

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики



**ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНІ
МОДЕЛІ З УРАХУВАННЯМ РИЗИКІВ
ТЕХНОГЕННОЇ КАТАСТРОФИ**

Текстова частина до курсової роботи

за спеціальністю «Системний аналіз»- 124

Керівник курсової роботи:

Кандидат технічних наук,
доцент Чорней Руслан Костянтинович

_____ (підпис)

“ _____ ” _____ 2023 р

Виконавав студент СА-1:

Глуховський П.О.

_____/підпис/

“ _____ ” _____ 2023 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН ВИКОНАННЯ РОБОТИ

№	Назва етапу	Термін виконання	Примітка
1.	Отримання теми курсової	08.10.2023	
2.	Огляд тематичної літератури	11.01.2023	
3.	Дослідження нюансів роботи із моделями Леонтьєва та моделями Леонтьєва-Форда	12.02.2023	
4.	Дослідження нюансів роботи із узагальненими моделями моделями Леонтьєва-Форда, що враховують ризики техногенних катастроф	10.02.2023	
5.	Ознайомлення із методами розв'язків оптимізаційних задач за допомогою мови Python	17.04.2023	
6.	Реалізація практичної частини роботи	24.04.2023	
7.	Написання першого та другого розділів текстової частини	01. 05.2023	
8.	Написання решти роботи	08. 05.2023	
9.	Перевірка змісту роботи керівником	15.05.2023	
10.	Остаточне редагування роботи	16. 05.2023	
11.	Створення презентації роботи	17. 05.2023	
12.	Захист курсової роботи	25.05.2023	

Студент _____

Керівник _____

“ _____ ” _____

ЗМІСТ

Стор.

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1: Моделювання еколого-економічних систем	
1.1. Еколого-економічні моделі.	5
1.2. Оптимізаційні моделі.	7
РОЗДІЛ 2: Задача оптимізаційної моделі з урахуванням ризиків	
2.1. Модель «витрати-випуск»	10
2.2. Модель Леонтьєва-Форда.	11
РОЗДІЛ 3: Оптимальна стратегія із врахуванням ризиків техногенної катастрофи	
3.1. Задання моделі.	12
3.2. Постановка задачі.	14
3.3. Програмна реалізація пошуку розв'язку	16
ВИСНОВОК	20
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	21

ВСТУП

Згідно із [5], основними напрямками у адміністративному регулюванні кількості викидів, що спричиняються виробництвом, є:

- Адміністративно-екологічна система (умовне позначення регулювання природоохоронної діяльності в США).
- Будь-які викиди мають бути оплачені забруднювачем (використовується у Франції).
- Податок на чисту сировину, в залежності від кількості невідновлюваної чистої сировини (використовується, наприклад, в Італії).

Об'єктом дослідження цієї роботи є еколого-економічні моделі, що враховують ризик виникнення техногенних катастроф.

Завданням дослідження у цій роботі є пошук оптимальних стратегій для таких еколого-економічних моделей.

Робота складається із трьох частин.

Розділ 1 присвячений загальним уявленням про побудову еколого-економічних моделей, а також найбільш доцільному з точки зору досягнення економічної вигоди виді моделей – оптимізаційних моделях.

Розділ 2 концентрується на конкретних видах моделей, що дозволяють поставити оптимізаційну задачу і котрі широко використовуються для аналізу економічних систем, а саме моделі Леонтьєва, а також її узагальненні, котре покликане, в парадигмі еколого-економіки, включити до розгляду продукування системою шкідливих речовин та наслідків цього в якості частини системи – так звана модель Леонтьєва-Форда.

Розділ 3 присвячений доповненню моделі Леонтьєва-Форда задля врахування ризиків техногенних катастроф, а також реалізації пошуку розв'язку задачі оптимізації методами лінійного програмування із використанням мови програмування Python.

РОЗДІЛ 1: МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1 ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ

(Ця частина роботи заснована на джерелах [3] та [4]).

У [3] екологічна економіка визначається як міждисциплінарна спроба пов'язати разом природничі та соціальні науки шляхом створення глибшого розуміння зв'язків між людьми та природою, та визначення на основі цього знання стратегій поведінки, що мають призводити до екологічно стійкого світу із справедливим розподілом обмежених, зокрема, ресурсів (крім іншого, мається на увазі розподіл між різними біологічними видами), включаючи як соціальний, так і природній «капітали».

По суті, говорячи про екологічну економіку, ми маємо на увазі поєднання давно відомого і повсюдно застосовного підходу неокласичної та ресурсної теорії економіки із метолами оцінки впливу на довкілля та класичної екології. Фактично, екологічна економіка займається економічними розрахунками для великих економічних систем, однак розглядає їх у нерозривній єдності із системою природньою, а тому вважає вплив процесів людської діяльності на екологію частиною економічної моделі.

