинами	57
<i>І. З. Журавель</i>	
Алгоритми розв'язання задач великої розмірності з розрізною матрицею на прикладі моделі Леонтьєва — Форда ..	58
<i>О. О. Кураченко</i>	
Розширення дилеми в'язня з повторенням	59
<i>В. І. Мороз</i>	
Борелівські ігри оптимального знаходження у стані	60
<i>В. В. Мусієнко</i>	
Системи підтримки рішень в управлінні трудовими ресурсами	61
<i>В. А. Ольшевська</i>	
Комутатори силовських 2-підгруп знакозмінних груп	62
<i>М. С. Ольшевський</i>	
Відстані в графах Келі знакозмінних груп	63
<i>Н. Д. Полтавець</i>	
Про двовимірні неабелеві алгебри Лі диференціювань	64
<i>А. С. Пономарчук</i>	
Генерація зображень за допомогою CNN та GAN	65
<i>Б. С. Пономарчук</i>	
Нескінченні узагальнення просторів Хемінга	66
<i>В. А. Прохорчук</i>	
Декомпозиція автоматів і елементарні матриці	67
<i>А. О. Санжаровська</i>	
Кольорова задача про Ханойські вежі	68
<i>Ю. В. Співак</i>	
Інвестиційні процеси максимізації прибутку	69

<i>А. С. Флоренко</i>	
Мінімаксні оцінки функціоналів від випадкових полів, що спостерігаються на «перфорованій» площині.....	71
<i>Р. С. Яворський</i>	
Властивості періодичних біотопних просторів	73
<i>Д. А. Ярмоленко</i>	
Коаліційні ігри з локальною взаємодією	74
Секція 4. Фізики та математичної фізики.....	75
<i>М. С. Новак</i>	
Аналіз розрахункових методів визначення теплового стану будівельних сталевих конструкцій при пожежі	75
<i>О. В. Палій</i>	
Застосування методу Лежандра — Гауса — Лобатто для задачі оптимального керування.....	76
Секція 5. Методики навчання математики і фізики	77
<i>Т. О. Бойчук</i>	
Математичні методи і моделі в економіці	77
<i>В. О. Горбачук</i>	
Використання хмарних сервісів у навчанні математичної статистики	78
<i>О. І. Охотіна</i>	
Методичні вимоги до організації проектного навчання математики	79
<i>М. І. Парчук</i>	
Використання елементів STEM-освіти у навчанні математичних дисциплін майбутніх учителів фізики.....	80
<i>О. С. Сушко</i>	
Використання теорії графів на уроках математики	81
Показчик.....	82

V. O. Drozdenko

Approximations of aggregate claim amounts of insurance companies by hermitian polynomials

 Bila Tserkva National Agrarian University, Bila Tserkva.

Let $f(x)$ be defined on $[0, +\infty)$. Let also $w(x) > 0$ for $x \in [0, +\infty)$ be a continuous function such that $\int_0^{+\infty} \pi(x)w(x)dx$ exists for any polynomial $\pi(x)$. Let $\pi_0(x), \pi_1(x), \pi_2(x), \dots$, be a sequence of the orthogonal polynomials (exist a plenty of recursive algorithms for obtaining of such sequences) with respect to the weight function $w(x)$, i.e.,

$$\int_0^{+\infty} \pi_i(x)\pi_j(x)w(x)dx = 0, \quad \text{for } i \neq j,$$

here $\pi_l(x)$ is a polynomial of the degree l .

Under quite regular assumptions, for details textbooks on real analysis can be checked, one gets the following expansion

$$f(x) = K_0\pi_0(x)w(x) + K_1\pi_1(x)w(x) + \dots + K_n\pi_n(x)w(x) + \dots, \quad (1)$$

here coefficients K_i , for $i = 0, 1, 2, \dots$, are calculated as follows

$$K_i = \frac{1}{a_i} \int_0^{+\infty} \pi_k(x)f(x)dx, \quad \text{where } a_i := \int_0^{+\infty} \pi_k^2(x)w(x)dx.$$

This means that K_i is a linear combination of the first i moments of function $f(x)$. In the case when $f(x)$ is probability density function of the aggregate claim amount S , one may also write $K_i = a_i^{-1}E[\pi_i(S)]$.

Truncating expansion (1), one gets an approximation for the density function $f(x)$ of the aggregate claim amount S involving only first N moments of the random variable S , namely

$$f(x) \approx K_0\pi_0(x)w(x) + K_1\pi_1(x)w(x) + \dots + K_N\pi_N(x)w(x).$$

In this way many well established approximations of the aggregate claim amounts (for example, total amount of the annual claims) can be derived, in particular, Bowers' gamma function approximation, Gram—Charlier approximation, Edgeworth approximation, Esscher approximation, Normal I and Normal II approximations, etc.

- [1] Gerber H. U. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education. — 1979. — 164 p.

E-mail: ✉ drozdenko@yandex.ru.

K. I. Khainatska

**Application package for research and vizualization
attractors of some dissipative dynamic systems**

 National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv.

A package of applied programs for research and visualization of regular and chaotic attractors of some dynamic systems was developed. With the help of the developed package it is possible to visualize the nonlinear dynamics of systems of Lorenz and Rossler, and also dynamics nonideal systems “pendulum—electric motor” [1] and “tank with liquid—electric motor” [2].

The package allows you to build and visualized on a computer screen the following characteristics of attractors: phase portrait, Lyapunov’s characteristic exponents, Poincare cross-section and distribution of natural invariant measure of phase portrait of attractor. For construction of such parameters using a technique developed in [3].

- [1] Shvets A. Yu., Makaseyev A. M. Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, 2012, No 1, p. 195–204.
- [2] Krasnopol’skaya T. S., Shvets A. Yu. Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank // Soviet Applied Mechanics. - 1990, vol. 26, No 8, p. 787–794.
- [3] Krasnopol’skaya T. S., Shvets A. Yu. Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation - RCD, Mos. - Izh., 2008, 280 p.

E-mail: ✉ yutaraven@gmail.com.

O. O. Sukhorukova

Generalized γ -generating matrices and Nehari-Takagi problem

 National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv.

Let $\Gamma(f)$ be the block Hankel matrix of negative Fourier coefficients of a matrix valued function (mvf) $f \in L_\infty^{p \times q}(\mathbb{T})$ defined on the unit circle $\mathbb{T}$.

Nehari-Takagi problem $NTP_\kappa(f_0)$ (see [1]): Given a mvf $f_0 \in L_\infty^{p \times q}$ describe the set

$$\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \{f \in L_\infty^{p \times q} : \text{rank}(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)) \leq \kappa \text{ and } \|f\|_\infty \leq 1\}. \quad (1)$$

Definition. [2] Let $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ denote the class of $m \times m$ mvf's $\mathfrak{A}(\mu)$ on $\mathbb{T}$ of the form

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix},$$

with blocks a_{11} and a_{22} of size $p \times p$ and $q \times q$, respectively, such that:

- (1) $\mathfrak{A}(\mu)$ is a measurable mvf on $\mathbb{T}$ and j_{pq} -unitary a.e. on $\mathbb{T}$;
- (2) the mvf's $a_{22}(\mu)$ and $a_{11}(\mu)^*$ are invertible for a.e. $\mu \in \mathbb{T}$ and the mvf $s_{21}(\mu) = -a_{22}(\mu)^{-1}a_{21}(\mu) = -a_{12}(\mu)^*(a_{11}(\mu)^*)^{-1}$ is the boundary value of a mvf $s_{21}(\lambda)$ that belongs to the class $\mathcal{S}_\kappa^{q \times p}$;
- (3) $a_{11}(\mu)^*$ and $a_{22}(\mu)$, are the boundary values of mvf's $a_{11}^\#(\lambda)$ and $a_{22}(\lambda)$ that are meromorphic in $\mathbb{T}$ and, in addition, $a_1 := (a_{11}^\#)^{-1}b_r \in \mathcal{S}_{out}^{p \times p}$, $a_2 := b_\ell a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q \times q}$, where b_ℓ, b_r are Blaschke-Potapov products of degree κ , determined by Krein-Langer factorizations of s_{21} .

Theorem. [2] Let $f_0 \in L_\infty^{p \times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\kappa_1 := \nu_-(I - \Gamma^*\Gamma)$. Then the set of solution of Nehari-Takagi problem was parameterized by the formula

$$f(\mu) = T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon] = (a_{11}(\mu)\varepsilon(\mu) + a_{12}(\mu))(a_{21}(\mu)\varepsilon(\mu) + a_{22}(\mu))^{-1}, \quad (2)$$

where $\mathfrak{A}(\mu) = (a_{ij}(\mu))_{i,j=1}^2 \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ and $\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \bigcup_{k=\kappa_1}^\kappa T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}_{k-\kappa_1}^{p \times q}]$.

- [1] V. M. Adamyan, D. Z. Arov, M. G. Krein, Analytic properties of the Schmidt pairs of a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem, *Matem. Sb.* **86** (1971), 34–75.
- [2] V. Derkach, O. Sukhorukova, Generalized γ -generating matrices and Nehari-Takagi problem, submitted to *Operators and Matrices*.

E-mail: ✉ alena.dn.ua@rambler.ru.

V. O. Voloshyna

On some properties and applications of W^n representation National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv.

Our main goal in this work is to describe the main properties of W^n -representation of points from unit hypercube and to show basic applications of this representation at probability theory. The main result of our research is criteria of pure absolute continuity and pure discreteness of distribution of random variable with independent symbols of W^n -expansion.

The target of our research is description of special subclass of Jessen-Wintner type random variables, which are represented in terms of W^n -expansion. Our work includes new results in identifying of distribution type of this class. The main problem in researching of Jessen-Wintner type random variables is to designate the type of distribution for random variable ξ :

$$\xi = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots). \quad [1] \quad (1)$$

Here $\xi_i, i \in N$ are independent discrete random variables, F is function with numbered quantity of arguments.

Because of complexity of this problem the best way to deal with it is to split it into few parts. Our main task is to receive information about distribution of random variable where function F is equivalent to W^n -expansion with symbol ξ_i on position i .

Let us have the unit n -dimensional hypercube $E^n = [0, 1]^n$. W^n -representation of E^n is result of iterative process which can be received using following algorithm.

1) Let us divide the E^n into r parts (closed in R^n) which don't intersect. Lebesgue measure of new sets $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{r-1}$ will be $q_0, q_1, \dots, q_{r-1}$ respectively.

2) After that each set Δ_i is divided analogically into parts $\Delta_{i0}, \dots, \Delta_{i[r-1]}$. The proportion of participles' measures remains invariant. After the second stage process continues and each set $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ is divided using the same rule.

So we received n -dimensional analog of the Q -distribution of real numbers.

Let us define the random variable with independent symbols of W^n representation.

Definition. Random variable η with independent symbols

$$\alpha_k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$$

(with probability $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{[r-1]k}$ respectively) in W^n -expansion:

$$\eta = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots) \quad (2)$$

we will name η the random variable with independent symbols of W^n -representation.

Following type of random variables has properties which are represented in theorem 1, 2 [2].

Theorem 1. *If the product of maximum probabilities for each step is infinite*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = \infty$$

then distribution of certain random variable η (2) will be pure discrete.

Theorem 2. *If the infinite product (3) don't converges to zero*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{p_{ik} q_i} \right) > 0. \quad (3)$$

then the distribution of random variable η will be absolutely continuous (relatively to Lebesgue measure).

- [1] Alberverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G. Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions *Mathematische Nachrichten*, Vol. 279 (2006), No. 15, 1619–1633.
- [2] Voloshyna V. Properties and applications of W^n representation of points from unit hypercube. (in addition, TMS)

E-mail: ✉ wictorria@gmail.com.

Д. А. Волошин

Алгебраическая липшицевость и субдифференциальное исчисление в векторных пространствах

 УНК «Институт прикладного системного анализа», Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев.

В данной работе показано, что каждая выпуклая функция с непустой относительной алгебраической внутренностью своего эффективного множества является в некотором смысле липшицевой и имеющей непустой субдифференциал. Это отличается от известных результатов тем, что на выпуклую функцию не накладываются никакие топологические ограничения. Для построенного субдифференциала доказаны все стандартные алгебраические и топологические свойства, а также правила вычисления.

Для того чтобы гарантировать, что субдифференциал выпуклой функции не пуст, на такую функцию необходимо накладывать топологические ограничения. Известные ограничения можно найти в работах Amara и Ciligot-Travain [1], Brøndsted и Rockafellar [2], Laghdir [3], Moussaoui и Volle [4], Simons [5] и в монографии Zălinescu [6]. В данной работе предложен подход построения всегда непустого субдифференциала выпуклой функции *без наложения топологических ограничений*.

Пусть X есть векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ есть собственная выпуклая функция. Напомним, что *эффективным множеством* $\text{dom } \varphi$ собственной выпуклой функции называется множество тех точек, в которых она принимает конечные значения; *относительной алгебраической внутренностью* эффективно-го множества называется множество вида

$$\text{icr dom } \varphi := \{x \in \text{dom } \varphi : \text{для каждого } y \in \text{span}(\text{dom } \varphi - \text{dom } \varphi) \\ \text{существует } t > 0 \text{ такое, что } x + ty \in \text{dom } \varphi\},$$

где разница множеств есть их поэлементная алгебраическая разность, а span обозначает взятие линейной оболочки. *Идея состоит в следующем*. Предположим, что $\text{icr dom } \varphi$ не пусто. Выберем какую-либо точку $x_0 \in \text{icr dom } \varphi$, число $A \geq \varphi(x_0)$ и рассмотрим множество

$$C_A := \{x \in X : \varphi(x) \leq A\}.$$

Такое множество выпукло, причем $C_A - x_0$ является симметричным (т.е. $C_A - x_0 = -(C_A - x_0)$). Рассмотрим *функционал Минковского*

множества $C_A - x_0$, т.е. отображение $\mu : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенное соотношением

$$\mu(x) := \inf\{t > 0 : x \in t(C_A - x_0)\}, \quad x \in X$$

(считаем, что $\inf \emptyset := +\infty$).

Сужение функционала μ на $\text{span}(C_A - x_0)$ является полунормой, принимающей конечные значения. Оказывается, что выпуклая функция φ *локально липшицева относительно функционала μ* , то есть для любой точки из $\text{icr dom } \varphi$ можно указать гомотетию и перенос множества $C_A - x_0$ так, что φ липшицева относительно μ на этом множестве. Это дает возможность определить субдифференциал функции φ следующим образом:

$$\partial^\mu \varphi(x) := \{\zeta \in \text{span}(C_A - x_0)' : \varphi'(x, v) \geq \langle \zeta, v \rangle$$

для всех $v \in \text{span}(C_A - x_0)\}, \quad x \in \text{icr dom } \varphi,$

где $\text{span}(C_A - x_0)'$ есть пространство линейных функционалов на $\text{span}(C_A - x_0)$. Доказано, что $\partial^\mu \varphi(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in \text{icr dom } \varphi$. Последнее позволяет сформулировать *правило Ферма*, в котором локальный экстремум рассматривается как экстремум на гомотетиях и переносах множества C_A . Различные топологические свойства можно получить в том случае, если пространство $\text{span}(C_A - x_0)$ снабжено такой векторной топологией, что μ непрерывно. Правила вычисления суммы и произведения для такого субдифференциала верны для функций, липшицевых относительно различных функционалов Минковского с некоторым дополнительным условием; доказаны также две теоремы о сложной функции, теорема Лебурга.

- [1] Amara, C., Ciligot-Travaïn, M.: Lower CS-closed sets and functions. Journal of mathematical analysis and applications 239.2, 371–389 (1999).
- [2] Brøndsted, A., Rockafellar, R.T. On the subdifferentiability of convex functions. Proceedings of the American Mathematical Society 16.4, 605–611 (1965).
- [3] Laghdir, M. Some remarks on subdifferentiability of convex functions. Applied Mathematics E-Notes 5, 150–156 (2005).
- [4] Moussaoui, M., Volle, M. Subdifferentiability and inf-sup theorems. Positivity 3.4, 345–355 (1999).
- [5] Simons, S. The occasional distributivity of $\circ$ over $+$ and the change of variable formula for conjugate functions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 14, no. 12, 1111–1120 (1990).
- [6] Zălinescu, C. Convex analysis in General Vector Spaces. World Scientific, London, 65–66 (2003).

E-mail: ✉ cosxi.chx@gmail.com.

Н. В. Дивляш

Відстані Кульбака — Лейблера, Хелінгера та χ^2 між розподілом салеми́вського типу та рівномірним розподілом

🏛️ Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

В теорії ймовірностей відстані Кульбака — Лейблера, Хелінгера та χ^2 використовуються для визначення відхилення між розподілами. Ми розглянули їх для випадку, коли одним з розподілів є так званий класичний салеми́вський розподіл.

Розглянемо розподіл випадкової величини η з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами η_k , $P\{\eta_k = 1\} = \rho$, $P\{\eta_k = 0\} = 1 - \rho$. Функцію розподілу η можна представити у вигляді:

$$F_\eta(x) = \beta_{\alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_{k+1}} \varrho^{\sum_{j=1}^k \alpha_j} (1 - \varrho)^{k - \sum_{j=1}^k \alpha_j},$$

де α_k — k -та двійкова цифра x ; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1 - \varrho$.

Нехай G — рівномірний розподіл на відрізку $[0; 1]$, $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^2$ — двійковий циліндр рангу m . Позначимо $dP = \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j}$, $d\lambda = 2^{-m}$, де λ — міра Лебега. Тоді $\frac{dP}{d\lambda} = \frac{\rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j}}{2^{-m}}$, $\frac{dG}{d\lambda} = 1$.

