# Дослідження якості моделі фінансового ринку з «активним» часом

Дубницька Марія

# модель фінансового ринку з деривативами

**Математична модель:**

- Включає рух безризикових активів
- Дозволяє моделювати рух базових ризикованих активів
- Визначити справедливу ціну деривативів

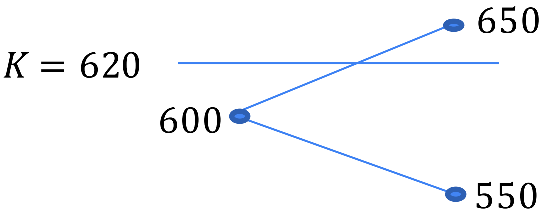
# Деривативи. Кол/пут-опціони. Платіжна фнкція.

- **Дериватив - це фінансовий інструмент, вартість якого залежить від ціни іншого активу, який називається базовим активом.**
- **Кол- і пут-опціони – це деривативи (договори), які надають право на купівлю або продаж активу відповідно за певною ціною до певної дати в майбутньому.**
- **Преміум - ціна, яку платить покупець за опціон.**

**Використовуються для захисту від ризику цінових коливань**

Платіжна функція для кол-опціону:

$$(S_T - K) = \begin{cases} S_T - K, S_T \geq K \\ 0, S_T < K \end{cases}$$



# Option pricing – справедлива ціна-преміум

**Чинники для ціноутворення опціонів:**

- вартість базового активу – $P_t$
- ціна страйк – $K$
- волатильність ринку – $\sigma$
- рівень процентних ставок – $r$
- час до закінчення терміну опціону – $Y$

# Black-Scholes model як класична модель

- **модель руху базових активів:**

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \qquad P_t = P_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

- **Ціна call опціону**:

$$Call_{BS} = Pe^{-\sigma(Y-t)} N(d_1) - Ke^{-r(Y-t)} N(d_2)$$

де $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Y}{\sigma\sqrt{Y}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{Y}$

$N(*)$ – стандартна кумулятивна функція нормального розподілу

- **Ціна put опціону**: Put = call - stock + present value of exercise price.

$$Put_{BS} = Call_{BS} - Ke^{-\bar{r}(Y-t)} - Pe^{-\sigma(Y-t)}$$

# Модель з ринковим часом

- **модель руху базових активів:**

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \theta dT_t + \sigma dW_{T_t}, \qquad P_t = P_0 e^{\mu t + \theta T_t + \sigma W_{T_t}}$$

- **Ціна call опціону:**

$$C(Y,K) = \int_0^{\infty} \left(P_0 \mathrm{N}(d_1) - K e^{-rY} \mathrm{N}(d_2)\right) f_{T_Y}(t) dt$$

де $d_1 = \frac{log\frac{P_0}{K}+rY+\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$, $d_2 = \frac{log\frac{P_0}{K}+rY-\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$,

$\mathrm{N}(*)$ – стандартна кумулятивна функція нормального розподілу,

$f_{T_Y}(t)$ – щільність $T_Y - \frac{1}{\sqrt{Y}} f_{R\Gamma}\left(\frac{u-E(\sqrt{Y}-Y)}{\sqrt{Y}}, \frac{v}{2}, \frac{\delta^2}{2}\right)$.

- **Ціна put опціону:** P = call - stock + present value of exercise price.

# Ринковий час T

- Новий час $T_t$ – це додатний, неспадний стохастичний процес:

$$T_0 = 0, T_t = \sum_{i=1}^{[t]} \tau_i + \tau_{[t]+1}(t - [t]),$$

де $\tau_t$ – послідовність стаціонарних приростів часу, необов’язково незалежних

- Припускаємо, що $\tau_t$ підкорюється оберненому гамма-розподілу $R\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2}\right)$, де $\nu > 2$, $\delta > 0$, з щільністю:

$$f_{R\Gamma}(x, \alpha, \beta) = \frac{(\alpha)^{\beta}}{\Gamma(\beta)} x^{-\beta-1} e^{-\alpha * x} I_{x>0},$$

