

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Кафедра математики факультету інформатики

## ПАРАДОКСИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Текстова частина до курсової роботи  
за спеціальністю 113 „Прикладна математика”

Керівник курсової роботи  
к. ф.-м. н., доцент Щестюк Н.Ю.  
(*прізвище та ініціали*)

\_\_\_\_\_

(*підпис*)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 р.

Виконав студент Таран Д.Г.  
“18” квітня 2020 р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Зав. кафедри математики,  
проф., д.ф.-м.н.  
\_\_\_\_\_ Олійник Б. В.  
(підпис)  
„\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ  
на курсову роботу

студенту Тарану Д. Г. факультету інформатики 4 курсу

ТЕМА «Парадокси теорії ймовірностей»

Вихідні дані:

- Габор Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Вступ

1 Основні означення

2 Парадокс Монті Голла

3 Парадокс гладіатора

4 Парадокс підкидання монет

5 Парадокс транзитивності

Висновки

Список літератури

Додатки

Дата видачі „\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р. Керівник \_\_\_\_\_  
(підпис)

Завдання отримав \_\_\_\_\_  
(підпис)

**Тема:** *«Парадокси теорії ймовірностей»*

**Календарний план виконання роботи:**

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	02.11.2019	
2.	Ознайомлення з поняттями теорії ймовірностей .	14.11.2019	
3.	Ознайомлення з поняттями теорії ігор .	27.11.2019	
4.	Ознайомлення з парадоксами теорії ймовірності.	07.01.2020	
5.	Програмування статистичних досліджень.	11.04.2020	
6.	Написання роботи.	03.04.2020	
7.	Створення презентації.	14.04.2020	
8.	Захист курсової роботи.	19.04.2020	

Студент Таран Д. Г.

Керівник Щестюк Н. Ю.

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_

# ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Основні визначення.....	5
1.1 Теорія ймовірності. Основні позначення .....	5
1.2 Теорія ігор. Основні позначення .....	8
2. Парадокс Монті Голла .....	11
2.1 Історія парадоксу .....	11
2.2 Формулювання парадоксу .....	11
2.3 Пояснення парадоксу .....	11
2.4 Статистичне дослідження .....	13
3. Парадокс гладіатора .....	14
3.1 Історія парадоксу .....	14
3.2 Формулювання парадоксу .....	14
3.3 Пояснення парадоксу .....	15
3.4 Статистичне дослідження .....	16
4. Парадокс підкидання монет .....	17
4.1 Формулювання парадоксу .....	17
4.2 Пояснення парадоксу .....	17
4.3 Статистичне дослідження .....	19
5. Парадокс транзитивності .....	21
5.1 Формулювання парадоксу .....	21
5.2 Пояснення парадоксу .....	21
5.3 Статистичне дослідження .....	22

ВИСНОВКИ .....	23
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	24
ДОДАТКИ .....	26
1. Додаток А.....	26
2. Додаток А.....	28
3. Додаток А.....	29
4. Додаток А.....	31

## ВСТУП

Як і будь-яка інша галузь науки, математика відображає протиріччя навколишнього світу. Тому історія математики повна цікавих парадоксів і деякі з них служили відправною точкою великих змін. Особливо багата парадоксами математика випадкового. На думку Карла Пірсона, в математиці немає іншого такого розділу, в якому настільки ж легко припуститися помилки, як в теорії ймовірностей. Іноді парадокси призводять до вельми непростих відкриттів. Так, давньогрецькі математики довго ламали голову над тим, чому довжину діагоналі одиничного квадрата неможливо виміряти точно лінійкою з як завгодно дрібними поділами. Цей парадокс збентежив розум античних мислителів та призвів до розширення поняття числа і створення теорії ірраціональних чисел. Математикам XIX століття здавалося надзвичайно парадоксальним, що між усіма елементами нескінченної множини і елементами її нескінченної підмножини можна встановити взаємно-однозначну відповідність. Цей парадокс призвів до створення сучасної теорії множин, яка в свою чергу зробила великий внесок у філософію науки. [9]

Я вирішив розглянути парадокси, що, на мою думку, найбільш доцільно показують, наскільки інтуїтивні висновки можуть бути хибними стосовно певних речей. Метою роботи є дослідження, розкриття суті та перевірка статистичними методами цих парадоксів.