Враховуючи [1] та введені позначення, отримаємо:

1) відстань Кульбака — Лейблера:

$$\rho_1 = \sum_{\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^2} \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j} \ln(2^m \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j});$$

2) відстань χ^2 :

$$\rho_2 = \sum_{\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^2} \frac{(2^m \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j} - 1)^2}{2^{2m} \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j}};$$

3) відстань Хелінгера:

$$\rho_3 = \sum_{\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^2} \frac{1}{2^m} \left(\sqrt{2^m \rho^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} (1 - \rho)^{m - \sum_{j=1}^m \alpha_j}} - 1 \right)^2.$$

В доповіді будуть представлені взаємозв'язки між розглянутими відстанями.

[1] Боровков А. А. Математическая статистика. — Н.: Наука, 1997. — 772 с.

E-mail: ✉ dyuljash_natali@ukr.net.

С. В. Донецький

Клас функцій AC

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Метою цього дослідження є знайти характеристики функцій f , при яких виконується наступна властивість

$$\exists g \in C, \text{ така що } f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Будемо припускати, що функція f визначена на (a, ∞) , для деякого $a \in \mathbb{R}$.

Означення 1. Функція f належить до класу функцій AC , якщо для f виконується властивість (1).

Приклад 1. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ x^2 + \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді $f \in AC$.

Приклад 2. Нехай $f(x) = [x]$ — ціла частина x . Тоді $f \notin AC$.

Введемо наступні позначення:

$$\overline{f}(x) := \limsup_{y \rightarrow x} f(y), \quad \underline{f}(x) := \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

Теорема 1. Для функції f виконується властивість (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \overline{f}(x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \\ \underline{f}(x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{cases} \quad (2)$$

Приклад 3. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ 2, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) \equiv 1 \implies \overline{f}(x) - \underline{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, але $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} (\overline{f}(x) - f(x))$. Тому можна зробити висновок, що умова (2) є більш загальною ніж умова $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

E-mail: ✉ dsushka@gmail.com.

М. Є. Дудкін¹, О. В. Ковальова²

Обернена матриця типу Якобі відповідна сильній проблемі моментів Гамбургера

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

В роботі [1] записана форма матриці J відповідна до сильної одновимірної проблеми моментів Гамбургера. Її алгебраїчно обернена J^{-1} , із огляду на рівність $JJ^{-1} = I$ має вигляд:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & & & & \\ & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & & 0 \\ & & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & & & \\ & & \gamma_2 & \beta_3 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & & \\ & & & & \beta_4 & \alpha_5 & \beta_5 & & \\ & 0 & & & \gamma_4 & \beta_5 & \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \\ & & & & & & \beta_6 & \alpha_7 & \beta_7 \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\gamma_{2k-1} > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Проте не кожна матриця виду (1) може бути оберненою.

Теорема. Матриця J^{-1} виду (1) має алгебраїчно обернену J тоді і тільки тоді, коли

$$\det \begin{vmatrix} \beta_n & \gamma_n \\ \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \end{vmatrix} = 0, \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & 0 \\ \beta_{n-1} & \alpha_n & \beta_n \\ 0 & \beta_n & \alpha_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- [1] Dudkin M., The inner structure of the Jacobi-Laurent matrix related to the strong Hamburger moment problem. Methods of Funct. Anal. and Topology 2013, v. 19, no. 2.

E-mail:  ¹dudkin@imath.kiev.ua,  ²hkovaleva@ukr.net.

Т. О. Єршоміна

Дослідження властивостей неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь у гіперболічному випадку

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Розглядається система нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f(t, x(t+1)), \quad (1)$$

у випадку, коли виконуються наступні умови:

1. Λ — дійсна $(n \times n)$ -матриця вигляду $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$, де Λ_1, Λ_2 — дійсні $(p \times p)$ та $(r \times r)$ -матриці ($p+r = n$), $\det \Lambda \neq 0$. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f(t, x(t+1)) = (f^1(t, x^1(t+1), x^2(t+1)), f^2(t, x^1(t+1), x^2(t+1))),$$

q — деяка дійсна додатна стала.

2.

$$\begin{aligned} |f^1(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2) - f^1(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2)| &\leq l_1(|\bar{x}^1 - \bar{x}^1| + |\bar{x}^2 - \bar{x}^2|), \\ |f^2(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2) - f^2(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2)| &\leq l_2(|\bar{x}^1 - \bar{x}^1| + |\bar{x}^2 - \bar{x}^2|), \end{aligned}$$

де l_1, l_2 — деякі додатні сталі, що залежать від l ($l_1 = l_1(l), l_2 = l_2(l), l_1 \rightarrow 0, l_2 \rightarrow 0$ при $l \rightarrow 0$). Тоді система рівнянь (1) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x^1(qt) = \Lambda_1 x^1(t) + f^1(t, x^1(t+1), x^2(t+1)), \\ x^2(qt) = \Lambda_2 x^2(t) + f^2(t, x^1(t+1), x^2(t+1)), \end{cases} \quad (2)$$

де $x^1 = (x_1, \dots, x_p)$, $x^2 = (x_{p+1}, \dots, x_{p+r})$, $f^1 = (f_1, \dots, f_p)$, $f^2 = (f_{p+1}, \dots, f_{p+r})$.

Виконавши в (2) взаємно-однозначну заміну змінних

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) + \tilde{\gamma}_1(t), \\ x_2(t) &= y_2(t) + \tilde{\gamma}_2(t), \end{aligned}$$

де $\gamma(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))$ — неперервний обмежений розв'язок системи (2), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y^1(qt) = \Lambda_1 y^1(t) + F^1(t, y^1(t+1), y^2(t+1)), \\ y^2(qt) = \Lambda_2 y^2(t) + F^2(t, y^1(t+1), y^2(t+1)). \end{cases} \quad (3)$$

Вектор-функції $F^1(t, y^1, y^2)$, $F^2(t, y^1, y^2)$ задовольняють умові 2 і $F^1(t, 0, 0) \equiv 0$, $F^2(t, 0, 0) \equiv 0$. Для системи (3) доведена наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1-2 і умови:*

3. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = p + 1, 2, \dots, n$, $0 \leq p \leq n$, $q > 1$;
4. $\theta = \max\{\frac{2l_1}{1-\lambda^*}, \frac{2l_2}{\lambda_*-1}\} < 1$, $\text{де } 1 > \lambda^* > \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, p\}$, $1 < \lambda_* < \min\{\lambda_i, i = p + 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді рядів

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \quad y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t),$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, \dots$ — деякі неперервні обмежені при $t \geq T > 0$ вектор-функції.

- [1] Пелюх Г. П. К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — 407, № 5 — С. 600–603.
- [2] Єрьоміна Т. О. Про побудову неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь. // Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2015. — № 2. — С. 71–74.

E-mail: ✉ ierominat@ukr.net.

Т. О. Заболотько

Про класи існування розв’язків задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами

🏛 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Розглядається рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t, x) \partial_{x_k}^k \right) u(t, x) - a \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (x_j u) = 0, \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

де b і n — натуральні, a і T — дійсні, причому $T > 0$, $|k| := k_1 + \dots + k_n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mathbb{Z}_+^n$ — сукупність всіх n -вимірних мультиіндексів, коефіцієнти $a_k(t, x)$ є комплекснозначними неперервними та обмеженими функціями і такими, що рівняння (1) є рівномірно параболічним за Петровським, на коефіцієнти накладається спеціальна умова Гельдера.

Для рівняння (1) побудовано ФРЗК Z , встановлено оцінки для похідних Z та приросту похідних, а також властивості ФРЗК.

Ці результати використано для знаходження класів існування розв’язків задачі Коші.

Варто зауважити, що за наявності в рівнянні членів зі зростаючими коефіцієнтами результати істотно різні для рівнянь вищого та другого порядків.

E-mail: ✉ zabolotkota@meta.ua.

В. В. Кусій

Асимптотична поведінка випадкового блукання

🏛 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Нехай $\{\xi_k^{(\mu)}, k \geq 1\}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, $E\xi_k^{(\mu)} = \mu > 0$.

Розглянемо випадкове блукання $X_n^{(\mu)} = \xi_1^{(\mu)} + \dots + \xi_n^{(\mu)}$, $n \geq 1$.

Досліджується асимптотика ймовірності

$$p_\mu := P(X_n^{(\mu)} \neq 0, n \geq 1)$$

неповернення в 0 для випадкового блукання $\{X_n^{(\mu)}, n \geq 1\}$ при $\mu \rightarrow 0$.

Теорема. *Нехай характеристична функція випадкової величини $\xi_k^{(\mu)}$ задовольняє умову*

$$\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta) = Ee^{i\theta\xi^{(\mu)}} = 1 + i\mu\theta - a|\theta|^\alpha + o_\mu(|\theta|^\alpha), \theta \rightarrow 0,$$

де

$$\alpha \in (1, 2], \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \sup_{\mu \in (0, 1]} \frac{(o_\mu|\theta|^\alpha)}{|\theta|^\alpha} = 0.$$

Тоді

$$p_\mu \sim \frac{2\mu(\alpha - 1)}{\alpha}, \quad \mu \rightarrow 0.$$

- [1] F. Spitzer. Principles of Random Walks. New York: Van Nostrand, 1964. Рус. пер.: Спіцер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. Т. 2.
- [3] Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1989.

E-mail: ✉ recsq@meta.ua.

О. Є. Лагодзінський

Генерація поля Ченцова за розкладом Хаара

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Цікавою задачею є пошук гарного способу моделювання поля Ченцова. Одним з найкращих рішень є використання відомого факту з теорії ймовірності, а саме розклад поля у ряд за ортогональною системою функцій Хаара [1]. Використання цього способу дозволяє моделювати поле завдяки функціям Хаара, які обчислюються рекурентно, що прискорює процес моделювання та дозволяє обрати необхідну точність моделювання.

Сам спосіб генерації поля Ченцова за розкладом Хаара полягає у наближенні поля скінченними кратними сумами ортогонального розкладу за допомогою базису Хаара. Завдяки використанню скінченного кратного ряду досягається можливість моделювання процесу або поля на комп'ютері та відновлення його із наперед заданою точністю.

В доповіді будуть представлені результати стосовно точності наближення вінерівського процесу за допомогою скінчених сум рядів Хаара.

- [1] В. В. Булдігин. Сходимость случайных элементов в топологических пространствах, Наукова думка, Киев, 240 с.

E-mail: ✉ lagodzinskyi@gmail.com.

Є. І. Лемешко

Існування компромісних станів у складних динамічних системах з притягальною взаємодією

 Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ.

Поняття інтерактивної складної системи є основним інструментом у побудові математичних моделей для розв'язання сучасних проблем цивілізаційного розвитку. Таким, зокрема, є поняття складної динамічної системи з притягальною взаємодією. Проблема пошуку та досягнення компромісного стану для опонентів на спільній території існування має різні варіанти постановки задачі і вибору конфліктної взаємодії [1]. Тут вивчається питання про компроміс для систем з притягальною взаємодією.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), *\}$, позначає динамічну систему конфлікту з притягальною взаємодією. Тут Ω — простір конфлікту, $\mathcal{M}(\Omega)$ — множина розподілів опонентів на Ω , нарешті $*$ позначає закон взаємодії, це деяке нелінійне відображення в $\mathcal{M}(\Omega)$. Далі $\Omega = [0, 1]$, а $\mathcal{M}(\Omega)$ — простір імовірнісних мір на $[0, 1]$. Розглядаємо траєкторії $\{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{*, N} \{\mu^{N+1}, \nu^{N+1}\}$ задані в термінах щільностей мір:

$$\begin{cases} \rho^{N+1}(x) = \frac{1}{z^N} [\rho^N(x)(1 + \theta^N) + \tau^N(x)], \\ \sigma^{N+1}(x) = \frac{1}{z^N} [\sigma^N(x)(1 + \theta^N) + \tau^N(x)], \end{cases} \quad x \in [0, 1], \quad N = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Теорема 1. Для довільної пари початкових мір μ, ν існує граничний (компромісний) стан $\rho^\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N(x)$, $\sigma^\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^N(x)$, де

$$\rho^\infty(x) = \sigma^\infty(x) = \frac{\tau(x)}{\mathcal{T}}, \quad \tau(x) = \min\{\rho(x), \sigma(x)\}, \quad \mathcal{T} = \tau(\Omega). \quad (2)$$

Теорема узагальнює результати з [2] і має застосування при встановленні оптимальних пропорцій та компромісів в широкому спектрі задач пов'язаних з пошуком балансу між попитом та пропозиціями в фінансових, ринкових, освітніх та соціальних процесах [2, 3].

- [1] V. Koshmanenko. The Spectral Theory of Conflict Dynamical Systems (in Ukrainian). Kyiv, Naukova dumka, 2016, – 287 p.
- [2] V. Koshmanenko. Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems, MFAT, (2014) 20, no. 4, 379–390.
- [3] Salam Md. Mahbubush Khan, Kazuyuki Ikko Takahashi. Segregation through Conflict, Advances in Applied Sociology, (2013) 3, no. 8, 315–319.

E-mail: ✉ elizabeth.lemeshko@gmail.com.

О. В. Мальяр

Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t = (t_1, t_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty),$$

де

$$g(t, \theta^0) = A^0 \cos(\varphi_1^0 t_1 + \varphi_2^0 t_2) + B^0 \sin(\varphi_1^0 t_1 + \varphi_2^0 t_2),$$

$\theta^0 = (A^0, B^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \Theta \subset \mathbb{R}^4$ — вектор істинних значень невідомих параметрів, Θ — деяка відкрита параметрична множина, $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, — випадковий шум з нульовим середнім. Графік функції $g(t, \theta^0)$ називається текстурованою поверхнею (див., наприклад, [1]).

Оцінкою найменших квадратів параметра $\theta^0 \in \Theta$ за спостереженнями $X(t)$, $t \in [0, T] \times [0, T] = \Pi(T)$, називається будь-який випадковий вектор $\theta_T = (A_T, B_T, \varphi_{1T}, \varphi_{2T})$, для якого

$$Q_T(\theta_T) = \min_{\theta \in \Theta^c} \Theta_T(\theta), \quad \Theta_T(\theta) = T^{-2} \int_{\Pi(T)} [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt.$$

Нехай виконано одне з наступних припущень:

1) ε є однорідним ізотропним полем з коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L — повільно змінна на нескінченності функція;

2) ε є однорідним полем таким, що $B \in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Тоді $A_T \rightarrow A^0$, $B_T \rightarrow B^0$, $T(\varphi_{1T} - \varphi_1^0) \rightarrow 0$, $T(\varphi_{2T} - \varphi_2^0) \rightarrow 0$ майже напевно при $T \rightarrow \infty$.

Цей результат отримано з використанням підходу роботи [2].

- [1] Nandi S., Kundu D., Srivastava R. K. Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model. // *Computation Statistics and Data Analysis*. — 2013. — № 58. — pp. 147–161.
- [2] Іванов О. В. Консистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот суми гармонійних коливань у моделях з сильною залежністю. // *Теорія ймовірностей та математична статистика*. — 2009. — № 80. — с. 55–62.

E-mail: ✉ malyar95@ukr.net.

К. Ю. Матюшина

Дослідження параметрів якості систем масового обслуговування

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Розглянемо систему масового обслуговування з одним обробляючим пристроєм, груповим надходженням і груповою обробкою вимог. Припустимо, що ємність системи дорівнює m , та надлишкові вимоги відкидаються, коли система переповнена.

Позначимо через $X_n \in E = \{0, 1, \dots, N\}$ кількість вимог в системі в момент n . Припустимо, що X_n є ланцюгом Маркова зі стрибком, що не перевищує $m \leq N$.

Нехай величина стрибка, коли $X_n \in \{m, \dots, N-m\}$ має розподіл ξ , тобто

$$p_{i,i+j} = P(\xi = j), \quad m \leq i \leq N-m, \quad \sum_{j=-m}^m p_j = 1.$$

Позначимо через $x_k^{(N)}$ ймовірність того, що черга звільниться від вимог раніше, ніж буфер буде переповнено:

$$x_k^{(N)} = P_k(\text{ймовірність досягання } N \text{ раніше } 0, \text{ при старті з } k).$$

Метою дослідження є знаходження асимптотичної поведінки $x_k^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$.

Припустимо, що всі корені характеристичного рівняння

$$p_m \lambda^{2m} + p_{m-1} \lambda^{2m-1} + \dots + p_1 \lambda^{m+1} + (p_0 - 1) \lambda^m + \dots + p_{-m} = 0$$

різні та розташовані за зростанням абсолютних величин, тобто $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{2m}|$.

Ймовірність $x_k^{(N)} = \sum_{i=1}^{2m} c_i^{(N)} \lambda_i^k$, де $c_i^{(N)}$ можна знайти із певної системи лінійних рівнянь.

Теорема. Нехай $E\xi < 0$. Тоді для довільного фіксованого k :

$$x_k^{(N)} \sim \frac{\sum_{i=1}^m a_i \lambda_i^k}{\lambda_{m+1}^N}, \quad N \rightarrow \infty,$$

де a_i — деякі константи, які не залежать від N .

М. П. Мороз

Про розподіл значень однієї ніде не монотонної та майже скрізь недиференційовної функції

🏛️ Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Означення 1. Рядом Остроградського — Серпінського — Пірса називається знакозмінний ряд вигляду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{q_1 q_2 \dots q_n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{q_1 q_2 \dots q_n} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \dots q_n \dots}^O,$$

де послідовність натуральних чисел (q_n) є строго зростаючою.