де $\alpha = \frac{\nu}{2}$, $\beta = \frac{\delta^2}{2}$, $I$ – індикатор

# Параметри – значення та знаходження

- **log-дохідності:**

$$X_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \mu + \theta\tau_t + \tau_t^{\frac{1}{2}} W_1$$

Отримали з: $P_t = P_0 e^{\mu t + \theta T_t + \sigma W_{T_t}}$

- **Твердження [1]:** Якщо $\tau_t$ має обернений гамма розподіл то:

$\tau_t^{\frac{1}{2}} W_1$ – розподіл Стьюдента $T(\nu, \mu, \delta)$

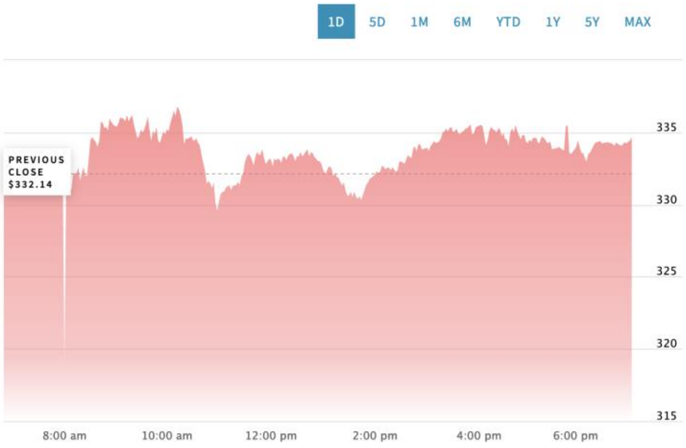
# Ринкові ціни опціонів

- **Ресурс:** Nasdaq - https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/nflx

**April 28, 2023**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Apr 28 | 23.30 | -5.55 ▼ | 30.15 | 31.60 | 1 | 82 | 295.00 | 0.02 | -0.06 ▼ | 0.02 | 0.04 | 268 | 1556 |
| Apr 28 | 26.30 | -- | 27.80 | 29.10 | -- | 12 | 297.50 | 0.02 | -0.08 ▼ | 0.02 | 0.17 | 101 | 2410 |
| Apr 28 | 26.10 | +4.00 ▲ | 25.15 | 26.65 | 74 | 186 | 300.00 | 0.02 | -0.09 ▼ | 0.02 | 0.03 | 1422 | 4019 |
| Apr 28 | 20.35 | -2.08 ▼ | 22.80 | 24.10 | 1 | 10 | 302.50 | 0.02 | -0.13 ▼ | 0.01 | 0.03 | 942 | 814 |
| Apr 28 | 19.50 | +2.45 ▲ | 20.25 | 21.60 | 7 | 137 | 305.00 | 0.03 | -0.18 ▼ | 0.02 | 0.04 | 1426 | 2240 |

Dividend History
Historical Quotes
Historical NOCP
Financials
Earnings
P/E & PEG Ratios
**Option Chain**
Short Interest
Institutional Holdings
Insider Activity
SEC Filings
Revenue EPS



# похибки оцінювання - statistical error measures

Для оцінка якості моделі обраховуємо два показники статистичної похибки [2]:

$$RPE = \frac{\widehat{p_i} - p_i}{p_i}$$

$$ARPE = \left| \frac{\widehat{p_i} - p_i}{p_i} \right|$$

де $\widehat{p_i}$- теоретична ціна, і $p_i$ - реальна (ринкова)

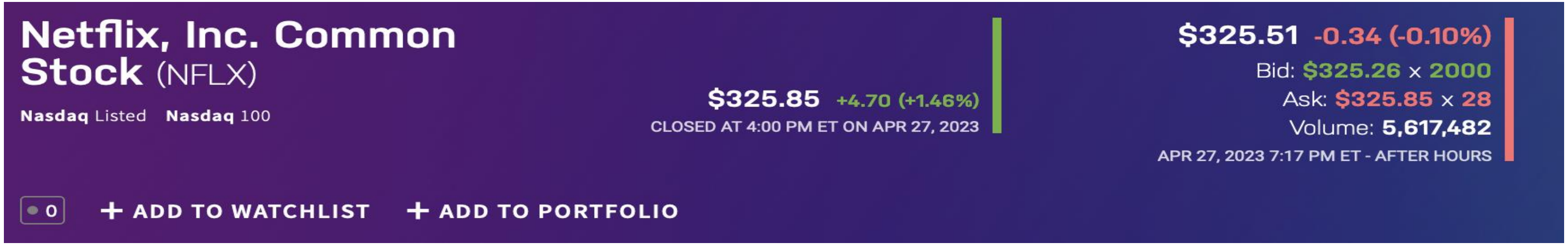
# Регресія для оцінювання якості запропонованої моделі