Автори роботи [4] називають задачу, пов'язану із знаходженням оптимального поєднання двох або більше критеріїв, саме економічною проблемою, однак маючи на увазі, що подібне завдання потребує застосування саме математичних підходів і не може бути вирішене виключно знаннями однієї спеціалізованої галузі, наприклад, екології або інженерії.

Розглядаючи задачу екологічної економіки, [4] виділяють три основні критерії: ефективний розподіл ресурсів, справедливий розподіл продуктів та стабільна схема економічної моделі. Окрім того, цитуючи нобелівського лауреата Яна Тінбергена, вони зазначають, що не розумно сподіватися вбити двох зайців одним пострілом, і на кожного потрібна окрема куля, а отже і на кожну ціль задачі потрібен свій окремий інструмент «політики» - тобто стратегії поведінки. Це – перший із шести принципів дизайну економічної моделі.

Другий принцип полягає у тому, що для економічних процесів на макрорівні виставляються необхідні мінімальні умови, котрих потрібно дотримуватися, а натомість оптимізація повинна знаходитись на мікрорівні економіки та полягати в максимізації свободи та здатності до мінливості.

Третій принцип побудови будь-якої економічної стратегії, що має на меті взаємодіяти із природнім середовищем, полягає у необхідності закладання дуже обережної оцінки параметрів системи, оскільки помилка на межі можливостей екосистеми може призвести до непоправних наслідків глобальних масштабів.

Четвертий принцип нагадує дослідникам та розробникам про те, що початковою точкою функціонування системи є не деякий «нульовий стан», а вже наявні на сьогоднішній день ситуація у досліджуваній сфері, система інституцій та показники критичних параметрів.

П'ятий принцип зазначає, що створена нами економічна стратегія повинна бути здатною до змін у процесі свого функціонування, адже зовнішні умови завжди можуть змінитися із тих або інших причин.

Шостий і останній принцип розробки економічної політики полягає у тому, що політика вирішення проблеми повинна знаходитися у тих же межах, що й сама проблема. Іншими словами, якщо проблема є локальною (наприклад, на рівні окремих міст), то і політика повинна функціонувати у локальному масштабі. [4] зазначають, ще не має сенсу намагатися вирішити глобальну проблему локальними ініціативами, а боротися із локальними проблемами глобальним підходом – не є доцільно.

Спираючись на ідею шести принципів у роботі [4] аналізують пріоритетність трьох основних цілей економічної стратегії та доходять висновку, що їх можна і потрібно розглядати в конкретному порядку: спочатку дотримання стабільності схеми, потім турбота про справедливий розподіл благ, і тільки після цього – ефективний розподіл ресурсів.

Також у [4] розглядають найбільш популярні у світі способи досягнення кожної із трьох зазначених вище цілей еколого-економічної моделі. Для дотримання стабільної схеми використовуються так звані підходи прямого регулювання, податків Пігу, субсидій Пігу та торгових дозволів. Коли ціллю є

справедливий розподіл благ, то можливими варіантами є обмеження багатства і доходів, встановлення мінімального рівня заробітної плати, а також розподіл залишків від факторів виробництва. І, на решті, у досягненні ефективності розподілу ресурсів ключовими ідеями є ціноутворення та оцінка неринкових товарів і послуг, питання макророзподілу, просторові аспекти неринкових товарів та перевизначення ефективності. Кожен із запропонованих методів має як власні позитивні аспекти, так і певні побічні ефекти, тож у кожній конкретній ситуації необхідно обирати політику виходячи із конкретних умов системи, із якою потрібно працювати.

Серед основних проблем, над якими працюють з фахівці екологічної економіки, можна виділити проблеми збереження біорізноманіття, екологічно стійкого економічного розвитку, вплив на кліматичні зміни, аналіз меж економічного розвитку у зв'язку із екологічними обмеженнями і багато інших, однак, безперечно, однією із ключових галузей застосування було і залишається еколого-економічне моделювання, що представляє особливий інтерес з точки зору системного аналізу.

1.2 ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ

(Ця частина роботи спирається на ідеї та формули із джерел [9] та [10]).

Так звані оптимізаційні моделі є одним із найбільш поширених видів моделей, що застосовуються при розв'язанні задач, питання яких стосується такої категорії, як продуктивність. Зокрема, цей підхід є дуже популярним у роботі над проблемами, що постають перед бізнесом або іншою економічною структурою, керованою людьми, як то неприбуткова організація або державна економіка. Не дивно, що і в багатьох працях, присвячених екологічній економіці, досліджуються оптимізаційні моделі, а потім теоретичні висновки застосовуються на практиці.