Означення 2. Рядом Енгеля називається знакододатний ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1 + 1} + \dots + \frac{1}{(p_1 + 1) \dots (p_n + 1)} + \dots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1 + 1) \dots (p_n + 1)} \equiv \Delta_{p_1 p_2 \dots p_n \dots}^E, \end{aligned}$$

де послідовність натуральних чисел (p_n) є неспадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$.

Розглядається функція f , яка числу $x = \Delta_{q_1 q_2 \dots q_n \dots}^O \in (0; 1)$ ставить у відповідність число $y \in (0; 1)$, що має формально рівне $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_n \dots}^E$ -зображення $f(\Delta_{q_1 q_2 \dots q_n \dots}^O) = \Delta_{p_1 p_2 \dots p_n \dots}^E$.

Ця функція визначена лише на множині ірраціональних чисел з відрізка $[0; 1]$, є неперервною по множині ірраціональних чисел, проте ніде не монотонною та майже скрізь недиференційовною по цій множині.

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на відріжку $[0; 1]$, тобто $P\{X < x\} = x$. Розглядаємо випадкову величину Y , яка визначається рівністю $Y = f(X)$. Нехай $F_Y(x)$ — функція розподілу випадкової величини Y , тобто $F_Y(x) = P\{Y < x\}$.

Теорема. Розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ є неперервним. Значення функції розподілу $F_Y(x)$ випадкової величини Y обчислюється за формулою:

$$F_Y(x) = F_Y(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^E) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_1 c_2 \dots c_{n-1} (c_n + 1)}, & \text{якщо } x \in E_f, \\ \sum_{n=1}^k \frac{1}{c_1 c_2 \dots c_{n-1} (c_n + 1)}, & \text{якщо } x \notin E_f; \end{cases}$$

де k — номер першого елемента Δ^E -зображення числа x такого, що $c_k = c_{k-1}$, E_f — множина значень функції f .

E-mail: ✉ nicmoroz@ukr.net.

К. Р. Острійчук

Спосіб генерування стаціонарних випадкових полів з обмеженим спектром

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

В основі даного дослідження лежить результат [1], згідно з яким будь-яке стаціонарне випадкове поле з обмеженим спектром можна розкласти у ряд за допомогою трансляцій функції $\frac{\sin x}{x}$. У свою чергу, результат [1] є аналогом теореми Котельникова — Шеннона стосовно можливості відновлення випадкового процесу з обмеженим спектром за його дискретними відліками.

Основним результатом [1] є теоретична можливість відновити будь-який аналоговий сигнал без втрати якості за його дискретними значеннями, якщо частота відліків є достатньо високою. Прикладами сигналів, які відповідають випадковим процесам, є цифрові записи розмов телефоном, музикальних творів тощо. Прикладом сигналів, які відповідають випадковим полям, є передача двовимірних зображень каналами зв'язку, у тому числі й телевізійними.

Запропонований метод моделювання кратного ряду Котельникова — Шеннона використовує трансляції функції $\frac{\sin x}{x}$. Для практичного застосування використовується тільки скінчена частина цього ряду, що дозволяє моделювати поле на комп'ютері.

В результаті ми отримуємо теоретичний розв'язок задачі передачі зображень сучасними каналами зв'язку. У порівнянні з прототипом (розклад Котельникова — Шеннона для випадкових процесів) він має перевагу в тому, що дозволяє відновлювати за дискретними відліками не тільки процеси, але й поля довільної розмірності. Відновлення випадкового поля є абсолютно безпомилковим при використанні нескінченного ряду, що не є можливим для практичних застосувань, для яких пропонується модель скінченного ряду Котельникова — Шеннона, який дозволяє відновлювати поле з будь-якою наперед заданою точністю.

В доповіді будуть представлені результати стосовно точності наближення стаціонарного процесу за допомогою скінчених сум.

- [1] О. И. Клесов (1984), О сходимости почти наверное кратных рядов Котельникова — Шеннона, Проблемы передачи информации, XX, N 3, 79–93.

E-mail: ✉ k.ostryichuk@ukr.net.

А. Г. Островська

Про числа Фібоначчі з однаковою кількістю цифр

🏛️ Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Нехай F_n — це n -те число Фібоначчі. Введемо функцію $k(n)$, що позначає кількість цифр у числі n .

Теорема 1. Якщо $k(F_n) = m$, $k(F_{n+1}) = m + 1$, тоді $k(F_{n+5}) \in \{m + 1, m + 2\}$.

Інакше кажучи, існує або 4, або 5 чисел Фібоначчі з однаковою кількістю цифр. На питання коли їх буде чотири, а коли п'ять дає відповідь наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $k(F_{n-1}) = m$, $k(F_n) = m + 1$, тоді

- $k(F_n - 10^m) \geq k(10^{m+1} - F_{n+4}) \iff k(F_{n+9}) = m + 3$;
- $k(F_n - 10^m) < k(10^{m+1} - F_{n+4}) \iff k(F_{n+9}) = m + 2$.

Тобто, коли виконується умова $k(F_n - 10^m) \geq k(10^{m+1} - F_{n+4})$, то $(m + 2)$ -цифрових чисел буде 4. Якщо ні — то 5.

Приклад 1. Числа F_{12} , F_{13} , F_{14} , F_{15} , F_{16} складаються з трьох цифр, $F_{12} = 144$, $F_{16} = 987$. Виконується нерівність $k(F_{12} - 10^2) \geq k(10^3 - F_{16}) \iff 44 \geq k13$, отже, числа F_{17} , F_{18} , F_{19} , F_{20} складаються з чотирьох цифр, а F_{21} — з п'яти.

E-mail: ✉ anna-ostr@mail.ru.

С. П. Ратушняк

**Розподіл значень функцій з фрактальними
властивостями, означених в термінах
 Q_2 -зображення чисел**

 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Нехай A — алфавіт двосимвольної системи зображення чисел, $A^2 \equiv A \times A$; $\varphi(i, j)$ — фінітна функція, визначена на множині A^2 , яка набуває значень з множини A . Розглядається функція f_φ , означена на одиничному проміжку рівністю

$$f_\varphi(x) = f_\varphi(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^{Q_2}) = \Delta_{\varphi(\alpha_1,\alpha_2)\varphi(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi(\alpha_n,\alpha_{n+1})\dots}^{Q_2},$$

де $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2}$ — Q_2 -зображення числа [1], $\alpha_n \in A$.

Оскільки існує лише 16 функцій $\varphi(i, j)$, то і сім'я функцій f_φ складається з 16 представників, два з яких вироджені, два — неперервні. Серед них і оператор лівоостроннього зсуву цифр. Пари двоїстих функцій (ті, що визначаються перестановкою елементів алфавіту), взагалі кажучи, мають принципово різні властивості (щоб в цьому перекоонатись досить порівняти властивості функцій f_φ породжених функціями $\varphi(i, j) = i$ та $\varphi(i, j) = 1 - i$). Нехай η_k — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значення 0 і 1 з ймовірностями p_0, p_1 відповідно:

$$P\{\eta_n = 0\} = p_0, \quad P\{\eta_n = 1\} = p_1, \quad p_0 + p_1 = 1, \quad n \in N.$$

Розподіл випадкової величини $X = \Delta_{\eta_1\eta_2\eta_3\dots}^{Q_2}$ є добре вивченим [1]. Вивчається розподіл значень функції f_φ , аргументом якої є випадкова величина X , тобто розподіл випадкової величини:

$$Y = f_\varphi(X) = \Delta_{\xi_1\xi_2\dots}^{Q_2}, \quad \xi_i = \varphi(\eta_i, \eta_{i+1}).$$

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, спектральних, тополого-метричних і фрактальних властивостей розподілу випадкової величини $Y = f_\varphi(X)$.

- [1] *П्राचेवितый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2 -символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 92–102.
- [2] *П्राचेवितый М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. — 16(2). — С. 150–160.

E-mail: ✉ ratush404@gmail.com.

Н. В. Рогова

Про застосування просторів Хермандера до деяких напіводнорідних еліптичних крайових задач

 Чернігівський національний педагогічний університет
імені Т. Г. Шевченка, Чернігів.

Доповідь присвячена застосуванню просторів Хермандера до модельної напіводнорідної еліптичної крайової задачі вигляду

$$(\Delta u)(x, y) - u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^r u(x, y)}{\partial y^r} \Big|_{y=0} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де довільно вибрано цілі числа $n \geq 1$ і $r \geq 0$. Досліджується питання про існування, єдиність і регулярність розв'язку цієї задачі, якщо розподіл g належить гільбертовому простору Хермандера

$$H^\varphi(\mathbb{R}^n) := \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \varphi(\langle \xi \rangle)(\mathcal{F}g)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\},$$

$$\|g\|_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)} := \|\varphi(\langle \xi \rangle)(\mathcal{F}g)(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)}.$$

Тут довільно вибрано неперервну функцію $\varphi : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, для якої існують числа $a > 1$ і $b \geq 1$ такі, що $\varphi(\lambda t) \leq b\varphi(t)$ для будь-яких $\lambda \in [1, a]$ і $t \geq 1$. Окрім того, $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\mathcal{F}g$ — перетворення Фур'є повільно зростаючого розподілу g . Покладемо $\eta(t) := t^{r+1/2}\varphi(t)$ при $t \geq 1$.

Теорема. Для кожного розподілу $g \in H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ існує єдиний розв'язок $u \in H^\eta(\mathbb{R}_+^{n+1})$ еліптичного рівняння (1), який задовольняє крайову умову (2) у такому сенсі: $u(x, \varepsilon) \rightarrow g(x)$ в $H^\varphi(\mathbb{R}_x^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Для цього розв'язку виконується априорна оцінка

$$\|u\|_{H^\eta(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq c \|g\|_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)},$$

де число $c > 0$ не залежить від g та u .

Тут використано гільбертів простір

$$H^\eta(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u = w \upharpoonright \mathbb{R}_+^{n+1} : w \in H^\eta(\mathbb{R}^{n+1})\},$$

$$\|u\|_{H^\eta(\mathbb{R}_+^{n+1})} := \inf \{\|w\|_{H^\eta(\mathbb{R}^{n+1})} : w \in H^\eta(\mathbb{R}^{n+1}), u = w \upharpoonright \mathbb{R}_+^{n+1}\},$$

де $\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$.

Авторка вдячна О. О. Мурачу за керівництво роботою.

E-mail: ✉ n.skrypko@yandex.ru.

О. В. Свинчук¹, М. В. Працьовитий²

Одна сім'я неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Нехай $A_5 \equiv \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт 5-ової системи числення, $L \equiv A_5 \times \dots \times A_5 \times \dots$; $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) 5^{-k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^5$ — 5-ове зображення числа $x \in [0, 1]$, $(\alpha_k) \in L$.

Нехай (ε_n) — послідовність додатних дійсних чисел, причому $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$; (g_n) — послідовність векторів, де

$$\overline{g_n} = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n}),$$

таких, що: $g_{0n} = g_{4n} = \frac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \frac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$.

Розглядається функція

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^G,$$

де $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \frac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \frac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \frac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто $\delta_{[i+1]n} = \delta_{in} + g_{in} = \sum_{j=0}^i g_{jn}$, $n \in N$.

Теорема. Функція $f(x)$:

1. коректно визначена і неперервна на відріжку $[0, 1]$;
2. монотонна, коли $\varepsilon_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$;
3. не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості, якщо нерівність $\varepsilon_n \neq 0$ виконується для нескінченної множини значень n ;
4. є функцією обмеженої варіації, коли $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$;
5. має графік, симетричний відносно точки $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

В доповіді пропонуються результати дослідження структурних, варіаційних, інтегральних, автомоделних і фрактальних властивостей функції, а також тополого-метричних властивостей її рівнів.

E-mail: ✉¹7011990@ukr.net, ✉²prats4@yandex.ru.

В. О. Сіренко

**Детермінований хаос у системі
«бак з рідиною — джерело збудження»**

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Розглянуто неідеальну за Зомерфельдом-Кононенком динамічну систему «бак з рідиною — джерело збудження». Вперше математичну модель такої системи було описано в [1; 2]. Дослідження коливань вільної поверхні рідини в жорстких контейнерах викликає великий інтерес, оскільки багато сучасних механізмів і пристроїв, елементами своїх конструкцій мають різні оболонки, частково заповнені рідиною. В даній роботі було проведено комп'ютерне моделювання та чисельний аналіз регулярних та хаотичних режимів в динамічній системі типу «бак з рідиною — джерело збудження». Для такої системи було встановлено існування трьох типів важливих сценаріїв, а саме: перехід «гіперхаос-гіперхаос» та «хаос-хаос» за сценарієм узагальненої переміжності, а також нові особливості при переході від регулярних режимів до хаотичних за сценаріями Фейгенбаума і Помо-Маневіля [3–6].

- [1] Krasnopol'skaya T. S. Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank / Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. // Soviet Applied Mechanics. — 1990. — vol. 26. — № 8. — p. 787–794.
- [2] Krasnopol'skaya T. S. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply / Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. // 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Prague: Czechoslovak Acad. Sci. — 1991. — vol. 1. — p. 181–184.
- [3] Шве́ц А. Ю. Сценарии перехода к детерминированному хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках / Шве́ц А. Ю., Сиренко В. А. // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2011. — Т. 8 — № 2. — С. 292–305.
- [4] Shvets A. Yu. Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems / Shvets A. Yu., Sirenko V. O. // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, 2012, № 2. — p. 303–310.
- [5] Шве́ц А. Ю. Единство и разнообразие сценариев перехода к хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках / А. Ю. Шве́ц, В. А. Сиренко // Збірник праць Інституту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики». — 2014. т. 11. — № 4. — С. 386–398.
- [6] Shvets A. Yu. New Ways of Transitions To Deterministic Chaos In Non Ideal Oscillating Systems / A. Yu. Shvets, V. A. Sirenko // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute". — 2015, № 1(99). — p. 45–51.

E-mail: ✉ sir_vasiliy@ukr.net.

І. І. Сіренька¹, О. А. Тимошенко²**Підсилений закон великих чисел для розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь** Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

У даній доповіді, вивчається підсилений закон великих чисел для неавтономних випадкових процесів та наведена теорема, що дозволяє досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь ([1; 2]).

Нехай на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$ задано неперервний випадковий процес $X(t) = (X(\omega, t), \omega \in \Omega), t \geq 0$.

Позначимо $\Phi(t) = \int_0^t \phi(u) du, t \geq 0$, де ϕ — неперервна додатна функція та припустимо, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty. \quad (1)$$

Розглянемо достатні умови збіжності майже напевно (м.н.) випадкового процесу X .

Теорема. *Припустимо, що X — неперервний розв'язок неавтономного стохастичного диференціального рівняння*

$$dX(t) = g(X(t))\phi(t)dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t),$$

σ — неперервна додатна функція така, що $\sup_x \sigma(x) < \infty$, θ, ϕ — неперервні додатні функції, w — вінерівський процес. Крім того, нехай виконується умова (1) та

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{n+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi^2(2^n)} < \infty.$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) = 0 \quad \text{м. н.}$$

- [1] Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення / В. В. Булдігін, К.-Х. Індлекофер, О. І. Клесов, Й. Г. Штайнебах. — К.: ТВІМС, 2012. — 441 с.
- [2] V. V. Buldygin and O. A. Tymoshenko, “On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients”, Theor. Stoch. Process., vol. 16, pp 12–22, 2010.

E-mail: ✉¹ilona.sirenka@gmail.com, ✉²elena_timoshenko2008@ukr.net.

О. В. Слущкий

Про пакувальну довірчість деяких сімейств множин Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Найбільш відомою фрактальною розмірністю є розмірність Хаусдорфа — Безиковича $\dim_H$. Проте ефективність дослідження множин та мір суттєво збільшується, якщо разом з $\dim_H$ розглядати іншу фрактальну розмірність — пакувальну розмірність $\dim_P$ [2; 3].

Існує багато підходів до обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича, зокрема підхід, що базується на довірчості сімейств множин [1]. Аналогічний підхід можна ввести і для пакувальної розмірності.

Означення 1. Сімейство множин Φ з простору M називається довірчим для обчислення $\dim_P$, якщо

$$\dim_P(E, \Phi) = \dim_P(E), \quad \forall E \subset M.$$

У доповіді буде порушено питання про довірчість сімейства циліндрів $\tilde{Q}$ -представлення дійсних чисел за умови, коли коефіцієнти q_{ij} не є відділеними від нуля.

- [1] On the hausdorff dimension faithfulness and the cantor series expansion / Sergio Alberverio, Ganna Ivanenko, Mykola Lebid, Grygoriy Torbin // <http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf>.
- [2] *Falconer K.* Fractal geometry: mathematical foundations and Applications. — Chichester : Wiley, 2003. — 367 p.
- [3] Tricot C., Two definitions of fractional dimension, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91(1982), 57–74.

E-mail:  slualexvas@gmail.com.

Є. О. Стрій

Практичне знаходження статистичних закономірностей послідовностей елементів скінченної множини

 Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ.

Апарат статистичних закономірностей використовується в загальній теорії прийняття рішень для розв'язку задач, які виходять за межі класичної теорії оптимальних статистичних рішень. Аксіоматичне означення статистичної закономірності узагальнює означення ймовірносного розподілу. У випадку, коли випадковість стохастична, математична статистика має достатньо розвинутий апарат знаходження оцінок розподілу, що спостерігається.

Якщо послабити гіпотезу стохастичної випадковості до гіпотези випадковості, що задається статистичною закономірністю, то знаходження оцінок характеристик статистичних закономірностей набуває особливої актуальності для розв'язку практичних задач. Зокрема отримана програма — реалізація запропонованого алгоритму наближеної побудови статистичної закономірності заданої послідовності літер двоїчного алфавіту. Запропонована програма тестується на прикладі послідовностей із теоретично отриманими закономірностями.