$$ARPE = a_0 + a_1 Time\ to\ matutity + a_2 Moneyness + \epsilon,$$

де $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Для даної регресії необхідно визначити параметри $a_0, a_1, a_2$.

# Numerical results




**Компанія:** Netflix - Netflix, Inc. Common Stock (NFLX)

**April 28, 2023**

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Apr 28 | 23.30 | -5.55 ▼ | 30.15 | 31.60 | 1 | 82 | 295.00 | 0.02 | -0.06 ▼ | 0.02 | 0.04 | 268 | 1556 |
| Apr 28 | 26.30 | -- | 27.80 | 29.10 | -- | 12 | 297.50 | 0.02 | -0.08 ▼ | 0.02 | 0.17 | 101 | 2410 |
| Apr 28 | 26.10 | +4.00 ▲ | 25.15 | 26.65 | 74 | 186 | 300.00 | 0.02 | -0.09 ▼ | 0.02 | 0.03 | 1422 | 4019 |
| Apr 28 | 20.35 | -2.08 ▼ | 22.80 | 24.10 | 1 | 10 | 302.50 | 0.02 | -0.13 ▼ | 0.01 | 0.03 | 942 | 814 |
| Apr 28 | 19.50 | +2.45 ▲ | 20.25 | 21.60 | 7 | 137 | 305.00 | 0.03 | -0.18 ▼ | 0.02 | 0.04 | 1426 | 2240 |

# Numerical results

**крок 1:**

Обираємо відрізок часу (8 днів)

**крок 2:**

Обираємо $K_1, \dots, K_{10}$ - беремо дані з Nasdaq про $p_i$ для кожного дня $T_i$ та кожної ціни $K_j$

| Date<br>Strike | 2023-02-09 | 2023-02-10 | 2023-02-11 | 2023-02-13 | 2023-02-14 | 2023-02-15 | 2023-02-16 | 2023-02-17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **330.0** | 38.2 | 33.95 | 21.22 | 29.58 | 29.0 | 28.86 | 28.75 | 17.49 |
| **332.5** | 40.0 | 40.0 | 19.29 | 27.75 | 27.68 | 27.99 | 28.85 | 14.94 |
| **335.0** | 33.0 | 26.35 | 17.5 | 25.75 | 25.46 | 24.79 | 24.47 | 12.74 |
| **337.5** | 33.8 | 33.8 | 15.5 | 23.92 | 23.13 | 22.75 | 18.2 | 11.0 |
| **340.0** | 34.0 | 22.28 | 12.71 | 21.25 | 21.17 | 19.16 | 18.25 | 8.2 |
| **342.5** | 26.35 | 23.15 | 12.15 | 18.0 | 18.5 | 17.4 | 16.3 | 5.65 |
| **345.0** | 24.55 | 19.25 | 9.95 | 17.7 | 16.5 | 15.03 | 13.46 | 3.0 |
| **347.5** | 23.6 | 15.85 | 8.65 | 15.4 | 14.5 | 12.98 | 11.04 | 0.51 |
| **350.0** | 19.85 | 14.1 | 7.42 | 13.5 | 12.97 | 11.34 | 9.4 | 0.01 |
| **352.5** | 18.7 | 12.5 | 6.45 | 11.8 | 11.2 | 8.55 | 7.0 | 0.01 |

# Реалізація

**крок 3:**

Визначаємо $P_0$ - початкову ціну (сьогодні) для кожного $K$ та параметри $\nu, \mu, \sigma$

```
def get_params(data):
    log_returns = np.log([data/data.shift(1)])[0][1:]
    nu, mu, sigma = t.fit(log_returns)
    #x, loc, scale
    return nu, mu, sigma
```