Основною особливістю оптимізаційної системи є наявність так званої цільової функції, тобто деякого виразу, що залежить від змінних-параметрів системи, а його значення виступає головним критерієм результативності обраної стратегії в умовах задачі. Хоча у джерелі [9] зазначається, що подібні моделі,

зазвичай, прийнято вважати не надто точними, втім сама постановка задачі як максимізація або ж мінімізація деякого єдиного зведеного критерію дозволяє легко застосовувати цей підхід у багатьох практичних задачах. Фактично, оптимізаційна модель дає можливість проаналізувати методи збільшити продуктивність, зменшити шкоду або покращити якийсь інший важливий для людей показник функціонування деякої системи, зокрема й еколого-економічної.

Одним із найбільш вживаних різновидів оптимізаційних систем вважається так звана задача лінійного програмування, де цільовою функцією виступає деяка лінійна комбінація параметрів системи:

$$Y = A_1X_1 + \dots + A_nX_n = \sum_{i=1}^n A_iX_i$$

Де X_i – це змінні системи, а A_i – параметри задачі для всіх $1 \leq i \leq n$.

Крім того, задача повинна містити деякі обмеження на область визначення цільової функції, що очевидно, адже без обмежень області визначення не вироджена лінійна функція у багатовимірному просторі не матиме точок екстремуму, і, до того ж, будь яка практична, задача скоріш за все, має справу із деякою межею можливостей впливати на систему.

Обмеженнями для агента можуть бути, наприклад, час, необхідний для виконання певних дій, або наявні ресурси, як то енергія, кількість осіб, потрібних для якогось процесу, гроші, природні ресурси тощо.

Також автори роботи [9] підкреслюють, що перевагою оптимізаційної моделі є можливість не лише знайти найкращий розв'язок задачі за сталих обмежень, однак і вказати на те (або ті) обмеження, котрі не дають отримати ще кращий розв'язок і які, відповідно, було б доцільно за можливості послабити.

У випадку, коли цільова функція задачі не може бути задана лінійно, а натомість приймає більш складну для аналізу форму, ми не можемо говорити про застосування принципів лінійного програмування до неї, однак математики пропонують ряд альтернативних підходів, серед яких найбільш поширеними є так звана теорія екстремальних задач та динамічне програмування. Як правило, на практиці у сфері екологічних досліджень частіше послуговуються саме принципами другого методу, так званого динамічного програмування, що

полягає у розбитті основної задачі на послідовність простіших задач, що потрібно розв'язувати відомими методами послідовно. Ці підзадачі можуть бути ранжовані, наприклад, за часом, коли відбуваються процеси, або ж за просторовим критерієм. Розв'язок першої задачі дозволяє перейти до роботи над другою і так далі – на кожному кроці дослідник таким чином наближається до отримання фінального результату. Однак, як правильно зауважують автори роботи [9], вдаючись до подібної стратегії роботи надзвичайно важливо коректно розбити основну задачу на послідовність підзадач, а також дослідити, чи справді оптимізація на кожному окремому кроці буде наближати нас до оптимізації початкової задачі.

Надалі мова йтиме про модель, що застосовується для аналізу потенційного розвитку економіки у контексті екологічних чинників, і робота над якою тісно пов'язана саме із розв'язком задач лінійного програмування.

РОЗДІЛ 2: ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ З УРАХУВАННЯМ РИЗИКІВ

2.1 МОДЕЛЬ «ВИТРАТИ-ВИПУСК»

(Ця частина роботи заснована на ідеях та формулах, представлених у [2]).

Розроблена у першій половині ХХ-го століття так звана модель Леонтьєва, також відома як модель «витрати-випуск» - це статична модель для опису міжгалузевої економіки з використанням лінійних рівнянь, що ґрунтується на ряді узагальнень та припущень:

- Економічна система має справу із сталою, скінченною кількістю товарів, що виготовляються і споживаються; їхній набір не змінюється;
- Кожен товар виготовляється тільки одним підприємством (або ж, узагальнюючи, галуззю);
- Будь-яке виробництво розглядається як конвертація певної кількості певних товарів у відповідну кількість результуючого продукту, причому вважається, що підприємства і галузі не змінюють технологій своєї роботи, а отже співвідношення кількості кожного із використаних товарів у процесі виробництва до кількості вихідного продукту лишається незмінною із часом величиною і для кожного виробництва є сталою характеристикою;
- Деякі товари повністю або частково після випуску не беруть більше участі у виробництві, адже вони призначені для так званого прямого використання;

Тоді, позначивши через $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ вектор, що представляє собою об'єм випуску для всіх підприємств та/або галузей (одна координата відповідає одному товарів), а через $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ – вектор об'ємів прямого використання кожного із товарів, ми отримуємо наступне твердження:

Оскільки всі товари після випуску використовуються або в наступних виробництвах, або йдуть на пряме використання, то $x = Ax + y$, де A – це матриця коефіцієнтів прямих витрат виробництва, так звана технологічна

матриця. Її елементи відображають співвідношення між об'ємом продукту, що використовується у виробництві та об'ємом товару, що виготовляється (якщо деякий продукт не бере участі у певному виробництві, то відповідний коефіцієнт буде дорівнювати нулю).