E-mail: ✉ striy_liza@mail.ru.

Н. І. Турчина

Про одну модельну крайову задачу

🏛 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

В області

$$\Pi^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, x_n > 0\}$$

розглядається крайова задача вигляду

$$\begin{aligned} A_0(\partial_t, \partial_x)u(t, x) &:= (I_N \partial_t - \sum_{\|k\|=2b} a_k \partial_x^k)u(t, x) = f(t, x), \\ (t, x) \in \Pi^+, u(t, x)|_{t=0} &= \phi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \\ B_{0j}(\partial_t, \partial_x)u(t, x)|_{x_n=0} &:= \sum_{2bk_0 + \|k\|=r_j} b_{jk_0k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t, x)|_{x_n=0} = g_j(t, x'), \\ (t, x') \in \Pi', j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

де u — матриця-стовпчик висоти N , a_k і b_{jk_0k} — сталі матриці розміру відповідно $N \times N$ і $1 \times N$, I_N — одинична матриця порядку N , $r_j \geq 0$, $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, $\Pi' := \{(t, x') \in \mathbb{R}^n \mid t > 0, x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, $\|k\| := \sum_{j=1}^n (b/b_j)$, якщо $k := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$.

Припускається, що матричний диференціальний вираз $A_0 \in \vec{2b}$ -параболічним за Ейдельманом [1].

Для цієї задачі отримано такі результати:

1. сформульовано умову доповняльності, яку мають задовольняти крайові вирази B_{0j} , $j \in \{1, \dots, m\}$;
2. для випадку, коли функції $f, \phi, g_1, \dots, g_m$ є досить гладкими та фінітними, одержано формулу для розв'язків задачі;
3. вивчено властивості ядер інтегралів із цієї формули.

- [1] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. 2004. 152. 390 p.

E-mail: ✉ nataturchina@gmail.com.

Л. М. Чубик

Дослідження ймовірності помилки при класифікації методом найближчого сусіда

🏛 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Нехай дано дві навчальні вибірки незалежних, однаково розподілених випадкових векторів $X_1, \dots, X_{[an]}$ та $Y_1, \dots, Y_{[cn]}$ із неперервними щільностями $p_X(x)$, $p_Y(x)$, $x \in R^m$ відповідно, де $a > 0$, $c > 0$ — фіксовані числа, $[x]$ — означає цілу частину числа x . Нехай $x_0 \in R^m$ — деяка точка. Класифікуємо точку x_0 за допомогою методу найближчого сусіда, а саме, віднесемо x_0 до класу X , якщо

$$\begin{aligned} \min(\|X_1 - x_0\|, \dots, \|X_{[an]} - x_0\|) &\leq \\ &\leq \min(\|Y_1 - x_0\|, \dots, \|Y_{[cn]} - x_0\|), \end{aligned}$$

тобто, якщо відстань до найближчого елементу із множини $X_1, \dots, X_{[an]}$, $Y_1, \dots, Y_{[cn]}$ досягається на виборці X . В супротивному разі віднесемо x_0 до класу Y .

Теорема 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_0 \text{ класифікується як } X \text{ по вибірці}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\begin{aligned} \min(\|X_1 - x_0\|, \dots, \|X_{[an]} - x_0\|) &\leq \\ &\leq \min(\|Y_1 - x_0\|, \dots, \|Y_{[cn]} - x_0\|) \end{aligned}\right) = \\ &= \frac{ap_X(x_0)}{ap_X(x_0) + cp_Y(x_0)}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Припустимо, що елемент обирається з класу X з ймовірністю p та з класу Y з ймовірністю $q = (1 - p)$, відповідно. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{хибної класифікації, проведеної по навчальним}) &= \\ &= \int_R \frac{(pc + qa)p_X(x_0)p_Y(x_0)}{ap_X(x_0) + cp_Y(x_0)} dx. \end{aligned}$$

І. І. Гарко

Про нові достатні умови довірчості систем циліндрів Q^* -зображення для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Проблема обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича є однією з центральних проблем фрактального аналізу, розв'язанню якої присвячено значну кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу. Один із методів знаходження розмірності Хаусдорфа — Безиковича полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності, що дає досліднику суттєві технічні переваги.

Історія досліджень умов довірчості висвітлена в [2]. Для Q^* -зображення дійсних чисел, яке було введене в роботі [3], проблема знаходження необхідних і достатніх умов довірчості є все ще відкритою, хоча ряд достатніх умов знайдено в роботах S. Alberverio, М. Ібрагіма, Г. Торбіна (див. [1] та відповідні посилання).

Зауважимо, зокрема, що при виконанні хоча б однієї з умов $\sup_{ik} q_{ik} < 1$ або $\inf_j q_{0j} = q_0 > 0, \inf_j q_{(s-1)j} = q_{s-1} > 0$ система $\Phi(Q^*)$ циліндрів Q^* -зображення є довірчою.

У доповіді представлено нові результати щодо довірчості системи $\Phi(Q^*)$ для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку.

- [1] M. Ibragim, G. Torbin, *On fractal faithfulness and fine fractal properties of random variables with independent Q^* -digits*, Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016, vol. 3, №2, P. 119–131.
- [2] Гарко І. І., Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М. *Про G -ізоморфізм ймовірнісних та розмірнісних теорій розкладів дійсних чисел та фрактальну довірчість систем покриттів*. Теорія ймовірностей і математична статистика, — 2016, № 94, С. 16–35.
- [3] Г. М. Торбин, Н. В. Працевитый, *Случайные величины с независимыми Q^* -знаками*, Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992, С. 95–104.

E-mail: ✉ garko.iryina@gmail.com.

І. В. Замрій¹, Н. А. Василенко²

Властивості однієї сім'ї функцій, визначених в термінах Q_7 -зображення дійсних чисел

 ¹Державний університет телекомунікацій, Київ.

 ²Інститут математики НАН України, Київ.

Узагальненням s -кових систем зображень дійсних чисел з відрізка $[0; 1]$ є Q_s -зображення. Останнє визначається ймовірнісним вектором $Q_s = (q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ з додатними координатами та розкладом наступного вигляду:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s},$$

де $\alpha_k \in A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_{\alpha_k} = \sum_{j=1}^{\alpha_k-1} q_j$. Якщо $Q_s = \{\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}\}$, то Q_s -зображення є звичайним s -ковим.

Нехай $s = 7$, $A_7 = \{0, 1, \dots, 6\}$. Визначимо на множині A_7 дискретну функцію $\tau(\alpha)$:

$$\tau(\alpha) = \begin{cases} 6 - \alpha, & \text{якщо } \alpha < 3, \\ 3, & \text{якщо } \alpha = 3, \\ 2, & \text{якщо } \alpha > 3. \end{cases}$$

На відрізку $[0; 1]$ розглядається функція:

$$f(x) = f(\Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \dots}^{Q_7}) = \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots}^{Q_7},$$

де $\gamma_1 = \tau(\alpha_1)$, а цифри γ_k визначаються з наступних умов:

- 1) якщо $\gamma_{k-1} = 2$, то $\gamma_k = \begin{cases} \tau(\alpha_k(x)), & \text{якщо } \alpha_{k-1}(x) \in \{1, 4, 6\}, \\ \tau(6 - \alpha_k(x)), & \text{якщо } \alpha_{k-1}(x) \in \{0, 2, 5\}; \end{cases}$
- 2) якщо $\gamma_{k-1} \geq 3$, то всі цифри γ_{k+j} (де $j \in \mathbb{N}_0$) визначаються за формулою: $\gamma_{k+j} = \begin{cases} 6 - \alpha_{k+j}(x), & \text{якщо } \alpha_{k-1}(x) \in \{0, 1, 2\}, \\ \alpha_{k+j}(x), & \text{якщо } \alpha_{k-1}(x) \in \{3, 4, 5, 6\}. \end{cases}$

Теорема. Функція f є неперервною 1) кусково-лінійною функцією (при умові $q_i = q_{[6-i]}$, $i \in A_7$); 2) сумішню сингулярної та кусково-лінійної функцій (при $q_i \neq q_{[6-i]}$, $i \in A_7$).

В доповіді пропонуються результати дослідження диференціальних, самоафінних та інтегральних властивостей функції f .

E-mail:  ¹irina-zamrij@yandex.ru,  ²nata_va@inbox.ru.

Є. І. Калашнікова

Деякі функції, пов'язані з розкладом дійсних чисел в знакододатний ряд Люрота

 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Відомо [1], що будь-яке дійсне число $x \in (0; 1]$ єдиним чином розкладається в знакододатний ряд Люрота:

$$x = \frac{1}{a_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_1(a_1 + 1) \dots a_{n-1}(a_{n-1} + 1)a_n} \equiv \\ \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^L, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

В доповіді пропонуються результати дослідження властивостей деяких функцій, аргумент і значення яких задані своїми L -зображеннями [2].

Для функції $\varphi(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^L) = \Delta_{a_2 \dots a_n \dots}^L$, породженої оператором зсуву цифр, знайдено аналітичне зображення та доведено хаотичність [3] відображення φ за умови обмеженості множини цифр L -зображення аргумента.

Для функції $f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^L) = \Delta_{a_2 a_1 a_4 \dots a_{n+1} a_n \dots}^L$, знайдено аналітичне зображення, доведено існування нескінченної множини точок розриву, досліджено фрактальні властивості графіка. Зокрема, доведено, що графік функції $f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \dots}^L) = \Delta_{a_2 a_1 \dots a_n a_{n-1} \dots}^L \in N$ -самоподібною множиною, N -самоподібна розмірність якої є розв'язком рівняння: $\sum_{c=1}^{\infty} (c^2(c+1)^2)^{-x} = 1$.

Для функції $g(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^L) = \Delta_{(a_1 \cdot a_2) a_2 \dots a_n \dots}^L$, знайдено аналітичне задання, сформульовано та доведено наступні властивості:

1) на будь-якому циліндрі другого рангу $\Delta_{c_1 c_2}^L$ функція g є лінійною та незростаючою;

2) функція g має зчисленну множину точок розриву першого роду: $x = \Delta_{a_1 a_2(1)}^L$, $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

- [1] Lüroth J. Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. — 1883. — **21**. — Р. 411–423.
- [2] Жижарева Ю. І., Працьовитий М. В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 200–211.
- [3] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / Р. М. Кроновер. — Москва: Постмаркет, 2000. — 352 с.

E-mail: ✉ kaipto@rambler.ru.

І. М. Лисенко

Однопараметричне раціональне Q_∞ -зображення і його застосування

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Q -зображення чисел одиничного проміжку називаються раціональним, якщо воно породжується послідовністю раціональних чисел (q_n) . Природним є запитання: скільки існує додатних рядів, збіжних до одиниці, членами яких є раціональні числа, що утворюють монотонно спадну послідовність? А рядів, членами яких є числа, обернені до натуральних (підпослідовностей гармонічної послідовності)?

Лема 1. *Існує континуальна множина підрядів гармонічного ряду, збіжних до одиниці.*

Окремої уваги заслуговують раціональні Q_∞ -зображення, які індукуються одним раціональним параметром. Таких існує теж континуальна сім'я.

Теорема 2. *Будь-яка система аналітичного двосимвольного кодування чисел відрізка $[0; 1]$, залежна від раціонального параметра $\mu \in (0; 1)$, природним чином породжує раціональне Q_∞ -зображення, достатньою (але не необхідною) умовою раціональності числа є періодичність зображення числа.*

У доповіді наводяться приклади множин раціональних чисел, раціональні однопараметричні Q_∞ -зображення, яких мають неперіодичні кодування. Основна увага відводить задачам конструктивної теорії функції з фрактальними властивостями і розподілам їхніх значень при випадковому аргументі з наперед заданим розподілом.

- [1] Гончаренко Я. В., Лисенко І. М. Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — № 15. — С. 100–118.
- [2] Працьовитий М. В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — № 14. — С. 189–216.
- [3] Працьовитий М. В. Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞ -знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М. П. Драгоманова. — 1998. — № 2. — С.36–48.

E-mail: ✉ ira72005@yandex.ua.

М. Л. Лупайн

Про нові фрактальні феномени, пов'язані з розподілами випадкових величин з незалежними GLS-символами

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

У доповіді представлено фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^{GLS}, \quad (1)$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність в. в., які набувають значень $0, 1, 2, \dots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \dots$ відповідно (див. [1; 3]).

Позначимо через $\Delta_{\infty}^{GLS} := [0; 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i^{GLS}$.

Якщо множина Δ_{∞}^{GLS} є не більш як зчисленною, фрактальні властивості спектрів в. в. виду (1) вивчалися в роботах [1; 2], де, зокрема, доведено наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $V := \{i : p_i > 0\}$. Якщо множина Δ_{∞}^{GLS} не більш як зчисленна, то для довільного GLS-розкладу $\dim_H S_{\xi} = \sup\{x : \sum_{i \in V} q_i^x \geq 1\}$.*

Чи залишається остання теорема правильною при довільному взаємному розташування циліндрів першого рангу? Контрприклад, який представлено у доповіді, показує що при фіксованому стохастичному векторі Q_{∞} і при фіксованій послідовності $\{\xi_k\}$ фрактальні властивості спектрів в. в. виду (1) навіть у випадку однакової розподіленості ξ_k суттєво залежать від взаємного розташування циліндрів першого рангу відповідного GLS-розкладу. Зауважимо, що аналогічний феномен відсутній для класів розподілів в. в. з незалежними символами розкладів Люрота, Q_{∞} -, G_{∞}^2 - та $I - Q_{\infty}$ -розкладів.

- [1] Лупайн М. Л. Фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014, № 16(1). — С. 279–295.
- [2] Lupain M. L. On spectra of probability measures generated by GLS-expansions // Modern Stochastics: Theory and Applications, 3(3), (2016), 213–221.
- [3] Dajani K., Kraaikamp C. Ergodic theory of numbers. — Washington: The Mathematic Association of America, 2002. — 190 p.

E-mail: ✉ marinalupain@npu.edu.ua.

В. П. Маркітан

Фрактальні властивості множин, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею

 Інститут математики НАН України, Київ.

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт системи числення; $q = (q_0, q_1)$ — впорядкований набір додатних чисел, причому $q_0 + q_1 = 1$; $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей;

$$Q = \|q_{ik}\| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

— двічі стохастична матриця (сума елементів кожного рядка і стовпчика якої рівна одиниці), причому вона не містить нулів ($0 < a < 1$).

Визначемо систему проміжків першого рангу, які є розбиттям $[0; 1]$:

$$[0; 1] = \Delta_0 \cup \Delta_1, \quad \text{де} \quad \Delta_0 = [0; q_0]; \Delta_1 = [q_0; 1]$$

Систему проміжків рангу n ($n \geq 2$) визначимо наступними умовами:

1. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}$;
2. $\min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(i+1)} = \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}$, $i = \{0, 1\}$;
3. $\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m i j}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}|} = q_{ij}$;
4. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ перерізом $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}$ є точка з $[0; 1]$.

Символічний запис $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}$ числа $x \in [0; 1]$ називається його марковським зображенням.

Теорема 1. *Множина*

$$C = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}, c_{2k-1} c_{2k} \in \{00, 11\} \forall k \in \mathbb{N}\}$$

є нуль-множиною Лебега, розмість Гаусдорфа — Безиковича якої є коренем рівняння $a^x(a^x + (1-a)^x) = 1$.

Теорема 2. *Множина*

$$D = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}, c_k + c_{k+1} + c_{k+2} \neq 1 \forall k \in \mathbb{N}\}$$

є нуль-множиною Лебега, розмість Гаусдорфа — Безиковича якої є коренем рівняння $(a(1-a)^2)^x + a^x = 1$.

E-mail: ✉ v.p.markitan@npu.edu.ua.

Ю. П. Маслова¹, М. В. Працьовитий²Трійковий аналог функцій Радемахера
та його узагальнення Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Функції Радемахера відіграють важливу роль у математиці та її застосуваннях, зокрема у теорії рядів Уолша, теорії розкладів функцій в ряди за ортонормованою системою, що є аналогом розкладів функцій за синусоїдальними гармоніками, теорії кодування та передачі сигналів тощо. Вони тісно пов'язані з класичним двійковим зображенням дробової частини дійсного числа, в термінах якого зручно описувати їх властивості. У роботі [2] на основі Q_2 -зображення (яке в якості частинного випадку має двійкове зображення) ми ввели узагальнення функцій Радемахера зі збереженням більшості важливих властивостей. Тепер пропонуємо трійковий аналог цієї сім'ї функцій та його узагальнення на основі симетричного трисимвольного поліосновного Q_3 -зображення чисел [1], яке в якості частинного випадку має традиційне трійкове зображення. Нова послідовність ортогональних функцій означається рівністю:

$$v_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо } \alpha_k(t) = 2, \end{cases}$$

де $\alpha_k(t)$ — k -та цифра Q_3 -зображення числа t .

Лема 1. Якщо $\alpha_k(t)$ — k -та трійкова цифра числа $t \in [0; 1)$, то

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix \frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt.$$

Теорема 2. $\int_0^1 \exp(ixAv_k(t))dt = q_1 + 2q_0 \cos Ax; \int_0^1 v_n(x)dx = 0.$

- [1] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Працьовитий М. В., Маслова Ю. П. Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша // Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3. С. 85–96.

E-mail: ✉¹julia0609mas@gmail.com, ✉²prats4444@gmail.com.