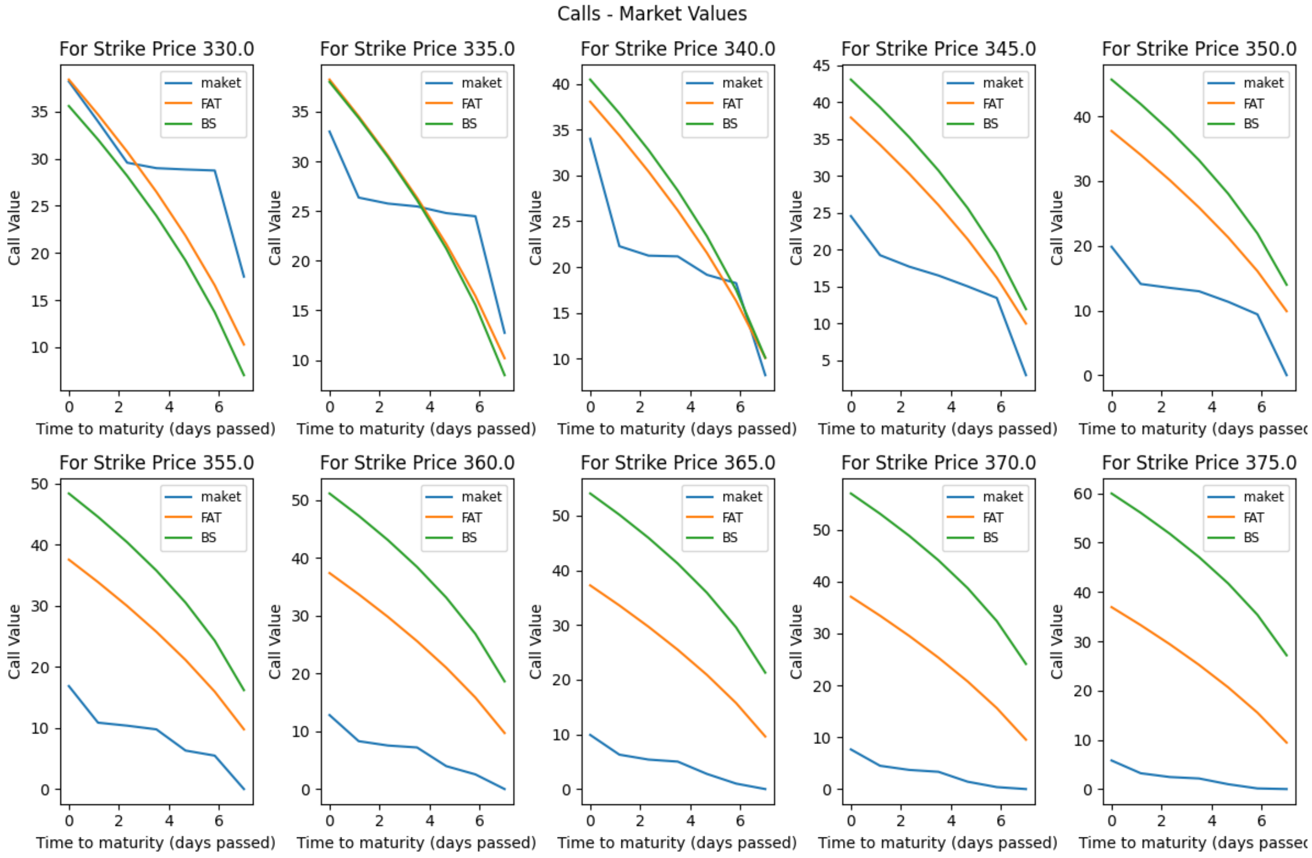
```
data = pd.read_excel(r'/Users/mariiadubnytska/Desktop/Diploma/HistoricalData.xlsx')
nu, mu, sigma = get_params(data["Last"])
```