Природньо, що на модель розповсюджуються певні обмеження, найперші з яких це: $\forall 0 \leq i \leq n: x_i, y_i \geq 0$, а також $\forall 0 \leq i, j \leq n: 0 \leq a_{ij} \leq 1$.

У такій моделі пошук необхідних об'ємів виробництва для забезпечення потреб прямого використання зводиться до:

$$x = (I - A)^{-1}y, \text{ де } I - \text{одинична матриця.}$$

2.2 МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА

(Ця частина роботи заснована на джерелі [6]).

Це узагальнення і розширення моделі Леонтьєва ґрунтується та ідеї того, що крім підприємств/галузей першої групи, що фігурують в класичній моделі «витрати-випуск», існує також і друга їхня група, котра займається не виготовленням продукції, а утилізації деяких відходів виробництв (надалі називатимемо їх, з огляду на екологічну традицію, забруднювачами). Тоді математично модель записується так:

Якщо $x_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T$ – об'єми випуску підприємств, $y_1 = (y_1^1, \dots, y_n^1)^T$ – об'єми прямого використання товарів, $x_2 = (x_1^2, \dots, x_m^2)^T$ – об'єми знищених забруднювачів, а $y_2 = (y_1^2, \dots, y_m^2)^T$ – об'єми незнищених забруднювачів, то

$$x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1$$

$$x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_1$$

Де A_{11} – матриця прямих коефіцієнтів витрат для виробництв, A_{12} – матриця прямих коефіцієнтів витрат для утилізацій, A_{21} – матриця прямих коефіцієнтів випуску забруднювачів під час виробництв, а A_{22} – матриця прямих коефіцієнтів випуску забруднювачів під час утилізацій.

Разом із обмеженнями на змінні, аналогічними до обмежень із моделі «витрати-випуск», ці рівняння складають класичну модель Леонтьєва-Форда.

РОЗДІЛ 3: ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ ІЗ ВРАХУВАННЯМ РИЗИКІВ ТЕХНОГЕННОЇ КАТАСТРОФИ

3.1 ЗАДАННЯ МОДЕЛІ

(Ця частина роботи заснована на моделі та формулах, наведених у джерелі[1]).

Часто на практиці економічна стратегія повинна брати до уваги не лише виробництво товарів, як це відбувається у моделі Леонтьєва, і навіть не лише виробництво товарів та утилізацію забруднювачів, що стабільно продукуються наявними процесами, як це дозволяє зробити модель Леонтьєва-Форда. Окрім цього більшість підприємств, є вони виробничими чи утилізуючими, не є абсолютно стабільними, зокрема, вони існують із ризиком аварії, наслідком якої може бути техногенна катастрофа, тобто інцидент, результатом якого є істотне підвищення утворення одного або кількох забруднювачів.

Зауваження: тут і надалі, на відміну від класичної моделі «витрати-випуск», ми вважатимемо, що кожен товар може виготовлятися кількома підприємствами, однак із приміткою, що кожне підприємство все ще може виготовляти лише один продукт.

Для опису такої моделі нам потрібно на додачу до векторів x_1 , y_1 , x_2 та y_2 дещо видозмінити матриці A_{11} , A_{12} , A_{21} та A_{22} , а також додати додаткові параметри, що стосуватимуться саме ризиків та наслідків потенційних техногенних катастроф. Тому надалі ми будемо користуватися таким набором позначень:

- I – множина товарів, що виробляються економічною системою. Для кожного товару $i \in I$ визначається множина можливих способів його виробництва P_i , а представник цієї множини позначається як φ_i
- J – множина забруднювачів, що продукуються економічною системою. Для кожного забруднювача $j \in J$ визначається множина можливих способів його утилізації Q_j , а представник цієї множини позначається як ψ_j

Оскільки тепер кожен товар має множину можливих методів виробництва, а забруднювач – утилізації, то необхідно дещо змінити позначення компонентів векторів x_1 та x_2 :

- Вектор x_1 складається із елементів виду $x_{i\varphi_i}^1$ – обсяг виробництва товару i способом φ_i
- Вектор x_2 складається із елементів типу $x_{j\psi_j}^2$ – обсяг утилізації забруднювача j способом ψ_j

Крім того, для всіх $i, k \in I$ та всіх $j, l \in J$ будуть визначені нормативні коефіцієнти:

- $a_{ik\varphi_k}^{11}$ – прямих затрат товару i при виготовленні товару k за допомогою методу φ_k , що разом складають матрицю A_{11}
- $a_{ij\psi_j}^{12}$ – прямих затрат товару i при утилізації забруднювача j за допомогою методу ψ_j , що разом складають матрицю A_{12}
- $a_{ji\varphi_i}^{21}$ – викидів забруднювача j при виготовленні товару i за допомогою методу φ_i , що разом складають матрицю A_{21}
- $a_{jl\psi_l}^{22}$ – викидів забруднювача j при утилізації забруднювача l за допомогою методу ψ_l , що разом складають матрицю A_{22}

Зазначимо, що для того, щоб задача мала сенс, необхідно, щоб для технологічної матриці A_{11} виконувалася так звана умова продуктивності моделі, котра полягає у тому, щоб для будь-якого результуючого вектора існувало рішення системи – ця умова еквівалентна обортності матриці $(I - A_{11})$.

Так само, як і в оригінальній постановці задачі у моделі Леонтьєва-Форда, маємо вектори «результатів»:

- y_1 , що складається із елементів типу y_i^1 – кінцевий обсяг прямого використання товару i
- y_2 , що складається із елементів типу y_j^2 – кінцева гранична норма обсягу незнищеного забруднювача j

Тепер, після прописування узагальненої моделі Леонтьєва-Форда, ми можемо перейти до задання умов моделі, пов'язаних із потенційними техногенними катастрофами.

Перш за все, модель потребує відомих значень імовірностей, що станеться катастрофа, тому:

- p_{φ_i} – імовірність катастрофи під час виробництва товару i методом φ_i
- p_{ψ_j} – імовірність катастрофи через знищення забруднювача j методом ψ_j

Також потрібно означити наслідки кожної потенційної техногенної катастрофи, а саме зміни у продукуванні забруднювачів та економічні наслідки для бізнесу. Таким чином:

- $b_{ji\varphi_i}^1$ – коефіцієнт очікуваного обсягу продукування забруднювача j при виробництві товару i методом φ_i
- $b_{jl\psi_l}^2$ – коефіцієнт очікуваного обсягу продукування забруднювача j при утилізації забруднювача l методом ψ_l
- c_j – штраф за кожну незнищену одиницю забруднювача j
- $c_j\psi_j$ – собівартість знищення одиниці забруднювача j за допомогою способу ψ_j

Тепер, маючи повністю описану узагальнену модель із врахуванням ризиків техногенних катастроф, можемо перейти до постановки задачі.

3.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

(Ця частина роботи заснована на моделі та формулах, наведених у джерелі [1]).

Логічною задачею для будь-якого окремого підприємця, як і для більшої економічної системи є максимізація прибутку, або ж, що рівносильно, мінімізація втрат. Саме це ми і зробимо ціллю нашої оптимізаційної задачі, однак для запису фінального вигляду цільової функції нам знадобиться ще кілька позначень:

$$\tilde{a}_{ik\varphi_k}^{11} := (1 - p_{\varphi_k})a_{ik\varphi_k}^{11}$$

$$\tilde{a}_{lj\psi_j}^{12} := (1 - p_{\psi_j})a_{lj\psi_j}^{12}$$

$$\tilde{a}_{ji\varphi_i}^{21} := (1 - p_{\varphi_i})a_{ji\varphi_i}^{21} + p_{\varphi_i}b_{ji\varphi_i}^1$$

$$\tilde{a}_{jl\psi_l}^{22} := (1 - p_{\psi_j})a_{jl\psi_l}^{22} + p_{\psi_j}b_{jl\psi_l}^2$$

Також покладемо:

$$\sigma_{jl\psi_l} := \begin{cases} \tilde{a}_{jl\psi_l}^{22}, & j \neq l \\ \tilde{a}_{jl\psi_l}^{22} - 1 + \frac{c_j\psi_j}{c_j}, & j = l \end{cases}$$

Це дозволяє сформулювати задачу лінійного програмування, задавши цільову функцію як мінімізацію втрат економічної системи.

Тобто задача пошуку «найкращих» об'ємів виробництва x_1 та x_2 при відомих і сталих параметрах системи набуває вигляду:

$$\sum_{j \in J} c_j \left(\sum_{i \in I} \sum_{\varphi_i \in P_i} \tilde{a}_{ji\varphi_i}^{21} x_{i\varphi_i}^1 + \sum_{l \in J} \sum_{\psi_l \in Q_l} \sigma_{jl\psi_l} x_{l\psi_l}^2 \right) \rightarrow \min$$

У цій формулі доданок $\sum_{j \in J} c_j \sum_{i \in I} \sum_{\varphi_i \in P_i} \tilde{a}_{ji\varphi_i}^{21} x_{i\varphi_i}^1$ означає сумарний штраф за весь обсяг забруднювачів, виділених під час виробництва, а $\sum_{j \in J} c_j \sum_{l \in J} \sum_{\psi_l \in Q_l} \sigma_{jl\psi_l} x_{l\psi_l}^2$ – сумарний штраф за весь обсяг забруднювачів, виділених під час процесів утилізації.