І. С. Мороз

Про одну параметричну сім'ю неперервних функцій з фрактальними властивостями

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Нехай $\mathcal{A}_3 \equiv \{0, 1, 2\}$ — алфавіт трійкової системи числення, $L \equiv \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_3 \times \dots \times \mathcal{A}_3 \times \dots$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{3^k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^3,$$

— трійкове зображення числа $x \in [0; 1]$, $(\alpha_k) \in L$.

Нехай (ε_n) — послідовність додатних дійсних чисел, причому $0 \leq \varepsilon_n < 1$, (g_n) — послідовність векторів, де $\bar{g}_n = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n})$ таких, що:

$$g_{0n} = \frac{1 + \varepsilon_n}{3}, \quad g_{1n} = \frac{1 - 2\varepsilon_n}{3}, \quad g_{2n} = \frac{1 + \varepsilon_n}{3}.$$

Розглядається функція:

$$f(x) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j} \right),$$

де

$$\beta_{0n} = 0, \quad \beta_{1n} = g_{0n} = \frac{1 + \varepsilon_n}{3}, \quad \beta_{2n} = g_{0n} + g_{1n} = \frac{2 - \varepsilon_n}{3}.$$

В роботі [1] було доведено неперервність функції f для всіх значень параметру ε_n , досліджено монотонність та диференційовність для різних значень цього параметру.

У доповіді пропонуються відомі і нові результати щодо властивостей функції f , а саме: структурні, варіаційні, автомодельні і фрактальні, а також властивості рівнів функції.

- [1] *H. Okamoto* A remark on continuous, nowhere differentiable functions. Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 81. (2005). no. 3, 47–50.

E-mail: ✉ inna.yuta@gmail.com.

О. Р. Сатур

Граничні розподіли дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Нехай Ω — деяка скінченна множина, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n > 1$. Зафіксуємо пару ймовірнісних дискретних мір μ, ν , визначених на Ω . Розподіли цих мір на Ω визначають пару векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$: $\mu(\omega_i) = p_i \geq 0$, $\nu(\omega_i) = r_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, тобто вектори $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ та $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ є стохастичними векторами з $\mathbb{R}_+^n$ [1].

Задамо нелінійне, некомутативне перетворення конфлікту $*$ між двома стохастичними векторами $\mathbf{p}, \mathbf{r}$: $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p} * \mathbf{r}$, $\mathbf{r}^1 = \mathbf{r} * \mathbf{p}$.

Тут нова пара векторів $\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1$ визначається за законом:

$$p_i^1 = \frac{p_i(\theta + 1) + \tau_i}{z}, \quad r_i^1 = \frac{r_i(\theta + 1) + \tau_i}{z},$$

де $\theta = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i r_i}$, $\tau_i = \min\{p_i, r_i\}$, коефіцієнт $z = 1 + \theta + W$, де $W = \sum_{i=1}^n \tau_i$. Нормуючий коефіцієнт z забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}^1$ та $\mathbf{r}^1$.

Таким чином задана пара векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ під дією перетворення $*$ породжує траєкторію динамічної системи конфлікту

$$\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}$, $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}$ та

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N}, \quad (2)$$

$$\theta^N = \sum_{i=1}^2 \sqrt{p_i^N r_i^N}, \quad \tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N\},$$

$$z^N = \theta^N + 1 + W^N, \quad W^N = \sum_{i=1}^n \tau_i^N.$$

Теорема. Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (1) з довільною початковою парою стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ ($n > 1$), збігається до граничного стану $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$. Граничний стан $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ є нерухомою точкою, тобто

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty.$$

Причому, якщо $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, то $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}$, $\mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}$. Якщо $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, то $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ і $p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{\tau_i}{W}$, де $\tau_i = \min\{p_i, r_i\}$, $W = \sum_{i=1}^n \tau_i$.

- [1] Кошманенко В. Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту – Київ: Наукова думка, 2016. – 287 с.

E-mail: ✉ kseniajasko@gmail.com.

О. В. Сміян¹, Г. М. Торбін²

Про необхідні і достатні умови фрактальної довірчості сімейств циліндрів Q_∞ -зображення

🏛 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Досліджується проблема довірчості системи покриттів, породженої Q_∞ -зображенням, при обчисленні розмірності Хаусдорфа — Безиковича на $[0, 1)$. У [1], [2] та [3] було отримано деякі достатні умови довірчості такої системи покриттів, але критерію довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича отримано не було.

Нехай $\alpha > 0$ і $\delta \in (0, \alpha)$. Позначимо

$$T(\alpha, \delta, k, m) := \sum_{i=k}^m q_i^\alpha / \left(\sum_{i=k}^m q_i \right)^{\alpha-\delta},$$

$$T^*(\alpha, \delta) := \sup_{k, m} T(\alpha, \delta, k, m).$$

Лема 1. Якщо $T^*(\alpha, \delta) < +\infty$, тоді сімейство $\Phi(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на $(0; 1]$.

Лема 2. Якщо сімейство $\Phi(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на $(0; 1]$, тоді $T^*(\alpha, \delta) < +\infty$.

Теорема 3. Сімейство покриттів $\Phi = \Phi(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на одиничному інтервалі тоді і тільки тоді, коли для довільного $\alpha \in (0, 1)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i^\alpha < +\infty. \quad (1)$$

- [1] Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін. Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞ -символами // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2012. — № 86. — С. 150–162.
- [2] S. Albeverio, Y. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS // Submitted to Acta Mathematica.
- [3] О. В. Сміян. Про достатні умови довірчості системи циліндрів Q_∞ -зображення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 153–163.

E-mail: ✉¹смiян_vlenavv@gmail.com, ✉²торбин_torbin@imath.kiev.ua.

А. С. Чуйков¹, М. В. Працьовитий²**Аналог Трибін-функції, означеної у термінах
ланцюгових та нега-трійкових дробів** ¹Інститут математики НАН України, Київ. ²Інститут математики НАН України, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Неперервні функції з фрактальними властивостями — популярний об'єкт у дослідженнях останніх десятиліть. Це функції, які володіють властивостями самоподібності, самоафінності, автомодельності (графіків або рівнів); функції, множини особливостей яких мають неоднорідну тополого-метричну структуру тощо. Значний клас таких функцій утворюють ніде не монотонні, скрізь або майже скрізь недиференційовні функції.

Доповідь присвячена неперервній ніде не монотонній функції f , яка нега-трійковому зображенню аргумента

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-3} \equiv \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-3)^n}, \quad \alpha_n \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

ставить у відповідність ланцюгове A_2 -зображення значення функції

$$y = f(x) = \Delta_{\beta_1(x) \beta_2(x) \dots \beta_n(x) \dots}^{A_2} = [0; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots],$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1 = 2; \\ 0, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 2; \end{cases} \quad \beta_{k+1} = \begin{cases} 1 - \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k = 2; \\ \beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1} + \alpha_k \neq 2, \end{cases}$$

де елементи ланцюгового A_2 -дробу [1] обчислюються за формулою

$$b_n = 0,5(\beta_n + 1) \in \{0,5; 1\}.$$

У доповіді будуть представлені диференціальні, варіаційні, автомодельні і тополого-метричні властивості функції f , а також властивості множин рівнів та графіка функції. Окрема увага буде приділена зв'язку нега-трійкового зображення числа з класичним трійковим зображенням, а саме: аргументовано доведено, що перше є тривіальним перекодуванням останнього.

[1] Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В. Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журнал. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 452–463.

[2] Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. — Вип. 3. — С. 351–362.

E-mail:  ¹chuykov.artem@gmail.com,  ²prats4444@gmail.com.

О. В. Grytsenko¹, S. V. Karpa²**Dropout as a Bayesian Approximation** National University of “Kyiv-Mohyla Academy”, Kyiv.

Applied Machine Learning (AML) seeks to cover the issues that may arise in the practical application of machine learning in real-world problems. Deep learning architectures such as neural networks (NNs), convolutional neural networks and others are extensively used in AML. However, when it comes to model uncertainty, such tools for regression and classification do not capture it. In comparison, Bayesian models offer a mathematically grounded framework to reason about model uncertainty, but usually come with a prohibitive computational cost. The importance of uncertainty can be considered using the following examples: In the case of classification, a model might return a result with high uncertainty and it may lead to make a decision of passing the input to a human for classification. Model uncertainty is important in such an area of machine learning as reinforcement learning as well. With uncertainty information an agent can make the decision when to exploit and when to explore its environment. Overall, understanding if a model is under-confident or falsely over-confident can help get better performance out of it.

We consider a new theoretical framework casting dropout training in deep neural networks as approximate Bayesian inference in deep Gaussian processes. The theory's direct result gives the tools to model uncertainty with dropout NNs — extracting information from existing models that has been thrown away so far. Accordingly, even without sacrificing either computational complexity or test accuracy, the problem of representing uncertainty in deep learning is decreasing. We perform an extensive study of the properties of dropout's uncertainty. Various network architectures and nonlinearities are assessed on tasks of regression and classification, using MNIST [1] as an example. We show a considerable improvement in predictive log-likelihood and root-mean-square-error compared to existing state-of-the-art methods, and finish by using dropout's uncertainty in deep reinforcement learning [2].

- [1] Ya. LeCun, C. Cortes, C. J. C. Burges, *The MNIST Database of handwritten digits*. <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>
- [2] Y. Gal, Z. Ghahramani, *Dropout as a Bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning*, 2015.

E-mail: ✉¹ogrytsenko@gmail.com, ✉²kasobo2015@gmail.com.

S. O. Kozerenko

Markov graphs of linear and metric maps on trees

 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv.

With any map $\sigma : V(X) \rightarrow V(X)$ on a tree X we can associate its *Markov graph* $\Gamma = \Gamma(X, \sigma)$ which is a directed graph with the vertex set $V(\Gamma) = E(X)$ and the arc set $A(\Gamma) = \{(u_1v_1, u_2v_2) : u_2, v_2 \in [\sigma(u_1), \sigma(v_1)]_X\}$, where $[a, b]_X$ denotes the vertex set of a (unique) shortest path joining vertices a and b in X (see [1]). A map σ on a tree X is called *metric* if $d_X(\sigma(u), \sigma(v)) \leq 1$ for all $uv \in E(X)$. Similarly, σ is *linear* provided $\sigma([u, v]_X) \subset [\sigma(u), \sigma(v)]_X$ for all $u, v \in V(X)$.

Proposition 1. *A map $\sigma : V(X) \rightarrow V(X)$ on a tree X is 1) metric if and only if $\Gamma(X, \sigma)$ is partial functional; 2) linear if and only if the converse digraph $\Gamma^{co}(X, \sigma)$ is partial functional.*

Corollary. *A map σ on a tree X is a linear metric map if and only if each weak component of $\Gamma(X, \sigma)$ is a path or a cycle.*

Proposition 2. *Let $\sigma : V(X) \rightarrow V(X)$ be a linear map on a tree X . Then σ is metric if and only if its image $\text{Im } \sigma$ is connected.*

In [2] the following bounds on the size of Markov graphs for arbitrary maps were obtained.

Proposition 3. [2] *For every map σ on a tree X it holds*

$$|\text{Im } \sigma| - 1 \leq |A(\Gamma(X, \sigma))| \leq |E(X)| \cdot \text{diam } \text{Im } \sigma.$$

Theorem 4. *For a map $\sigma : V(X) \rightarrow V(X)$ on a tree X we have $|A(\Gamma(X, \sigma))| = |\text{Im } \sigma| - 1$ if and only if σ is a linear metric map.*

Given a tree X and a pair of maps $\sigma_i : V(X) \rightarrow V(X)$, $i = 1, 2$ we put $\sigma_1 \leq_m \sigma_2$ if $\Gamma(X, \sigma_1) \subset \Gamma(X, \sigma_2)$. The relation $\leq_m$ is called *Markov preordering* of the class of all maps on X .

Theorem 5. *Let $f : V(X) \rightarrow V(X)$ be a map on a tree X with $|V(X)| \geq 3$. Then 1) the map f is linear if and only if for every pair of maps σ_1 and σ_2 on X with $\sigma_1 \leq_m \sigma_2$ we have $f \circ \sigma_1 \leq_m f \circ \sigma_2$; 2) the map f is metric if and only if for every pair of maps σ_1 and σ_2 on X with $\sigma_1 \leq_m \sigma_2$ we have $\sigma_1 \circ f \leq_m \sigma_2 \circ f$.*

- [1] C. Bernhardt, Vertex maps for trees: algebra and periods of periodic orbits, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **14** (2006), 399–408.
- [2] S. Kozerenko, Markov graphs of one-dimensional dynamical systems and their discrete analogues, *Rom. J. Math. Comput. Sci.*, **6** (2016), 16–24.

E-mail: ✉ kozerenko@univ.kiev.ua.

G. V. Kriukova

On the Robustness of Kernel Principal Component Analysis
 National University of “Kyiv-Mohyla Academy”, Kyiv.

Principal component analysis (PCA) is one of the primary statistical techniques for unsupervised linear dimension reduction and feature extraction. Kernel principal component analysis (KPCA) may be considered as a generalization of linear PCA that allows non-linear feature extraction [1]. The kernel represents an implicit mapping of the data space to a usually higher dimensional space, where linear PCA is performed. It consists of the eigenvalue decomposition calculation or singular value decomposition of centered kernel data, and quantification of orthogonal functions that optimize the kernel data scatter.

Namely, let $\mathcal{X}$ denote the data space, and $\mathcal{H}$ the feature space. The function $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$ is induced by a Mercer kernel $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$. It is known [1], that if $k(\cdot, \cdot)$ is a kernel, then the function $\varphi(\cdot)$ and the feature space $\mathcal{H}$ exist, moreover, $k(x, y) = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$. Let $\mathbf{K}$ denote the kernel matrix, i.e. $\mathbf{K}_{ij} = k(x_i, x_j)$ for items x_i, x_j from training set. KPCA is computed by finding first m eigenvectors corresponding to the largest eigenvalues of the kernel matrix $\mathbf{K}$. The eigenvectors in the feature space V can be computed as $V = \Gamma A$, where $\Gamma = [\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)]$, and A matrix of eigenvectors.

It is well known that the classical PCA and KPCA are not robust against data corruption, and even a small number of outliers can disturb the resulting principal components. Attempts to overcome this issue led to the development of various robustified procedures [2; 3]. However, due to the implicitness of the feature space, some extensions of PCA such as robust PCA cannot be directly generalized to KPCA.

We discuss an approach to treating noise, missing data, and outliers in KPCA, the pros and cons of various robustified KPCA algorithms, compare computational complexity and performance.

- [1] B. Schölkopf, A. Smola, K.-R. Müller, *Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem*, Neural Computation, vol. 10, no. 5, pp. 1299–1319, MIT, 1998. doi:10.1162/089976698300017467
- [2] H. Kamiya, S. Eguchi, *A class of robust principal component vectors*, Journal of Multivariate Analysis, vol. 2, no. 77, pp. 239–269, 2001.
- [3] M. H. Nguyen, F. Torre, *Robust Kernel Principal Component Analysis*, Advances in Neural Information Processing Systems, vol. 21, 2008.

E-mail: ✉ kriukovagv@ukma.kiev.ua.

N. O. Lugovska

On the commuting graphs of unitriangular matrix groups Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy.

An undirected graph, whose vertices are non-central elements of a finite group G and two distinct vertices x and y are connected if and only if $xy = yx$, is called the commuting graph of group G . We denote the commuting graph of G by $\Gamma(G)$.

One of the research directions on the commuting graphs is the direct study of its properties for some special classes of finite groups. Most often, the graph connectivity and some numerical characteristics (independent number, clique number, diameter or minimum size of a vertex cover) of the graph are studied.

In particular, there are series of works that are devoted to the study of commuting graphs of matrix groups (see, for example, [1], [2] and [3]), where the structure of the respective graphs and diameters of connected components are investigated.

We study the commuting graphs of matrix groups over finite unitary rings with p^2 elements. There are 11 finite rings of order p^2 , but only 4 of them are unitary. Namely, $R_1 = \mathbb{Z}_p[x]/\langle x^2 \rangle$, $R_2 = \mathbb{Z}_p[x]/\langle x^2 + x \rangle$, $R_3 = \mathbb{Z}_{p^2}$ and $R_4 = \mathbb{Z}_p[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$. The last one is a field. Therefore, we consider only rings R_1 , R_2 , R_3 . Let's denote by $UT_n(R)$ the group of unitriangular matrices over a ring R .

Lemma. *The center of the group $UT_n(R)$ consists of all matrices of the form $Z = I + a_{1n}E_{1n}$, $a_{1n} \in R$.*

Theorem. *If p is a prime number, $n \geq 3$ and $R = R_1$, R_2 or R_3 then the commuting graph of $UT_n(R)$ is connected and $\text{diam } \Gamma(UT_n(R)) = 3$.*

- [1] Akbari S., Bidkhor H., Mohammadian A. Commuting graphs of matrix algebras, *Comm. in Algebra* 2008, 36 (11), 4020–4031.
- [2] Dolzan D., Bukovsek K., Oblak P. Diameters of commuting graphs of matrices over semirings, *Semigroup Forum* 2012, 88 (2), 365–373.
- [3] Giudici M., Pope A. The diameters of commuting graphs of linear groups and matrix rings over the integers modulo m , *Australasian Journal of Combinatorics* 2010, 48, 221–230.

E-mail: ✉ natashalugovska@gmail.com.

Т. Л. Войтович

Система підтримки рішень на прикладі побудови аналітичного регіонального сервісу

🏛 Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ.

Глибокий територіальний аналіз має вагоме значення для розвитку та допомоги регіонам з низьким рівнем життя. Регіональний добробут справа номер один для кожної громади, організації чи країни. Створення системи підтримки рішень сприятиме у прийнятті корисних рішень, котрі покращать ситуацію у регіонах.