**крок 4:**

Обраховуємо теоретичні call option price $\widehat{p_i}$ за *B-S model* та *моделлю з ринковим часом* для $P_0$

```
def optionpricing(Y, K, P0, r, nu, delta, sigma):
    def integrand(t):
        fty_t = fty(Y, nu, delta, t)
        d1_t = d1(Y, K, P0, sigma, r, t)
        d2_t = d2(Y, K, P0, sigma, r, t)
        return (((P0 * norm.cdf(d1_t)) - (K * math.exp(-(r*Y)) * norm.cdf(d2_t))) * fty_t)
    # The [0] index is used to extract the value of 'y' from the tuple and return it
    # as the output of the optionpricing function.
    return integrate.quad(integrand, 0, np.inf)[0]
```

# Реалізація


Calls - Market Values
For Strike Price 330.0
For Strike Price 335.0
For Strike Price 340.0
For Strike Price 345.0
For Strike Price 350.0
For Strike Price 355.0
For Strike Price 360.0
For Strike Price 365.0
For Strike Price 370.0
For Strike Price 375.0
maket
FAT
BS
Call Value
Time to maturity (days passed)

# Реалізація

**крок 5:**

Створюємо табличку $RPE$ та $ARPE$ похибок

```
def ARPE(p_hat, p_i):
    return abs((p_hat - p_i)/p_i)

def calculating_ARPE_row(calls_row, p_i):
    return [ARPE(calls_row[i], p_i) for i in range(len(calls_row))]

def calculating_ARPE(pred_calls, ps):
    return [calculating_ARPE_row(pred_calls[i], ps[i]) for i in range(len(pred_calls))]
```

**крок 6:**

Знаходимо статистичні характеристики похибок $RPE$ та $ARP$

**Для моделі з ринковим часом**

```
RPEs_mt Mean: 78.01495310386247
RPEs_mt Median: 1.4495437949191161
RPEs_mt Standard Deviation: 158.7409343969822

ARPEs_mt Mean: 78.06999894499442
ARPEs_mt Median: 1.4495437949191161
ARPEs_mt Standard Deviation: 158.7609142123085
```

**Для моделі Блека-Шоулза**

```
RPEs_BS Mean: 167.0926888923711
RPEs_BS Median: 2.3256087108193437
RPEs_BS Standard Deviation: 366.1131841755968

ARPEs_BS Mean: 167.16945636518673
ARPEs_BS Median: 2.3256087108193437
ARPEs_BS Standard Deviation: 366.1284173902591
```