Для того, щоб можна було приступати до пошуку розв'язків задачі, нам не вистачає лише обмежень на область визначення цільової функції. Окрім очевидних умов на невід'ємність всіх об'ємів виробництва $x_{i\varphi_i}^1 \geq 0$ та $x_{l\psi_l}^2 \geq 0$ для $\forall i \in I, \varphi_i \in P_i, l \in J, \psi_l \in Q_l$ також важливими є два набори умов:

- Обсяги виробництва кінцевої продукції, тобто різниці між обсягом вироблених товарів та обсягом товарів, що використовуються у виробництві інших товарів, не можуть бути меншими за обсяги кінцевого прямого споживання цих товарів, тобто:

$$\sum_{k \in I} \sum_{\varphi_k \in P_k} (\delta_{ik} - \tilde{a}_{ik\varphi_k}^{11}) x_{k\varphi_k}^1 - \sum_{j \in J} \sum_{\psi_j \in Q_j} \tilde{a}_{ij\psi_j}^{12} x_{j\psi_j}^2 \geq y_i^1, \quad i \in I$$

- Обсяги незнищених забруднювачів повинні бути не більшими за визначені граничні норми:

$$-\sum_{k \in I} \sum_{\varphi_k \in P_k} \tilde{a}_{ji\varphi_i}^{21} x_{i\varphi_i}^1 + \sum_{j \in J} \sum_{\psi_j \in Q_j} (\delta_{jl} - \tilde{a}_{jl\psi_l}^{22}) x_{l\psi_l}^2 \geq -y_j^2, \quad j \in J$$

Тепер задача має всі необхідні компоненти для того, щоб можна було братися до пошуку її розв'язку.

3.3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКУ

Скористаємося нашими знаннями на практиці і змоделюємо процес пошуку розв'язку подібної задачі на практиці. Для цього ми можемо отримати дані двома способами:

- Генерувати випадкові дані для кількості товарів, забруднювачів та методів виробництва і утилізації кожного відповідно, також всіх коефіцієнтів, значень результуючих функцій обсягів прямого використання та граничних норм неутілізованих забруднювачів, імовірностей настання техногенних катастроф, і, звісно ж, вартостей утилізації та штрафів за неутілізацію. Проблема цього метода полягає у тому, що згенеровані дані повинні не порушувати дуже багато умов одночасно, серед яких, зокрема, умова продуктивності моделі, існування непорожньої множини визначення цільової функції тощо.
- Підбирати вручну вхідні параметри системи, щоб забезпечити їхню відповідність умовам, що висуваються до моделі та перевірити, чи призводять класичні методи розв'язку задачі лінійного програмування з багатьма змінними до знаходження розв'язку.

Ми скористаємося другим підходом.

На Рисунку 1 наведено приклад тестових даних для запуску алгоритму:

```
I = 2
P = [[*,*],[*,*,*]]
P_sum=5
J = 2
Q = [[*,*],[*]]
Q_sum =3

A11 = [[0.05, 0.01, 0.03, 0.02, 0.1], [0.02, 0.01, 0.02, 0.03, 0.02]]
A12 = [[0.04, 0.05, 0.01], [0.02, 0.04, 0.02]]
A21 = [[0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.5], [0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05]]
A22 = [[0.05, 0.01, 0.02], [0.03, 0.02, 0.03]]

B1 = [[0.1, 0.15, 0.2, 0.1, 0.07], [0.2, 0.1, 0.1, 0.06, 0.15]]
B2 = [[0.2, 0.1, 0.15], [0.3, 0.2, 0.1]]

y1 = [1000,200]
y2 = [500, 40]
c1 = [5, 20]
c2 = [12,8,35,45]

p1 = [0.07, 0.12, 0.18, 0.03, 0.1]
p2 = [0.11, 0.08, 0.2]
```