Побудова сервісу, що відображає стан певного регіону досить складний процес. Одним із етапів є збір різних даних, таких як дохід, смертність, кількість лікарень тощо. Вибір найменшої основної територіальної одиниці (наприклад zip code) відіграє важливу роль, адже дані можуть охоплювати як меншу так і більшу територію. Перевірка на коректність і повноту даних — необхідна складова дослідження.

Працюючи над даною задачею, було розглянуто різні методи обрахунку індексу деривації, котрий допоможе показати найбільш неблагополучні і бідні регіони.

Пошук залежності між територіальними даними різних категорій сприятиме кращому розумінню території.

Дане дослідження допоможе краще зрозуміти причини несприятливої ситуації у певних регіонах і знаходження шляхів вирішення даної проблеми.

- [1] Eurostat statistics explained [Електронний ресурс]. — Режим доступу : <https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained>. — Назва з екрану.
- [2] English indices of deprivation [Електронний ресурс]. — Режим доступу : <https://www.gov.uk/government/collections/english-indices-of-deprivation>. — Назва з екрану.

А. С. Волос

Різні групойди на множині елементів узагальненої послідовності Фібоначчі

 Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Послідовність $\{x_n\}$, кожний член x_n якої, починаючи з певного $k + 1$ члена (k -фіксоване), лінійно виражається через k попередніх члени $x_{n-k}, x_{n-(k-1)}, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$, називається лінійною рекурентною послідовністю.

Одним з прикладів лінійних рекурентних послідовностей є послідовність чисел Фібоначчі, тобто послідовність $\{F_n\}$, для якої $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для всіх $n \geq 3$. Узагальненою послідовністю Фібоначчі вважатимемо послідовність, що задається тим самим рекурентним співвідношенням і двома натуральними числами: першим і другим членами, тобто $G_1 = a, G_2 = b, G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ для всіх $n \geq 3$, де $a, b \in N$. Будемо позначати узагальнену послідовність Фібоначчі із початковими параметрами a, b через $\{G_n(a, b)\}$.

Нехай $M_{a,b}$ — множина, елементами якої є всі члени узагальненої послідовності Фібоначчі $\{G_n(a, b)\}$. Для кожної бінарної алгебраїчної операції $*$ пара $\langle M_{a,b}; * \rangle$ буде групойдом. Тому природно дослідити умови, за яких групойд $\langle M_{a,b}; * \rangle$ буде зв'язкою, піврешіткою тощо.

Довільним елементам $x_i, x_j \in M_{a,b}$ поставимо у відповідність елементи $x_i * x_j, x_i \otimes x_j, x_i \odot x_j, x_i \circ x_j$ наступним чином:

$$\begin{aligned} x_i * x_j &= \max\{x_i, x_j\}; & x_i \otimes x_j &= x_{ij}; \\ x_i \odot x_j &= x_{[i;j]}; & x_i \circ x_j &= x_{\max\{i,j\}}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Групойди $\langle M_{a,b}; * \rangle, \langle M_{a,b}; \odot \rangle, \langle M_{a,b}; \circ \rangle$ є комутативними моноїдами, зв'язками, піврешітками, але не є скоротними зліва (справа).*

Теорема 2. *Групойд $\langle M_{a,b}; \otimes \rangle$ є комутативним моноїдом та скоротним зліва (справа).*

- [1] Вечтомов Е. М. Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // Концепт. — 2014. — № 12 (декабрь). — ART14335. — 0,5 п. л. — Режим доступа : <http://e-koncept.ru/2014/14335.htm>

E-mail: ✉ nastyavolos@mail.ru.

М. А. Дуденко

Уніциклічні графи метричної розмірності 2 з двома основними вершинами

 Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ.

Нехай $G = (V, E)$ — простий уніциклічний граф, тобто простий граф, що містить рівно один цикл, $G_1 = (V_1, E_1)$ підграф графа G , що є простим циклом. За графом G однозначно визначається метричний простір (V, d_G) , метрика d_G для довільних вершин v_1, v_2 в якому дорівнює 0, якщо $v_1 = v_2$ і довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини v_1 і v_2 , якщо $v_1 \neq v_2$.

Вершина t розділяє вершини x та y , якщо виконується нерівність: $d_G(t, x) \neq d_G(t, y)$.

Означення 1. [1] Множина $M \subseteq V$ називається *метричним базисом* графа G , якщо для будь-якої пари вершин з V існує $t \in M$, яка розділяє ці вершини, і ця множина є найменшою серед усіх можливих. Кількість вершин в метричному базисі називається *метричною розмірністю* графа G і позначається $\dim(G)$.

Говоритимемо, що вершина $u \in V \setminus V_1$ графа G *проектуються* в вершину $w \in V_1$ якщо для довільної вершини $q \in V_1$ виконується нерівність: $d_G(u, w) < d_G(u, q)$. Вершини степеня 3 циклу, в які проєктуються вершини степеня 3, що лежать поза циклом, називатимемо *основними*, а вершини, в які проєктуються вершини степеня не більшого 2 називатимемо *1-лишковими*.

Теорема. Нехай G_1 — уніциклічний граф, що має метричну розмірність 2 і містить в циклі лише 2 основні вершини u і v , а решта вершин мають степінь 2. Припустимо, що граф G отриманий з графа G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу і кінцями ланцюгів $L_1, \dots, L_k$, причому кожна вершина степеня 2 циклу склеюється з кінцем лише одного ланцюга. Граф G має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли не існує 1-лишкової вершини w такої, що для суміжної з нею вершини a виконуються умови: найкоротший шлях від v до a містить найкоротший підшлях від u до a або навпаки, найкоротший шлях від v до a містить найкоротший підшлях від u до a .

- [1] Chartrand G. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph / Chartrand G., Eroh L., Johnson M. A. // Discrete Appl. Math. — Oellermann, 2000. — P. 99–113.

E-mail: ✉ rita.dudenko@gmail.com.

І. З. Журавель

Алгоритми розв'язання задач великої розмірності з розрідженою матрицею на прикладі моделі Леонтьєва — Форда

 Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ.

Екологічна ситуація в світі погіршується кожного року, тому розробка методів боротьби із забрудненням є актуальним питанням. Модель Леонтьєва — Форда описує економічні процеси з урахуванням фактору забруднення навколишнього середовища. Вона визначає зв'язок між благами і збитками, які утворюються в процесі виробництва продукту та утилізації відходів.

Розглядаються дві основні проблеми при роботі з моделлю Л. — Ф. По-перше, розмірність даних, які подаються на вхід системи, велика, що ускладнює обчислення. По-друге, так як технологічні матриці розріджені, виникає проблема їх зберігання. Дослідження та створення алгоритмів, які можуть працювати з великими обсягами даних, та знаходження оптимального для даної задачі методу зберігання розріджених матриць має вагомое значення.

Було розглянуто різні методи зберігання розріджених матриць. За основний вибрано метод CSV — The compressed sparse vector storage format. Результати досліджень показують, що метод CSV є менш затратним аніж COO, CSR і MSR [2]. Розглядається алгоритм послідовного аналізу варіантів [1], який дозволяє розв'язувати задачі із заданою точністю, незалежно від зумовленості матриць затрат. Планується дослідити роботу алгоритму з використанням методу CSV для зберігання матриць.

Так як реальні дані великої розмірності для досліджень не доступні, будемо їх генерувати автоматично, відразу враховуючи умови продуктивності для матриць.

Дане дослідження оцінить ефективність алгоритму послідовного аналізу варіантів у поєднанні з методом CSV.

- [1] Чорней Н. Б. *Дослідження еколого-економічної моделі Леонтьєва — Форда*. автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Н. Б. Чорней; Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. — К., 2002. — 16 с. — укр.
- [2] *An efficient storage format for large sparse matrices:* / [Aiyoub Farzaneh, Hossein Kheiri, Mehdi Abbaspour Shanmarsi]. — Commun. Fac. Sci. Ank. Series A1, 2009. — volume 58, number 2. — 10 p.

E-mail: ✉ irashuravluk@ukr.net.

О. О. Кураченко

Розширення дилеми в'язня з повторенням Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ.

«Дилема в'язня» — одна з фундаментальних проблем в теорії ігор, приклад неспівпадіння рівноваги Неша та Парето-оптимальної поведінки. Суть проблеми полягає у тому, що приймаючи індивідуально раціональні рішення, разом учасники приходять до нераціонального. Її розширення у «дилему в'язня з повторенням» дозволило Роберту Аксельроду зробити висновки щодо природи кооперації та довіри, зокрема про те що егоїстичні індивіди для досягнення свого егоїстичного блага будуть схильні бути добрими, прощати та не бути заздрисними. Ідея ж полягала у тому, що навіть за умови конкуренції за ресурс кооперація робить здобуття цього ресурсу більш ефективним.

Дослідження Аксельрода спиралися на комп'ютерні моделі, де поведінка кожного «учасника» була запрограмованою і залежала лише від власного алгоритму поведінки та реакції опонента. Перші моделі працювали за «турнірною» схемою, тобто кожна програма взаємодіяла по одному разу з кожною іншою, пізніші були складнішими і у них кожна запрограмована стратегія поведінки втілювалася у «створіннях», що взаємодіяли кожне з кожним у раунді та могли самовідтворюватися за умови здобуття певної кількості очок внаслідок раунду. Таким чином відбувалася певного роду емуляція процесу природнього добору.

Основою цієї доповіді є розширення останньої моделі Аксельрода у двох напрямках: збільшення діапазону можливих варіантів рішення (у оригіналі — 2), та можливість збереження «істотами» інформації про минулі взаємодії та наслідування її при народженні нової істоти. Перше надає більшу гнучкість у налаштуваннях поведінки «істот», друге ж є важливішим і дозволяє «істотам» змінювати свою поведінку у залежності від оточення.

Головним завданням є подальший аналіз висновку Аксельрода про значущість впливу оточення на ефективність конкретної стратегії, а також вивчення того, яка з двох навичок: хороша тактика чи хороша здатність до адаптації (та які їх комбінації) є більш ефективною.

[1] Robert Axelrod, *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, December 5, 2006.
E-mail: ✉ oleh.kurachenko@gmail.com.

В. І. Мороз

Борелівські ігри оптимального знаходження у стані

🏛 Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ.

В роботі розглядаються нескінченні борелівські ігри для n гравців на скінченному графі з цілями, заданими як борелівські підмножини. Борелівськими підмножинами називаються всі відкриті підмножини топологічного простору.

На даному етапі розглядаються борелівські ігри досягнення стану для n гравців.

На кожному кроці гравці здійснюють певні дії, згідно зі своїми стратегіям. Залежно від цих дій та стохастичних матриць переходу між станами, гра переходить в новий стан, або залишається в тому ж. Кожен гравець отримує виплату відповідно до своєї матриці виграшу.

В роботі розглянуто різні комбінації кількості гравців, їх стратегій, станів. В [1] доведено, що борелівські ігри оптимального стану мають ε -рівновагу за Нешем. Тобто, існує така сукупність стратегій гравців, при якій кожен гравець реалізовує свою оптимальну стратегію, передбачаючи дії інших, з відхиленням, меншим за ε . Задача полягає в аналізі отриманих даних та знаходженні такої сукупності стратегій, що гра завжди перебувала в стані, який задовольняє умовам ε -рівноваги Неша.

- [1] Chatterjee K., Jurdzinski M., Majumdar R. On Nash Equilibria in Stochastic Games. — Computer Science Division (EECS), University of California, 2003. — 21.

E-mail: ✉ moroz.volodym@gmail.com.

В. В. Мусієнко

Системи підтримки рішень в управлінні трудовими ресурсами

 Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ.

Підбір персоналу — це один з основних обов'язків рекрутерів, HR-менеджерів чи виконуючих їх обов'язки на підприємстві. Правильний вибір може допомогти збільшити продуктивність, бойовий дух працівників та прибутки. Наслідками неправильного вибору є велика плінність кадрів та низька компетенція.

Існує безліч методик та правил, дотримуючись яких можна підбирати кращих кандидатів та проводити інтерв'ю ефективніше. Проте в умові великої кількості кандидатів на позицію, такий ручний підхід стає дорогим, як у сенсі ресурсів рекрутера, так і у сенсі супроводжуваних програмних рішень для контролю процесів. Система, що розробляється в рамках цієї дипломної роботи, дозволяє за допомогою евристик та моделей даних оцінити вагу кандидата при підборі на конкретну вакансію.

Навчання моделей є контрольованим і побудовано на основі відкритих даних українського форуму програмістів Developers Of Ukraine (DOU.ua). Використовується техніка для зменшення розмірності, що добре підходить для візуалізації багатовимірних наборів даних (t-SNE). Результатом є графічне зображення, що дозволяє знайти та якісно оцінити відповідність кандидатів до тієї чи іншої вакансії.

E-mail: ✉ vit.musienko@gmail.com.

В. А. Ольшевська

Комутатори силовських 2-підгруп знакозмінних груп

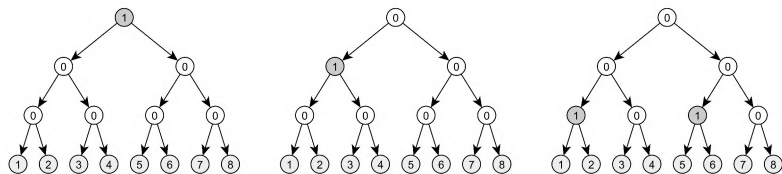
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ.

Нехай $Syl_2(A_{2^n})$ — силовська 2-підгрупа знакозмінної групи степеня 2^n , $n \geq 1$. Її елементи задаються за допомогою бінарних n -рівневих вершинно-помічених кореневих дерев $T_{2,n}$ з помітками 0 або 1 на кожній не висячій вершині. Таке дерево буде задавати елементи групи $Syl_2(A_{2^n})$ тоді й лише тоді, коли на передостанньому рівні кількість поміток 1 є парною.

Використавши результати роботи [1], в якій було обчислено комутант групи $Syl_2(A_8)$, та застосувавши теорему 1 роботи [2], отримуємо

Твердження. *Кожен елемент комутанта силовської 2-підгрупи знакозмінної групи A_8 є комутатором.*

У групі $Syl_2(A_8)$ виберемо систему твірних, що складається з елементів α_0 , α_1 і α_2 , визначених такими поміченими деревами:



Тоді

$$\alpha_0 = (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8), \quad \alpha_1 = (1, 3)(2, 4), \quad \alpha_2 = (1, 2)(5, 6).$$

Має місце

Теорема. *Множина комутаторів твірних α_0 , α_1 і α_2 породжує в комутанті групи $Syl_2(A_8)$ власну підгрупу порядку 4.*

- [1] Ольшевська В. А. Силовська 2-підгрупа знакозмінної групи A_8 // Збірник тез конференції “Шевченківська весна”, Київ, 2017.
- [2] Robert M. Guralnick Expressing group elements as commutators // Journal of Mathematics, Volume 10, Number 3, 1980.

E-mail: ✉ vitoida@mail.ru.

М. С. Ольшевський

Відстані в графах Келі знакозмінних груп

 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ.

Розглядається задача знаходження відстаней між вершинами в орієнтованому графі Келі [1] знакозмінної групи відносно деякої природної системи твірних. Вводиться поняття канонічного розкладу підстановки в цій системі твірних та розглядається класифікація підстановок. Для знаходження канонічних розкладів розглядаються множини слів $\Omega_{n,k}$, $k \geq n-2$, елементи якої співставляються підстановкам за допомогою певного відображення ϕ і певного набору $T_m(\vec{t}, \vec{l})$, де $m \geq 1$, $\vec{t}, \vec{l}$ — деякі цілочисельні вектори. На основі цих понять запропоновано алгоритм серединного спуску, який дозволяє отримувати канонічні розклади підстановок.

Для початкової множини слів $\Omega_{n,n-2}$ отримано наступний результат:

Теорема. 1) Якщо n непарне, то для довільного $w = [w_1 w_2 \dots w_{n-2}]$ маємо

$$\begin{aligned}\phi(w) &= (1w_2w_4 \dots w_{n-3} 2w_1w_3 \dots w_{n-2}), \\ \phi(\Omega_{n,n-2}) &= T_1\left(\frac{n+3}{2}, n\right).\end{aligned}$$

2) Якщо n парне, то для довільного $w = [w_1 w_2 \dots w_{n-2}]$ маємо

$$\begin{aligned}\phi(w) &= (1w_2w_4 \dots w_{n-2})(2w_1w_3 \dots w_{n-3}), \\ \phi(\Omega_{n,n-2}) &= T_2\left((1, 2), \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

- [1] Богопольский О. В. Введение в теорию групп. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

E-mail: ✉ msolshevskiy@gmail.com.

Н. Д. Полтавець

Про двовимірні неабелеві алгебри Лі диференціювань

 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і $\mathbb{K}[x, y]$ — кільце многочленів. Нагадаємо, що $\mathbb{K}$ -лінійне відображення $D : \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \mathbb{K}[x, y]$ називається $\mathbb{K}$ -диференціюванням кільця $\mathbb{K}[x, y]$, якщо для D виконується правило Лейбніца: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$, $\forall f, g \in \mathbb{K}[x, y]$.

Усі $\mathbb{K}$ -диференціювання кільця $\mathbb{K}[x, y]$ утворюють алгебру Лі $W_2(\mathbb{K})$, будова якої вивчалася в багатьох роботах (див, наприклад, [1], [3]). Існує багато відкритих питань про $W_2(\mathbb{K})$, наприклад, знаменита проблема якобіана може бути переформульована в термінах ізоморфізму деяких підалгебр із $W_2(\mathbb{K})$.