# Реалізація

**крок 7:**

Обраховуємо $Moneyness$ для всіх $P_t$

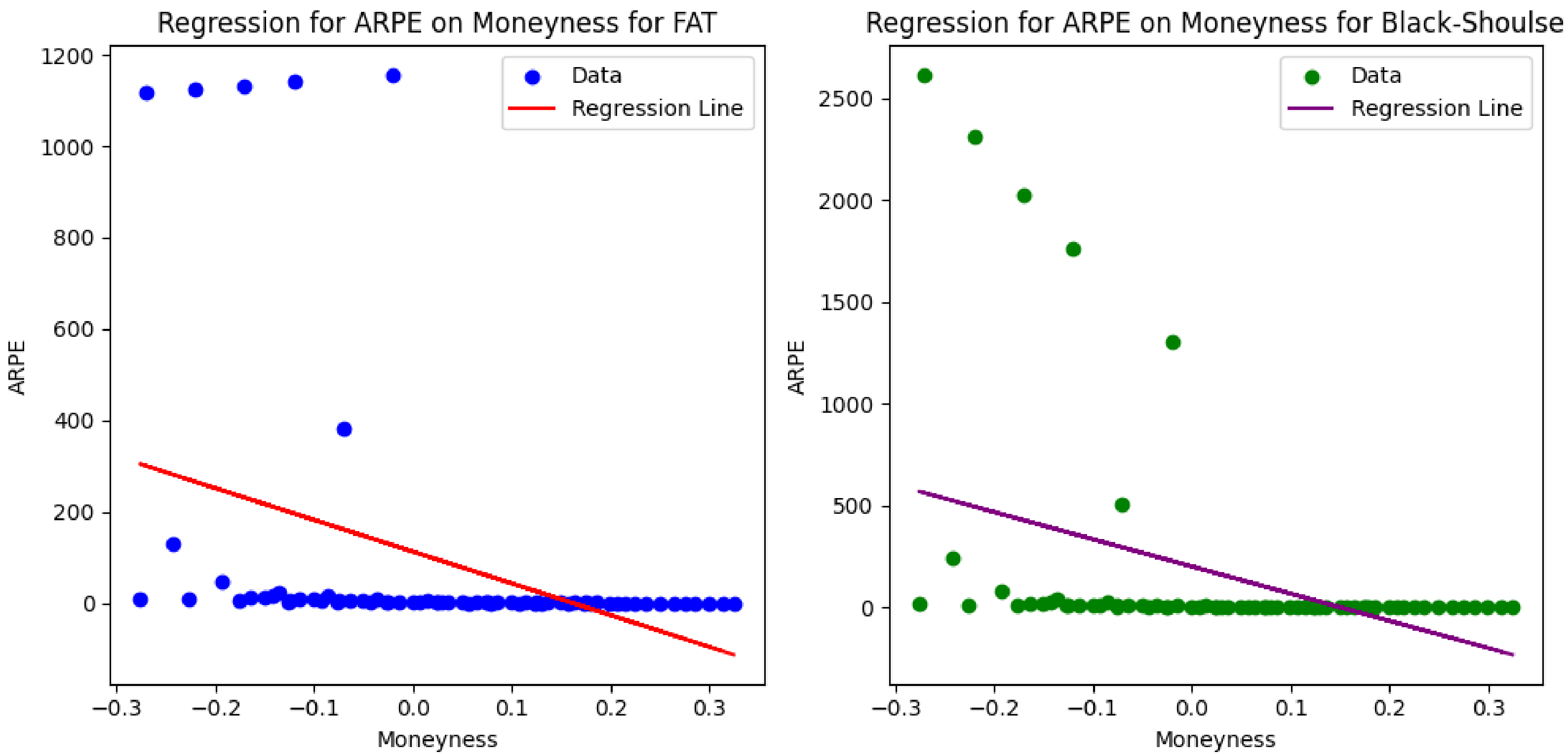
```
def calculate_moneyness(P0, K):
    return (P0 - K)/100

def moneyness_for_all_days(Ps, Ks):
    moneyness = np.zeros((len(Ks), len(Ps)))
    for j in range(len(Ks)):
        moneyness[j] = [calculate_moneyness(i, Ks[j]) for i in Ps]
    return moneyness
```

