Аксіоми відокремлюваності в топологічних просторах

Гапоненко Владислав Олександрович

к.ф.-м.н. Козеренко С.О.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
Кафедра математики факультету інформатики

Зміст

Означення аксіом відокремлюваності

Ми кажемо, що простір, де для кожних двох точок існує відкрита множина, що містить тільки одну з них є T_0-**простором**.

T_1-**простір** - це такий, що для всіх пар точок $x, y \in X$ існують такі їх околи U_x та U_y відповідно, що $y \notin U_x$ і $x \notin U_y$.

T_2-**простір** - це такий, в якому кожні дві точки мають різні неперетинні відкриті множини.

Простір, що відповідає аксіомі відокремлюваності T_3 є таким, в якому для кожної точки x і замкненої множини A, що $x \notin A$ існують відкриті множини $x \in U_x, A \subseteq U_A$, що $U_x \cap U_A = \varnothing$.

T_4-**простором** є такий, в якому будь-які різні замкнені множини, що не перетинаються, належать різним диз'юнктивним відкритим множинам.

Критерії T_1-простору

Теорема 3.2 Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:

1. X є T_1-простором;
2. кожна одноточкова множина в X є замкненою;
3. кожна стала з деякого номера послідовність має єдину границю.

З теореми випливає зручна характеристика T_1-простору, що кожна його одноточкова множина є замкненою. Як наслідок маємо, що коскінченна топологія є найслабшою з усіх T_1-топологій. Іншим наслідком є те, що топологічний простір Алєксандрова (зокрема, кожен простір зі скінченним носієм) є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли він дискретний.

Критерії T_1-простору

Твердження 3.5 Топологічний простір X є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли єдиними його сильно зв'язними множинами є порожня множина та одноточкові множини.

Твердження 3.6 Топологічний простір X є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Ker}\, A = A$ для всіх множин $A \subset X$.

Твердження 3.13 Топологічний простір є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли він симетричний T_0-простір.

Критерій $T_{1/2}$-простору

Теорема 3.7 Топологічний простір є $T_{1/2}$-простором тоді й тільки тоді, коли кожна його одноточкова множина є замкненою або відкритою.

Як наслідок отримуємо, що кожен T_1-простір є $T_{1/2}$-простором, а кожен $T_{1/2}$-простір є T_0-простором.

Критерії T_0-простору

Наслідок 3.14Для T_0-простору X наступні умови еквівалентні:

1. X є симетричним простором;
2. X є $T_{1/2}$-простором;
3. X є T_1-простором.

З теореми випливає взаємозв'язок T_0 аксіоми відокремлюваності з сильнішими аксіомами і симетричними просторами.

Твердження 4.1 Топологічний простір є T_2-простором тоді й тільки тоді, коли він є R_1-простором та T_0-простором.

Теорема 4.2 Має місце наступний ланцюжок логічних імплікацій: T_2 ⇒KC⇒US⇒ T_1.

Жодна з імплікацій не розвертається.

Твердження 5.3 Топологічний простір X є регулярним тоді й тільки тоді, коли для кожної точки його $x \in X$ та її околу $U_x \subset X$ існує відкрита множина $V \subset X$ така, що $x \in V \subset \mathrm{Cl}\, V \subset U$.

Твердження 5.4 Нехай X регулярний простір. Тоді X є T_3-простором тоді й тільки тоді, коли X є T_0-простором (еквівалентно, $T_{1/2}$-простором або ж T_2-простором).

Як наслідок отримуємо, що кожен T_3-простір є T_2-протсором, а отже T_1 і T_0 просторами.

Твердження 5.9 Кожен замкнений підпростір нормального простору теж є нормальним.

Твердження 5.10 Топологічний простір є нормальним тоді й тільки тоді, коли для будь-якої відкритої множини $U \subset X$ та будь-якої замкненої множини $F \subset X$ із $F \subset U$ існує відкрита множина $V \subset X$ із $F \subset V \subset \operatorname{Cl} V \subset U$.

Взаємозв'язок нормальних та регулярних просторів

Теорема 5.11 Кожен регулярний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є нормальним.

Література

- P. Bhat and A.K. Das, Some new higher separation axioms via sets having non-empty interior, *Cogent Math*, **2:1092695** (2015), 9p.
- K.K. Dube, A note on R_1-topological spaces, *Period. Math. Hung.* **13(4)** (1982), 267–271.
- N. Levine, Strongly connected sets in topology, *Amer. Math. Monthly* **72(10)** (1965), 1098–1101.
- N. Levine, Generalized osed sets in topology, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **19(1)** (1970), 89–96.
- G.D. Maio, A separation axiom weaker than R_0, *Indian J. Pure Appl. Math.* **16(4)** (1985), 373–375.

Література

- P. Urysohn, Uber die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen, *Math. Annalen* **94(1)** (1925), 262–295.
- A. Wilansky, Between T_1 and T_2, *Amer. Math. Monthly* **74(3)** (1967), 261–266.