Рисунок 1

Нижче, на Рисунку 2 наведено частину коду, що виконує перетворення коефіцієнтів $a_{ik\varphi_k}^{11}$, $a_{ij\psi_j}^{12}$, $a_{ji\varphi_i}^{21}$, $a_{jl\psi_l}^{22}$, $b_{ji\varphi_i}^1$ та $b_{jl\psi_l}^2$ на коефіцієнти $\tilde{a}_{ik\varphi_k}^{11}$, $\tilde{a}_{ij\psi_j}^{12}$, $\tilde{a}_{ji\varphi_i}^{21}$ та $\tilde{a}_{jl\psi_l}^{22}$, оскільки другі не є вхідними параметрами системи, а визначаються вже в процесі пошуку розв'язку задачі.

```
AA11= []
for k in range(len(P)):
    A = []
    for l in range(P_sum):
        A.append((1 - p1[l])*A11[k][l])
    AA11.append(A)
AA12= []
for k in range(len(P)):
    A = []
    for l in range(Q_sum):
        A.append((1 - p2[l])*A12[k][l])
    AA12.append(A)
AA21= []
for k in range(len(Q)):
    A = []
    for l in range(P_sum):
        A.append((1 - p1[l])*A21[k][l] + p1[l]*B1[k][l])
    AA21.append(A)
AA22= []
for k in range(len(Q)):
    A = []
    for l in range(Q_sum):
        A.append((1 - p2[l])*A22[k][l] + p2[l]*B2[k][l])
    AA22.append(A)

Sigm = []
for k in range(len(Q)):
    A = []
    for l in range(Q_sum):
        if which_product(Q, l)!=k:
            A.append(AA22[k][l])
        else:
            A.append(AA22[k][l]-l+(c2[l]/c1[k]))
    Sigm.append(A)
```

Рисунок 2

На Рисунку 3 три наводимо частину коду, що відповідає за реалізацію алгоритму розв'язку задачі лінійного програмування із використанням модуля PuLP та вбудованим у нього класом LpProblem, а також виведення результатів, отриманих під час виконання цього алгоритму:

```

def delta(a,b):
    if a==b:
        return 1
    else:
        return 0

prob = LpProblem("Linear_Programming_Problem", LpMinimize)

x = [LpVariable(f'x{i}', lowBound=0, cat='Integer') for i in range(P_sum)]
y = [LpVariable(f'y{i}', lowBound=0, cat='Integer') for i in range(Q_sum)]

prob += lpSum((lpSum(AA21[j][i]*x[i] for i in range(P_sum)) +
                  lpSum(Sigm[j][i]*y[i] for i in range(Q_sum))))*c1[j] for j in range(len(Q)))

for i in range(I):
    prob+=lpSum((delta(i,which_product(P,k))*AA11[i][k])*x[k]
                for k in range(P_sum)) - lpSum(AA12[i][j]*y[j]
                for j in range(Q_sum)) >= y1[i])

for j in range(J):
    prob += -lpSum((AA21[j][i])*
                  x[i] for i in range(P_sum)) + lpSum((delta(j,which_product(Q,l))-
                  AA22[j][l])*y[l] for l in range(Q_sum)) >= -y2[j])

prob.solve()

print("Status:", LpStatus[prob.status])
for v in prob.variables():
    print(v.name, "=", v.varValue)

```

Рисунок 3

На Рисунку 4 можна бачити результат виконання програми із вхідними даними, що зазначені на Рисунку 1:

```

Status: Optimal
x0 = 22178.0
x1 = 0.0
x2 = 0.0
x3 = 8016.0
x4 = 0.0
y0 = 0.0
y1 = 530.0
y2 = 859.0

```

Рисунок 4

Тут список $x[i]$ є послідовним переліком об'ємів виробництва для всіх наявних у задачі способів виробництва, тобто величини x_0 , x_1 та x_2 відповідають в термінах нашої задачі виробництву першого продукту кожним із трьох можливих способів, тобто $x_1^1 \varphi_1^1$, $x_1^1 \varphi_1^2$ та $x_1^1 \varphi_1^3$ відповідно, величина x_3 через послідовність у списку методів виробництва відповідає значенню $x_2^1 \varphi_2^1$, і аналогічно величини y_0 та y_1 відповідають об'ємам утилізації першого забруднювача кожним із двох можливих методів, тобто $x_1^2 \psi_1^1$ та $x_1^2 \psi_1^2$, а y_2 за цією логікою відповідає об'єму утилізації другого забруднювача єдиним доступним способом, тобто $x_2^2 \psi_2^1$.

Як можемо бачити, через специфіку постановки задачі результатом роботи алгоритму є нерозділені по товарах і забруднювачах показники, а два об'єднані списки, що, хоч і не є дуже зручним у використанні стороннім користувачем, проте може бути легко виправлено вже після розв'язку задачі лінійного програмування перед виведенням результатів.