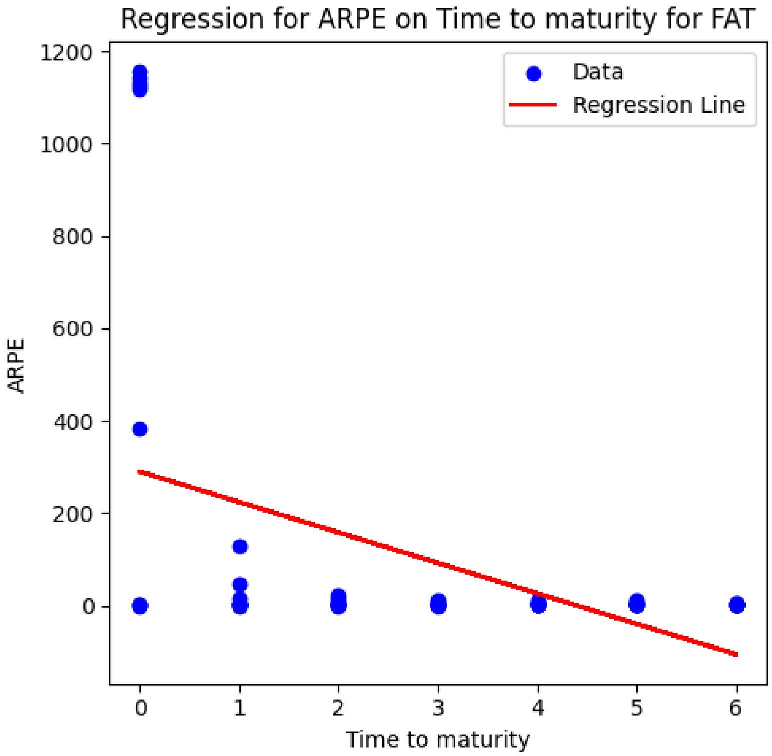
**крок 8:**

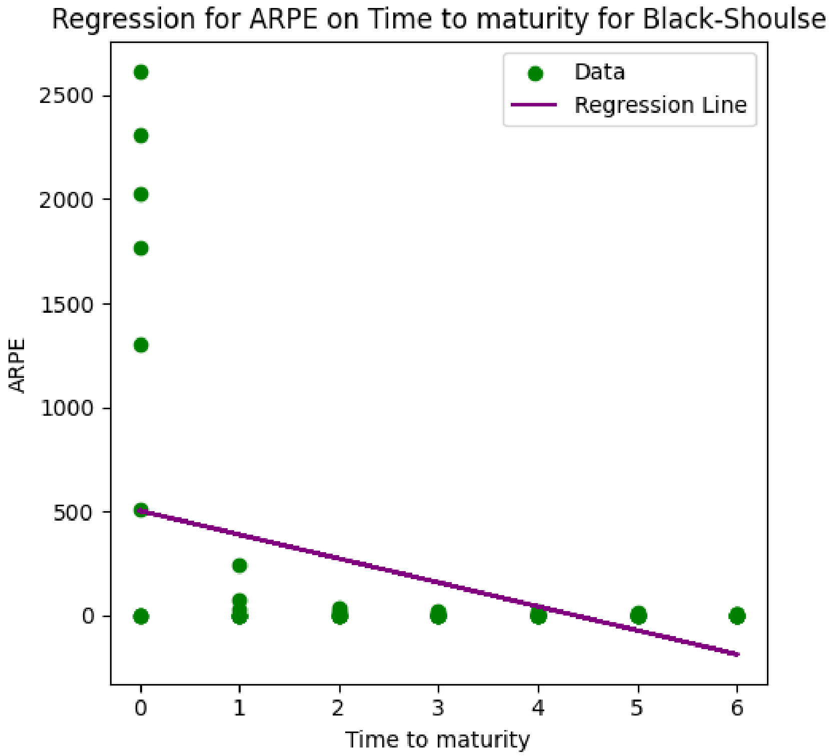
Знаходимо параметри лінійної регресії окремо на $Moneyness$ та $Time\ to\ maturity$, а також образу на обидва показники.

# Реалізація

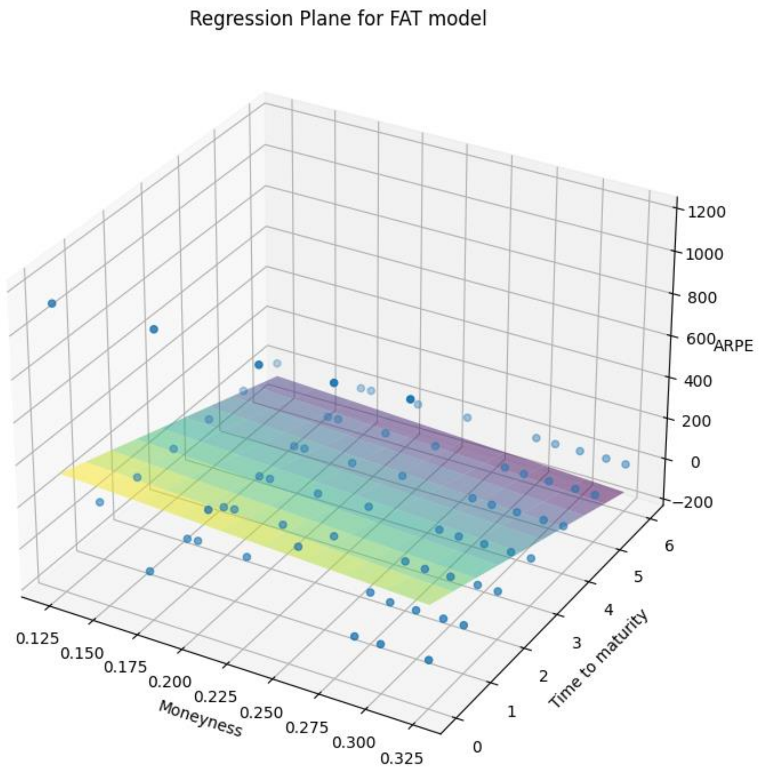

Regression for ARPE on Moneyness for FAT
Data
Regression Line
ARPE
Moneyness
1200
1000
800
600
400
200
0
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3
Regression for ARPE on Moneyness for Black-Shoulse
Data
Regression Line
ARPE
Moneyness
2500
2000
1500
1000
500
0
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3