Важливим є питання про вкладення неабелевих двовимірних підалгебр в алгебру Лі $W_2(\mathbb{K})$. Нагадаємо деякі означення (див., наприклад, [2]): якобіанним диференціюванням $D_u \in W_2(\mathbb{K})$ називаються диференціювання, що визначається многочленом $u \in \mathbb{K}[x, y]$ за правилом $D_u(f) = \det J(u, f)$, де $\det J(u, f)$ — визначник матриці Якобі многочленів u, f .

Многочленом Дарбу диференціювання D називаються многочлен $f \in \mathbb{K}[x, y]$ такий, що $f \neq 0$ та $D(f) = hf$, для деякого $h \in \mathbb{K}[x, y]$.

Теорема. *Нехай $D_1, D_2 \in W_2(\mathbb{K})$. Якщо $[D_1, D_2] = D_2$ (тобто $\mathbb{K}\langle D_1, D_2 \rangle$ — неабелева двовимірна підалгебра з $W_2(\mathbb{K})$), то або D_1, D_2 мають спільний многочлен Дарбу, або $D_1 = D_u$ — якобіанне диференціювання для деякого $u \in \mathbb{K}[x, y]$ і D_2 має сталу дивергенцію.*

- [1] A. P. Petravchuk, O. G. Iena On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $SA_2(k)$ // J. Lie Theory. 2006. Vol. 16, №3. — P. 561–567.
- [2] Andrzej Nowicki, Masayoshi Nagata Rings of constants for k-derivations in $k[x_1; \dots; x_n]$ // J. Math. Kyoto Univ. 1988. — Vol. 28, № 1. P. 111–118.
- [3] V. S. Gavran, V. V. Stepukh On weakly semisimple derivations of the polynomial ring in two variables // Algebra and Discrete mathematics 2014. — Vol. 18, № 1. — P. 50–58.

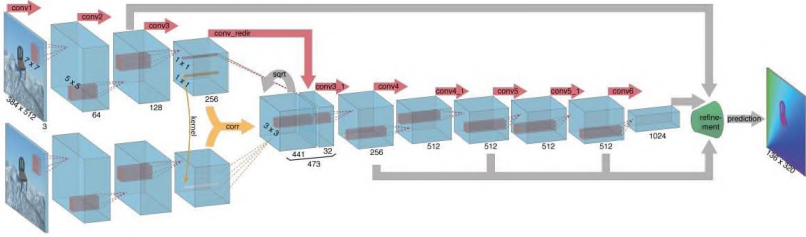
E-mail: ✉ natalkapoltavets@gmail.com.

А. С. Пономарчук

Генерація зображень за допомогою CNN та GAN

 Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ.

В цій роботі розглянуто метод інтерполяції проміжних зображень. Для цього використовуємо згорткові нейронні мережі (convolutional neural network, CNN), а в якості архітектури для їх тренування Generative Adversarial Nets (GAN). Для застосування даного методу потрібно дві нейронні мережі: та, що створюватиме зображення, G (від “Generator”), а інша перевірятиме згенероване першою зображення та буде визначати чи це згенероване зображення, чи ні (позначатимемо через D , від “Discriminator”), див. Рис. 1. За основу для G візьмемо CNN, архітектура якої описана в статті [1].

Рис. 1: Схема мережі G

Дана схема реалізується наступним чином: тренуємо D , щоб максимізувати ймовірність визначення правильності обох типів зображень (згенероване G чи оригінальне). Одночасно тренуємо G , щоб зменшити $\log(1 - D(G(I^f, I^s)))$, де I^f, I^s — два зображення, між якими потрібно побудувати перехідне. Іншими словами, побудова G та D зводиться до розв’язання оптимізаційної задачі $\min_G \max_D V(D, G)$, де

$$V(D, G) = \mathbf{E}_{I^t \sim p^{train}(I^t)}[\log(D(I^t))] + \mathbf{E}_{I^f, I^s \sim p^G(I^f, I^s)}[1 - \log(D(G(I^f, I^s)))].$$

- [1] Ph. Fischer, A. Dosovitskiy, E. Ilg, Ph. Hausser, C. Hazırbaş, V. Golkov. *FlowNet: Learning Optical Flow with Convolutional Networks*, 2015. <https://arxiv.org/abs/1504.06852>

E-mail: ✉ ponomarchuk.anton@gmail.com.

Б. С. Пономарчук

Нескінченні узагальнення просторів Хемінга

 Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ.

Означення 1. Супернатуральним числом, або числом Стейніца, називається формальний добуток $\prod_{p \in P} p^{k_p}$ де P — множина всіх простих чисел, $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ для всіх $p \in P$.

Нехай u — деяке нескінченне супернатуральне число. Нескінченну $\{0, 1\}$ -послідовність $\mathbf{a}$ називатимемо *u -періодичною*, якщо мінімальний період цієї послідовності є дільником числа u .

Означення 2. [1] u -періодичним простором Хемінга називається множина всіх u -періодичних $\{0, 1\}$ -послідовностей з метрикою, що визначається для довільних послідовностей $\mathbf{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ і $\mathbf{y} = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$ за правилом:

$$d_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l |x_i - y_i|,$$

де l — деякий спільний період послідовностей $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$.

Означення 3. [2] Простором Вейля визначеним над алфавітом A називається множина послідовностей з заданою метрикою:

$$d_W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\#\{j \in [k+1, k+l] : x_j \neq y_j\}}{l},$$

де $\#$ — кількість елементів множини.

Теорема. Для довільного супернатурального числа u u -періодичний простір Хемінга є підпростором простору Вейля.

- [1] B. Oliynik, V. I. Sushchansky. The isometry groups of the Hamming spaces of periodic sequences, Sib. Math. J. 54 (2013), 124–136.
- [2] F. Blanchard, E. Formenti, P. Kurka. Cellular Automata in the Cantor, Besicovitch, and Weyl Topological Spaces, Complex Systems 11 (1997), 107–123.

E-mail: ✉ ponomarchuk.bogdan@gmail.com.

В. А. Прохорчук

Декомпозиція автоматів і елементарні матриці

🏛 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ.

Нехай $GL(2, \mathbb{Z})$ — повна лінійна група степеня 2 над кільцем $\mathbb{Z}$, FAT_4 — група скінченно автоматних підстановок над алфавітом $X = \{1, 2, 3, 4\}$ (див. [1]). В роботі [2] було наведено зображення групи $GL(2, \mathbb{Z})$ автоматами t та u_{12} (рис. 1) з FAT_4 .

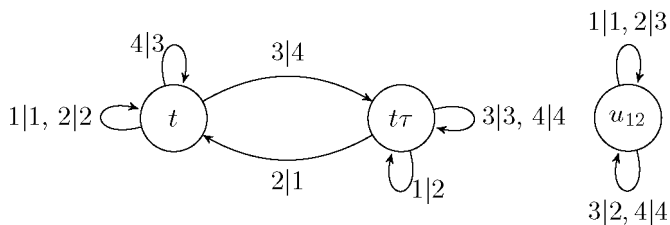


Рис. 1: Автомати t , u_{12}

Для оцінки складності декомпозиції автоматів у термінах цих автоматів отримано такий результат.

Теорема. Нехай A , B — довільні автомати в FAT_4 , k_0 — кількість станів у A , $A = A_1 A_2 A_3 \dots A_l$, $B = B_1 B_2 B_3 \dots B_m$, де $A_i, B_j \in \{u_{12}, t, t^{-1}\}$, $i \in \overline{1, l}$, $j \in \overline{1, m}$, n — кількість дій, необхідна для переходу від A до B . Тоді

$$4k_0(m + l) \leq n \leq 8k_0(2^{m+l} - 1).$$

- [1] Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Суцанский Автоматы, динамические системы и группы // Труды мат. института им. Стеклова **1**, 2000, р. 134–214.
- [2] A. M. Brunner, Said Sidki The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite state automata // International Journal of Algebra and Computation Vol. 8, No. 1, 1998, p. 127–139.

E-mail: ✉ proveronika145@gmail.com.

А. О. Санжаровська

Кольорова задача про Ханойські вежі Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ.

Розглядається варіація класичної задачі про Ханойські вежі (див. напр. [1]). Нехай дано три кілки, на одному з них розташовано вежу з n дисків, причому під кожним диском, окрім найнижчого, розташовано диск більшого діаметра. Пронумеруємо диски, і вважатимемо, що перший диск є найменшим, а n -ий — найбільшим. Диски з непарними порядковими номерами пофарбовано в один колір (червоний), з парними — в інший (синій). Мета гри — перемістити вежу на інший кілок з урахуванням таких правил:

- за один крок можна перемістити лише один диск, і тільки той, що розташований нагорі свого стеку;
- кожен диск можна класти лише на диск більшого діаметра;
- кожен диск можна класти лише на диск іншого кольору.

Теорема 1. *Для задачі про двокольорову Ханойську вежу існує розв'язок, причому мінімальна кількість кроків рівна мінімальній кількості кроків класичної задачі $2^n - 1$, де n — кількість дисків.*

[1] Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2009. — 159 с.

E-mail: ✉ aastasuhan@gmail.com.

Ю. В. Співак

Інвестиційні процеси максимізації прибутку

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Розглянемо фірму, яка тримає частину коштів «на руках», а частину в вигляді акцій. Якщо фірма утримує надто багато коштів в чистому вигляді, то вона втрачає гроші з точки зору витрат, коли може заробити більше через відсотки від куплених акцій. З іншого боку, якщо майже всі кошти утримуються в цінних паперах, то фірма вимушена продавати акції і кожного разу сплачувати комісію. Проблема полягає в тому, щоб знайти компроміс між кількістю коштів, що будуть у чистому вигляді і тих, що будуть у вигляді акцій.

Щоб сформулювати задачу керування введемо наступні позначення: N — кількість акцій, якими оперує фірма, T — час, $x_0(t)$ — кількість грошей «на руках», $x_1(t), \dots, x_N(t)$ — акції, $d(t)$ — попит на гроші, $u_1(t), \dots, u_N(t)$ — відсоток продажу акцій (якщо $u < 0$ — купівля акцій), $r_0(t)$ — відсоткова ставка на кошти в чистому вигляді, $r_1(t), \dots, r_N(t)$ — відсоткові ставки на акції, α — куртаж (кошти, що сплачуються брокеру за продаж чи покупку цінних паперів), $0 < \alpha < 1$.

Отже, основна задача записується таким чином:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(t) &= r_0(t)x_0(t) - d(t) + \sum_{i=0}^N u_i(t) + \alpha \left| \sum_{i=0}^N u_i(t) \right|, \\ \dot{x}_1(t) &= r_1(t)x_1(t) - \sum_{i=0}^N u_i(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_N(t) &= r_N(t)x_N(t) - \sum_{i=0}^N u_i(t),\end{aligned}$$

причому $x_0(0) = x_0^0, x_1(0) = x_1^0, \dots, x_N(0) = x_N^0, -U_2(t) \leq u(t) \leq U_1(t)$, де U_1 і U_2 — неперервні функції, $U_1 \geq 0, U_2 \geq 0$.

Функціонал виглядає наступним чином:

$$J = [x_0(T) + x_1(T) + \dots + x_N(T)] \rightarrow \max.$$

Для розв'язання такої задачі був побудований код програми, що базується на використанні принципу максимума, який обчислює

відповідні відсотки купівлі-продажу акцій. Обчислене таким чином керування приводить до максимально можливого прибутку фірми у кінцевий час T .

- [1] Sethi, Suresh P. (2000). Optimal control theory: applications to management science and economics. — 2nd ed.
- [2] Murata, Yasuo (1931). Optimal control methods for linear discrete-time economic systems.

E-mail: ✉ spivak.u@yandex.ru.

А. С. Флоренко

Мінімаксні оцінки функціоналів від випадкових полів, що спостерігаються на «перфорованій» площині

🏛 Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ.

Дослідження та використання теорії інтерполяції випадкових полів потребують і задачі обробки сигналів у радіо- та гідролокації, і проблеми розпізнавання образів мовних сигналів та зображень, і задачі виявлення міри присутності природних копалень, і задачі фінансової математики. В усіх цих напрямках з'являється необхідність інтерполяції функціоналів від невідомих значень випадкового поля, що спостерігається з шумом на «перфорованій» площині, тобто площині із значним числом правильно розташованих отворів правильної форми (перфорацій) в листовому або іншому матеріалі.

Задачі інтерполяції були досліджені для випадкових стаціонарних послідовностей з А. М. Колмогоровим [1], для однорідних за часом ізотропних полів на сфері М. Й. Ядренком, для полів на площині для М. П. Моклячуком та Н. Ю. Щестюк [2], [3].

У даній роботі досліджено задачу лінійного оптимального оцінювання функціонала

$$A_k \xi = \sum_{(l,k) \in K} a(k,l) \xi(k,l) = \\ = \sum_{t_1=0}^{s_x-1} \sum_{t_2=0}^{s_y-1} \left(\sum_{k=t_1 l_x}^{t_1 l_x + m_x - 1} \sum_{j=t_2 l_y}^{t_2 l_y + m_y - 1} a(k,j) \xi(k,j) \right)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, $(k,j) \in K$ даними спостережень поля, що спостерігається з шумом $\xi(k,j) + \eta(k,j)$ при $(k,j) \in Z^2 \setminus K$, де K — деяка область, яка представляє собою об'єднання отворів у вигляді прямокутників $m_x \times m_y$, причому кількість прямокутників по горизонталі — s_x , а кількість прямокутників по вертикалі — s_y . Тобто знайдено таку оцінку $\tilde{A}_k \xi$ з класу лінійних функціоналів, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta = M |A_k \xi - \tilde{A}_k \xi|^2.$$

Для розв'язання цієї задачі використано два методи. Для задач з відомою спектральною щільністю, використано класичний метод

проекцій у Гільбертовому просторі. Знайдено спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала та величину середньоквадратичної похибки.

Мінімаксний метод до задач оцінювання доцільно застосовувати в тому випадку, коли точні значення щільностей не відомі, а відомо лише, що вони є елементами деякого класу спектральних щільностей $D = D_F \times D_G$. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деяких спектральних щільностей, ми шукаємо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу D .

Наводяться приклади оцінювання функціоналів для перфорованої площини різного вигляду.

- [1] Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве / А. Н. Колмогоров // Бюллетень МГУ. — 1941. — Т. 2, № 6. — С. 1–40.
- [2] Моклячук М. П., Щестюк Н. Ю. Оцінки функціоналів від випадкових полів // М. П. Моклячук, Н. Ю. Щестюк: Монографія — Уж. : ПП «АУТДОР-ШАРК», 2013. — 228 с.
- [3] Масютка О. Ю., Моклячук М. П. Мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних полів // О. Ю. Масютка, М. П. Моклячук: Монографія — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. — 216 с.

E-mail: ✉ florenko.anastasia@gmail.com.

Р. С. Яворський

Властивості періодичних біотопних просторів

 Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ.

Означення 1. Супернатуральним числом, або числом Стейніца, називається формальний добуток $\prod_{p \in P} p^{k_p}$ де P — множина всіх простих чисел, $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ для всіх $p \in P$. Зауважимо, що довільне натуральне число є також супернатуральним.

Нехай $u \in \mathbb{SN}$ — деяке супернатуральне число. Нескінченну $\{0, 1\}$ -послідовність $\mathbf{a}$ називатимемо u -періодичною, якщо мінімальний період цієї послідовності є дільником числа u .

Розглянемо конструкцію періодичного біотопного простору, що є узагальненням скінченних біотопних просторів, які було введено для потреб математичної біології в роботі [1]

Означення 2. u -періодичним біотопним простором $B(u)$ називається множина всіх u -періодичних $\{0, 1\}$ -послідовностей з заданою на ній метрикою d_B , що визначається рівністю для довільних u -періодичних послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ і $y = (y_1, y_2, \dots)$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y, \\ \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i \oplus y_i| \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i \vee y_i| \right\}, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де n — спільний період послідовностей x і y .

Теорема 1. Нехай $B(u)$ — періодичний біотопний простір. Тоді мають місце такі твердження:

1. Якщо u — натуральне число, то простір $B(u)$ ізометричний скінченному біотопному простору B_u .
2. Співвідношення $B(u) \subseteq B(v)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $u|v$.
3. Простори $B(u)$, за відношенням включення утворюють решітку, яка ізоморфна решітці супернатуральних чисел відносно відношення подільності.

[1] Marczewski F., Steinhaus H. On certain distance of sets and the corresponding distance of functions // Colloquium Mathematicum, 6, 1958, 319–327.

Д. А. Ярмоленко

Коаліційні ігри з локальною взаємодією

🏛 Національний університет «Киево-Могилянська академія», Київ.

У даній роботі досліджуються марковські процеси прийняття рішень на системах, заданих на графі. Граф описує систему околів, згідно з якими обирається наступний стан системи. Зміна станів системи відбувається синхронно та локально.

В ході роботи планується реалізувати програмний застосунок для пошуку оптимальної стратегії керування системою [1] та запропонувати шляхи для його вдосконалення.

Вище вказаний алгоритм можна застосувати для побудови, наприклад, економічних моделей [2; 3]. Також можливе застосування в біології [4], фізиці [5], дослідженні операцій та інженерії [6].