Наведемо також результати кількох додаткових запусків алгоритму на інших вхідних даних (Рисунки 5 та 6 відображають вхідні дані результат роботи програми відповідно для другого тестового запуску, у якому вже моделюється економіка з трьома товарами, що мають три, два і три способи виробництва відповідно, а також трьома забруднювачами, що мають два, два і один спосіб утилізації відповідно):

```

I = 3
P = [[1,1,1],[1,1],[1,1,1]]
P_sum=8
J = 3
Q = [[1,1],[1,1],[1]]
Q_sum =5

A11 = [[0.05, 0.01, 0.03, 0.02, 0.1, 0.02, 0.03, 0.04],
        [0.02, 0.01, 0.02, 0.03, 0.02, 0.1, 0.05, 0.01],
        [0.01, 0.05, 0.01, 0.05, 0.04, 0.01, 0.06, 0.03]]
A12 = [[0.04, 0.05, 0.01, 0.03, 0.02],
        [0.02, 0.04, 0.02, 0.01, 0.05],
        [0.01, 0.03, 0.05, 0.06, 0.02]]
A21 = [[0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.5, 0.01, 0.02, 0.06],
        [0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.1, 0.02, 0.03, 0.04],
        [0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.7, 0.08, 0.01, 0.02]]
A22 = [[0.05, 0.2, 0.03, 0.02, 0.01],
        [0.04, 0.08, 0.02, 0.01, 0.05],
        [0.03, 0.07, 0.01, 0.05, 0.04]]

B1 = [[0.05, 0.1, 0.12, 0.08, 0.1, 0.07, 0.12, 0.1],
        [0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.12, 0.04, 0.06, 0.1],
        [0.09, 0.08, 0.1, 0.1, 0.2, 0.15, 0.05, 0.1]]
B2 = [[0.1, 0.2, 0.06, 0.04, 0.02],
        [0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0.1],
        [0.06, 0.04, 0.02, 0.1, 0.08]]

y1 = [1000,200, 50]
y2 = [500, 40, 1]
c1 = [5, 20, 70]
c2 = [12,8,35,45,200]

p1 = [0.07, 0.12, 0.18, 0.03, 0.1, 0.2, 0.05, 0.07]
p2 = [0.11, 0.07, 0.2, 0.03, 0.01]

Status: Optimal
x0 = 22619.0
x1 = 0.0
x2 = 0.0
x3 = 10310.0
x4 = 0.0
x5 = 0.0
x6 = 2278.0
x7 = 0.0
y0 = 348.0
y1 = 0.0
y2 = 1167.0
y3 = 0.0
y4 = 1518.0

```

Рисунок 5

Рисунок 6

Важливо зазначити, що роботі [1] при розгляді аналогічної моделі доводиться, що якщо така узагальнена модель Леонтєва-Форда є продуктивною і має невикористану множину визначення, то вона матиме єдиний розв'язок, причому згідно цього розв'язку кожен товар буде вироблятися не більш як одним способом (і якщо товар бере участь в інших виробництвах, то буде виготовлятися обов'язково), і кожен забруднювач буде утилізуватися тільки одним методом.

Як бачимо, результати наших тестових запусків для початкових умов різної кількості змінних дають результати, що цілком узгоджуються із твердженням цієї теореми. Таким чином, ми можемо пересвідчитися у правильності роботи реалізованого алгоритму та прийняти його для подальшої роботи із ним у структурі більш складного програмного забезпечення.

ВИСНОВОК

У роботі реалізовано алгоритм статті [1] мовою Python для знаходження розв'язку оптимізаційної задачі та перевірено роботу цього алгоритму на тестових даних, що імітують реальну ситуацію деякої економічної системи. Отримані оптимальні значення узгоджуються із теоретичними твердженнями, викладеними у роботі [1], щодо вигляду оптимального розв'язку оптимізаційної задачі подібного типу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Чорней Р. К. Оптимізаційна еколого-економічна модель з урахуванням технологічних аварій // Наукові записки НаУКМА. — 2014. — Т. 152. Фізико-математичні науки. — С. 52–56.
2. Leontief, Wassily W. *Input–Output Economics*. 2nd ed., New York: Oxford University Press, 1986
3. R. Costanza, *Ecological Economics 1*, Editor(s): Sven Erik Jørgensen, Brian D. Fath, *Encyclopedia of Ecology*, Academic Press, 2008, Pages 999-1006
4. Daly H., Farley J. *Ecological Economics: Principles and Applications*. — Washington: Island Press, 2004.
5. *Valuing the Global Environment: Actions & Investments for a 21st Century*. — Washington: Global Environment Facility, 1998. — 162 p.
6. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища школа, 1999. — 236 с.
7. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. пос.— Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. 304 с.
8. Чорней Н. Б. Дослідження алгоритму послідовного аналізу варіантів для розв'язання міжгалузевої моделі Леонтьєва — Форда // Вісник Київського університету. — 1999. — Сер. фіз.-мат. н., № 3. — С. 259–262.
9. Масікевич Ю. Г., Шестопапов О. В., Негадайло А. А. та ін. *Теорія систем в екології: підручник* — Суми: Сумський державний університет, 2015. — 330 с.
10. Ковальчук П. І. *Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: Навч. посібник*. — К.: Либідь, 2003. — 208с.
11. Lucas, Robert E., Jr. (2002). *Lectures on Economic Growth*. Cambridge: Harvard University Press. с. 109–10