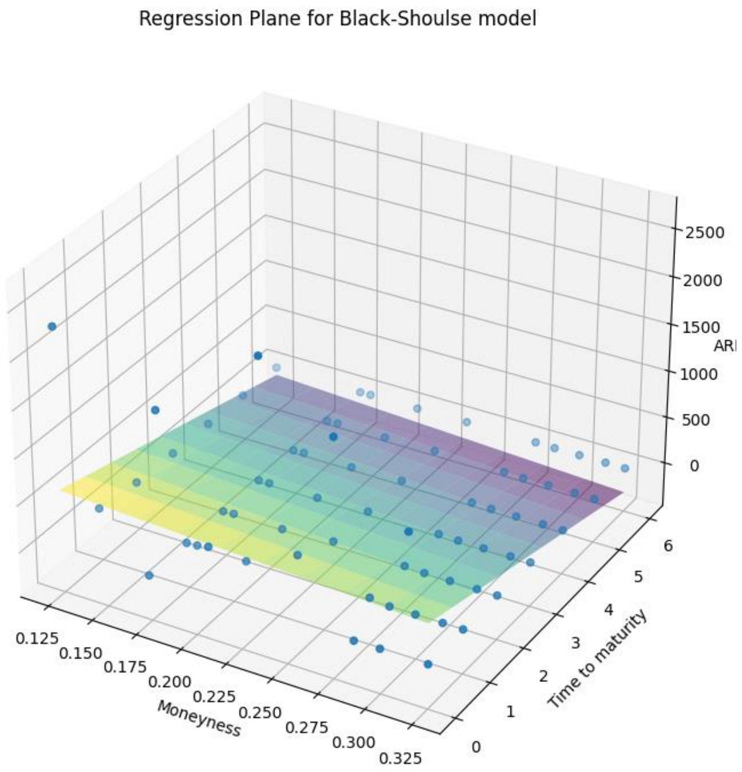
# Реалізація


Regression for ARPE on Time to maturity for FAT
Data
Regression Line
ARPE
Time to maturity
1200
1000
800
600
400
200
0
0
1
2
3
4
5
6


Regression for ARPE on Time to maturity for Black-Shoulse
Data
Regression Line
ARPE
Time to maturity
2500
2000
1500
1000
500
0
0
1
2
3
4
5
6

# Реалізація


Regression Plane for FAT model
ARPE
1200
1000
800
600
400
200
0
−200
0.125
0.150
0.175
0.200
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
Moneyness
0
1
2
3
4
5
6
Time to maturity


Regression Plane for Black-Shoulse model
2500
2000
1500
1000
500
0
0.125
0.150
0.175
0.200
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
Moneyness
0
1
2
3
4
5
6
Time to maturity

# Висновки

- Медіани набкгато менші за середні – похибки більші на кінцях вибірки (в останні дні)
- Статистичні характеристики похибки $ARPE$ та $RPE$ – додатні – обидві моделі завищують справедливу ціну опціонів
- Коефіцієнти регресії дуже малі – залежність незначна
- Відбувається систематичний ріст помилок в останні дні – волатильність базового активу потребує уточнення
- похибки зменшуються для обох моделей при зростанні грошовості та при зменшенні кількості днів до завершення дії опціону
- коефіцієнти регресії не високі, можемо сказати, що моделі не є дуже чутливими до таких даних.
- При правильному підборі параметрів модель з ринковим часом показує кращі результати, ніж модель Блека-Шоулза

# Література

1. Christian Schittenkopf, Alfred Lehar, Martin Scheicher (2002) GARCH vs Stochastic Volatility: Option Pricing and Risk Management.—Journal of Banking & Finance, Volume 26, Issues 2–3, 323–345 p.
2. F. Castellia, N. N. Leonenkob, and N. Shchestyukc (2017) Student-like models for risky asset with dependence. — Stochastic Analysis and Applications, Volume 35, Issue 3, 452– 464 p.

Дякую за увагу!