- [1] Дадуна Г., Кнопов П. С., Чорней Р. К. Локальное управление марковскими процессами взаимодействия на графе с компактным множеством состояний // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 3. — С. 62–77.
- [2] David P. A., Foray D. Percolation structures, Markov random fields. The economics of EDI standards diffusion. — Center for Economical Policy Research, Stanford University, 1992. — 55 p.
- [3] David P. A., Foray D., Dalle J. - M. Marshallian externalities and the emergence and spatial stability of technological enclaves. — Stanford. — 1996. — (Preprint Center for Economical Policy Research, Stanford University)
- [4] Dobrushin R. L., Kryukov V. I., Toom A. L. (ed.) Locally Interacting Systems and Their Application in Biology // Lecture Notes in Mathematics 653, Springer Berlin, 1978.
- [5] Liggett T. Interacting particle systems. — Springer-Verlag, New York, 1989.
- [6] Kelly F. P. Reversibility and Stochastic Networks. — Wiley, New York, 1979.

E-mail: ✉ yarddim@gmail.com.

М. С. Новак

Аналіз розрахункових методів визначення теплового стану будівельних сталевих конструкцій при пожежі

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Будівельні сталеві конструкції (балки, колони) через вплив теплового потоку при пожежі, який має конвекційну та радіаційну складові, нагріваються і змінюють свій тепловий стан. Для визначення цього стану існує декілька спрощених та уточнених розрахункових методів [1], аналіз яких і є метою даної роботи.

Спрощені розрахункові методи передбачають рівномірний розподіл температури в перерізі сталевих конструкцій. У одному з них використовують математичну модель, яка містить диференційне рівняння теплопровідності (1), граничну умову складного радіаційно-конвекційного теплообміну на обігрівній поверхні конструкції, умову ідеального теплового контакту на границі між вогнезахисним покриттям і сталевим елементом. В іншому спрощеному методі застосовують формулу, за якою температуру сталеві конструкції визначають для різних інтервалів часу вогневого впливу з кроком, який не перевищує 30 с. Уточнений розрахунковий метод передбачає нерівномірний розподіл температури в перерізі сталевих конструкцій при пожежі і застосування в математичній моделі диференційного рівняння теплопровідності, як для покриття та і для сталевих елементів конструкції.

$$c_p \rho_p \frac{\delta \theta_p}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\lambda_p \frac{\delta \theta_p}{\delta x} \right), \quad (1)$$

де x — координата у покритті; t — час; θ_p — температура покриття; λ_p , c_p , ρ_p — коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність та густина покриття.

Результати досліджень свідчать про те, що може бути значна відмінність між розрахунковими даними щодо теплового стану конструкцій, отриманими уточненим та спрощеними методами. Зокрема, різниця між значеннями температури сталеві балки [1], визначеними цими методами, в деяких її точках досягає 44,5 %.

[1] ДСТУ-Н Б В.2.6-211:2016 *Проектування сталевих конструкцій. Розрахунок конструкцій на вогнестійкість.*

E-mail: ✉ andyanderson1945@gmail.com.

О. В. Палій

Застосування методу Лежандра — Гауса — Лобатто для задачі оптимального керування

 Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ.

Задано задачу керування літальним апаратом у вигляді системи з шести диференціальних рівнянь у частинних похідних $(x(t), y(t), z(t))$ — змінні стану ракети в момент часу t , $V(t)$, $\Theta(t)$, $\Psi(t)$ — відповідно швидкість та кути відхилення вектора швидкості від площин OY та OX) на часовому інтервалі $t \in [T_0, T]$.

Задача полягає у побудові оптимальної траєкторії руху літального апарату та знаходженні функцій керування в моменти часу, використовуючи метод чисельного інтегрування Лежандра — Гауса — Лобатто.

Часовий проміжок $t \in [T_0, T]$ розбивається на інтервали виду

$$t^j \in \left[T_0 + \frac{(T - T_0)(j - 1)}{M}, T_0 + \frac{(T - T_0)j}{M} \right], \quad j = 1, \dots, M.$$

Праві частини рівнянь станів та компонент швидкості дискретизуються за допомогою інтерполяційних многочленів Лагранжа, які виражаються через функції Лежандра, якщо попередньо звести розбиття інтервалу часу до $[-1, 1]$ за допомогою відповідної заміни.

$$g(t^j) = g^{N_j}(t^j) \approx \sum_{i=0}^{N_j} g_i^j \text{Lagr}_i^j(\tau^j).$$

Тоді

$$\text{Lagr}_i^j(\tau) = \frac{(\tau^2 - 1)L'_{N_j}(\tau)}{(\tau - \tau_k^j)(N_j + 1)N_j L_{N_j}(\tau_k^j)},$$

де τ — момент часу на j -му інтервалі, а τ_i — i -тий вузол Гауса — Лобатто на відповідному інтервалі. Вузли Гауса — Лобатто — це нулі похідної функції Лежандра на заданому домені. Тоді розв'язок можна знайти у вигляді

$$x_k^j = x_0^j + \frac{T - T_0}{2M} \int_{-1}^{\tau_k^j} \sum_{i=0}^{N_j} \text{Lagr}_i^j(\tau^j) g_i^j d\tau^j.$$

Для знаходження керування α , β нашої системи, застосовуємо метод найменших квадратів.

E-mail: ✉ hpalii1994@gmail.com.

Т. О. Бойчук

Математичні методи і моделі в економіці Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Знання з фундаментальних математичних дисциплін та вміння їх застосовувати до побудови та дослідження математичних моделей в галузі економіки — невід’ємна частина професійної підготовки сучасного вчителя економіки.

В доповіді пропонується аналіз груп математичних методів, що використовуються в економетрії, деякі з яких представлені в наступній таблиці.

Математичні моделі та методи	Відповідні економетричні моделі, методи та алгоритми
- Матриці, дії над ними, ранг матриці, визначники; - системи лінійних рівнянь (СЛР); - лінійна залежність і незалежність векторів.	- МНК (метод найменших квадратів); - матрична форма визначення коефіцієнтів лінійної регресії для однофакторної та багатофакторної моделей; - мультиколінеарність; - узагальнений МНК для випадку автокореляції та гетероскедастичності.
- Необхідні та достатні умови екстремуму функції багатьох змінних; - властивості деяких класів нелінійних функцій; - ряди Фур’є.	- МНК; - визначення параметрів деяких кривих зростання; - методи дослідження моделей сезонних коливань (ковзних-середніх, Фур’є аналізу та сплайн наближень);
- Статистичні оцінки; - статистичні критерії.	- Аналіз вхідних статистичних даних; - перевірка ряду гіпотез (адекватність рівняння, значущість параметрів, наявність мультиколінеарності, гетероскедастичності, автокореляції).

[1] Лук’яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. — К.: Знання, 1998. — 494 с.

E-mail: ✉ tetiana2310@ukr.net.

В. О. Горбачук

**Використання хмарних сервісів у навчанні
математичної статистики** Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

На сьогодні, в час стрімкого розвитку інформаційно-комунікаційних технологій та тотальної інформатизації суспільства, все більш актуальною стає проблема використання цих технологій в навчальному процесі вищих навчальних закладів. Як показує досвід, одним з шляхів вирішення даної проблеми є розбудова єдиного інформаційного простору та впровадження у навчальний процес так званих «хмарних технологій». Це актуально і для навчання математичних дисциплін, зокрема, математичної статистики.

Хмарні технології — це модель, що передбачає віддалену обробку та зберігання даних, надання користувачам мережі Інтернет доступу до комп'ютерних ресурсів сервера і використання програмного забезпечення як онлайн-сервіса. До таких сервісів можна віднести: Web-додатки; он-лайн сервіси; сховища файлів, спільний доступ до файлів; електронні журнали та щоденники; системи дистанційного навчання, бібліотеки, медіатеки; ресурси для спільної роботи тощо. Зокрема, для навчання математичної статистики можуть бути використані: GoogleDocs та Office 365 для роботи з електронними таблицями, проведення автоматизованих розрахунків, а також текстовими редакторами для створення і обміну практичними завданнями, задачами, для підготовки звітів по лабораторно-практичних заняттях тощо; SageMathCloud для проведення розрахунків; Dropbox, SkyDrive, GoogleDisk для зберігання та обміну завданнями, інформаційними джерелами, звітами, розв'язками поставлених завдань; BoosterEducationPack для створення і проведення онлайн тестувань, ведення електронного журналу, контролю і самоконтролю знань студентів, теоретичної підготовки до виконання і захисту лабораторно-практичних робіт [2].

- [1] Вакалюк Т. А. Перспективи використання хмарних технологій у навчальному процесі загальноосвітніх навчальних закладів України / Т. А. Вакалюк, В. В. Поліщук // Педагогіка вищої та середньої школи. — Випуск 46. — Кривий Ріг, 2015. — С. 114–119.
- [2] Горбачук В. О. Математична статистика. Лабораторно-практичні заняття: навчальний посібник / В. О. Горбачук. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. — 127 с.

E-mail: ✉ gorbachuk.vas@gmail.com.

О. І. Охотіна

Методичні вимоги до організації проектного навчання математики Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Впровадження проектних технологій у навчанні математики в школі потребує визначення методичних вимог щодо їх організації. Перша — це професіоналізм вчителя щодо впровадження проектних технологій. Сучасний вчитель знайомий з методом проектів, але, можливо, ще не застосовував його у своїй практиці. Більшість звикли до традиційного, знаннєвого підходу у навчанні, який покладає на вчителя роль авторитарного керівника. Він має бути не тільки інформаційно обізнаним, але і психологічно налаштованим на організацію, консультування та управління проектом. Для цього, за необхідності, доцільно скористатись тренінгами з даної тематики. Друга вимога — це підготовка учнів до проектної діяльності. Щоб отримати очікуваний результат від реалізації проекту з математики учнів обов'язково необхідно підготувати до такої діяльності, зацікавити новим видом початкової роботи, пояснити переваги, ознайомити з етапи цього процесу. Якщо клас не знайомий з проектами, то доцільно почати з невеликих проектів терміном на тиждень, щоб навчити учнів незнайомій діяльності, а далі поступово планувати триваліші проекти. Третя вимога — це визначення мети і завдань проекту. Перед початком проекту необхідно визначити його мету, конкретний результат та відповідно до цього сформулювати завдання для учнів. Четверта — це планування проекту. Вчитель має забезпечити узгодженість теми навчального проекту з математики з вимогами державного стандарту та навчальної програми. Термін виконання проекту має перекликатись з датами календарно-тематичного планування вибраної теми. П'ята вимога — забезпечення управління проектом та консультування учнів. Діяльність вчителя має бути спрямована на управління проектом, консультування учнів, діагностику виникаючих проблем та корекцію напрямку дій.

Виконання таких вимог допоможе вчителю успішно впроваджувати проектні технології у процес навчання математики в школі та отримати бажане задоволення від співпраці з учнями та їх високих навчальних досягнень.

[1] Голубенко М. Проектна діяльність у школі. — К.: Шк. світ. 2007. — 128с.

E-mail: ✉ piano.elena.23@mail.ru.

М. І. Парчук

Використання елементів STEM-освіти у навчанні математичних дисциплін майбутніх учителів фізики Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

Однією із сучасних тенденцій в освіті, що забезпечить розвиток високотехнологічного суспільства є STEM-освіта (Science, Technology, Engineering, Mathematic). Враховуючи постійну інтеграцію дисциплін, реалізацію міжпредметних зв'язків, можна стверджувати, що саме майбутнім учителям математики та фізики зручно і варто реалізовувати STEM на своїх уроках. Проте для того, щоб студенти могли робити це якісно у своїй професійній діяльності, варто і викладачам ВНЗ використовувати такий напрям у своїй роботі.

Часто STEM-освіта використовує власні інноваційні міжпредметні навчальні програми, звісно ж, з використанням ІКТ. Також STEM використовує навчання не за предметами, а за темами. Тобто так звані бінарні і тернарні уроки. Наприклад, вивчати тему «Теореми додавання та множення ймовірностей» з майбутніми учителями фізики можна так:

1) розв'язування задач фізичного змісту на послідовне та паралельне з'єднання провідників у замкненому електричному колі, обчислення опору, сили струму та напруги; використання теореми додавання і множення; відповідальний — викладач теорії ймовірностей та математичної статистики;

2) виконання лабораторної роботи з перевірки залежності значення загального опору кола від опору на окремих ділянках кола при паралельному та послідовному з'єднаннях провідників; відповідальний — викладач електрики та магнетизму.

3) створення програми для обчислення опору, сили струму та напруги на замкненій ділянці кола при паралельному та послідовному з'єднаннях провідників в залежності від опору на окремих ділянках кола; відповідальний — викладач основ програмування.

Таке хвильове занурення у вивчення різних тем та їхній взаємозв'язок між собою дає можливість студентам бачити міжпредметні зв'язки між знаннями та дисциплінами, розуміти взаємозв'язки окремих тем шкільного курсу, формувати науковий світогляд, ключові компетентності, критичне мислення у себе та майбутніх учнів. А це все сприяє формуванню якісно нового вчителя, підвищує якість освіти та рівень життя населення.

E-mail: ✉ parchukmi@gmail.com.

О. С. Сушко

Використання теорії графів на уроках математики Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ.

У доповіді розглядається доцільність і необхідність вивчення елементів теорії графів у загальноосвітній школі, оскільки, популярність графів і кількість праць з чистої теорії графів та її застосувань неухильно зростає. За допомогою графа моделюються будь-які схеми, в яких виділяються більш прості частини (вершини) і зв'язки між ними (ребра). Не дивно, що графи зустрічаються у дослідженнях з соціології, психології, економіки, теорії ігор, логіки, програмування, механіки (в т.ч. квантової та статистичної), електро- і радіотехніки, кристалофізики, хімії, медицини тощо.

У зв'язку із цим істотно зростає актуальність проблеми формування знань учнів про елементи теорії графів як одного із важливих розділів дискретної математики.

Вивчення елементів теорії графів відіграє значну роль у розв'язанні загальних завдань навчання, виховання і розвитку школярів, оскільки: 1) зміст основних понять теорії графів, відібраний і методично підкріплений з урахуванням специфіки шкільного курсу математики, може бути ефективно використаний для вдосконалення прийомів розумової діяльності учнів і розвитку в них дослідницького, творчого підходу до постановки і розв'язування різноманітних задач; 2) теорія графів охоплює теоретичні і прикладні аспекти інформаційної діяльності людини; вивчення цих питань важливе для формування сучасної інформаційної картини світу, а отже, і світогляду школярів; 3) вивчення елементів теорії графів відіграє значну роль у формуванні та розвитку в учнів потреби постійно розширювати і поглиблювати свої знання, коректно формулювати та ефективно розв'язувати задачі в різних сферах практичної діяльності.

В теорії графів можна виділити велику кількість задач прикладного змісту, для розв'язування яких є доцільним використання комп'ютера, особливо на уроках закріплення набутих знань, оскільки основною метою в таких випадках є використання набутих теоретичних знань для створення відповідної математичної та інформаційної моделі, а не формування певних технічних методів та навичок. Візуалізація моделі явища у поєднанні з обчислювальними, інформаційними та моделюючими можливостями комп'ютера найкраще пояснює сутність досліджуваного явища.

E-mail: ✉ sushkosasha2008@ukr.net.

Показчик

Drozdhenko V. O.	9	Мороз В. І.	60
Grytsenko O. V.	51	Мороз І. С.	46
Karpa S. V.	51	Мороз М. П.	27
Khainatska K. I.	10	Мусієнко В. В.	61
Kozerenko S. O.	52	Новак М. С.	75
Kriukova G. V.	53	Ольшевська В. А.	62
Lugovska N. O.	54	Ольшевський М. С.	63
Sukhorukova O. O.	11	Острійчук К. Р.	28
Voloshyna V. O.	12	Островська А. Г.	29
		Охотіна О. І.	79
Бойчук Т. О.	77	Палій О. В.	76
Василенко Н. А.	40	Парчук М. І.	80
Войтович Т. Л.	55	Полтавець Н. Д.	64
Волос А. С.	56	Пономарчук А. С.	65
Волошин Д. А.	14	Пономарчук Б. С.	66
Гарко І. І.	39	Працьовитий М. В. 32, 45,	50
Горбачук В. О.	78	Прохорчук В. А.	67
Дивляш Н. В.	16	Ратушняк С. П.	30
Донецький С. В.	17	Рогова Н. В.	31
Дуденко М. А.	57	Санжаровська А. О.	68
Дудкін М. Є.	18	Сатур О. Р.	47
Єрьоміна Т. О.	19	Свинчук О. В.	32
Журавель І. З.	58	Сіренко В. О.	33
Заболотько Т. О.	21	Сіренька І. І.	34
Замрій І. В.	40	Слуцький О. В.	35
Калашнікова Є. І.	41	Сміян О. В.	49
Ковальова О. В.	18	Співак Ю. В.	69
Кураченко О. О.	59	Стрій Є. О.	36
Кусій В. В.	22	Сушко О. С.	81
Лагодзінський О. Є.	23	Тимошенко О. А.	34
Лемешко Є. І.	24	Торбін Г. М.	49
Лисенко І. М.	42	Турчина Н. І.	37
Лупаїн М. Л.	43	Флоренко А. С.	71
Маляр О. В.	25	Чубик Л. М.	38
Маркітан В. П.	44	Чуйков А. С.	50
Маслова Ю. П.	45	Яворський Р. С.	73
Матюшина К. Ю.	26	Ярмоленко Д. А.	74

Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених
з математики та фізики
(Київ, 21–22 квітня 2017 року)

Відповідальні за випуск:

Крюкова Г. В.

Олійник Б. В.

Руссєв А. В.

Комп'ютерна верстка:

Руссєв А. В.

Підп. до друку 10.04.2017 р. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Фіз. друк. арк. 5,25. Ум. друк. арк. 4,9.
Обл.-вид. арк. 4,7. Зам. № 3378. Наклад 100.

Друкарня «Гордон»

03179, м. Київ, вул. Котельникова, 95

Тел./факс: 044 501-35-69

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1422 від 08.07.2003 р.