# **1. Основні визначення**

## **1.1 Теорія ймовірності. Основні позначення**

**Означення 1.1** Подією називається довільне явище, про яке можна сказати, що воно здійснюється чи не здійснюється в результаті випробування. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту. [3]

**Означення 1.2** Дослідом (експериментом, спостереженням) називається відтворення якого-небудь певного комплексу основних умов, що може бути повторений скільки завгодно разів. [3]

**Означення 1.3** Випадковою (стохастичною) називається подія, що при багаторазовому повторенні експерименту в одних випробуваннях відбувається, а в інших – ні. [3]

**Означення 1.4** Декілька подій називаються несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному випробуванні. [3]

**Означення 1.5** Декілька попарно несумісних подій утворюють повну групу (сукупність єдино можливих подій), якщо в результаті випробування одна і тільки одна з них неодмінно повинна відбутися. [3]

**Означення 1.6** Декілька подій в експерименті називаються рівноможливими, якщо об'єктивно поява будь-якої з них у результаті випробування не більш можлива, ніж поява іншої. [3]

**Означення 1.7** Для характеристики, як часто подія може відбутися чи не відбутися в результаті випробувань, вводиться поняття ймовірності випадкової

події – числова міра ступеню об'єктивної можливості появи даної події в результаті випробувань. Імовірність події  $A$  позначається  $P(A)$ . [3]

**Означення 1.8** Ймовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки тоді, коли результати експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. Такі події традиційно називають випадками, а відповідний експеримент – класичною теоретико-ймовірнісною схемою випадків. [3]

**Означення 1.9** Випадок називається сприятливим до події  $A$ , якщо його поява тягне за собою появу цієї події. [3]

**Означення 1.10** Класичне визначення ймовірності. Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то ймовірність події  $A$  дорівнює відношенню числа сприятливих випадків  $m$  до їх загального числа  $n$  [3] :

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

**Означення 1.11** Величина, яка в результаті випробування може набувати того чи іншого (але тільки одного) числового значення, заздалегідь невідомого й зумовленого випадковими причинами, називається випадковою величиною. [4]

**Означення 1.12** Дискретною випадковою величиною називається така величина, кількість можливих значень якої або скінченна, або нескінченна зчисленна множина (множина, елементи якої можна перенумерувати). [4]

**Означення 1.13** Для дискретної випадкової величини  $\xi$ , можливими значеннями якої є  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що реалізуються з відповідними ймовірностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , математичне очікування визначається так [5] :

$$M\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

**Означення 1.14** Позначимо  $P(A|B)$  – умовна ймовірність або ймовірність події А, за умови, що подія В відбулася. Умовна ймовірність обчислюється за формулою [6] :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Означення 1.15** Формула повної ймовірності. Ймовірність події А , яка може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події А [6] :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) * P(A|H_i) \quad (1.2)$$

**Означення 1.16** Формула Баєса. Нехай  $H_1, H_2, \dots, H_n$ - події,що утворюють повну групу. Тоді для будьякої події А , що може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , і такої, що  $P(A) \neq 0$ , виконується рівність [6] :

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)*P(H_i)}{P(A)}, i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

## 1.2 Теорія ігор. Основні позначення

**Означення 1.17** Теорія ігор - це теорія математичних моделей, інтереси учасників яких різні, причому вони досягають своєї мети різними шляхами. [7]

**Означення 1.18** Гра - це спрощена модель конфліктної ситуації, яку регламентовано за правилами, що вказують: порядок чергування ходів, правила проведення кожного ходу, кількісний результат гри. [8]

**Означення 1.19** Стратегією гравця називають сукупність правил, за якими відбувається вибір кожного усвідомленого ходу залежно від ситуації, що склалася в процесі гри на момент здійснення ходу. [8]

**Означення 1.20** Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то таку гру називають грою з нульовою сумою (матрична гра). [8]

**Означення 1.21** Розглянемо математичну гру двох гравців А і В. Нехай гравець А має  $m$  стратегій  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , а гравець В (супротивник) –  $n$  стратегій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Натуральні числа  $m$  і  $n$  ніяким чином не пов'язані. Якщо кожний з гравців А і В свідомо визначеним чином обирає відповідно стратегії  $A_i$  і  $B_j$ , то ситуація, яка склалася, однозначно визначає виграш (результат гри) гравця А, який виражається дійсним числом  $a_{ij}$ , що одночасно характеризує і програш гравця В. А число  $-a_{ij}$  визначає програш гравця А і виграш гравця В. Виграші  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) можна розмістити у вигляді матриці, номери рядків якої відповідають номерам стратегій гравця А, а номери стовпчиків – номерам стратегій гравця В. Дану матрицю називають матрицею виграшів (платіжною матрицею, матрицею гри) гравця А. [7]

**Означення 1.22** Розглянемо гру з двома гравцями А і В. Величину  $\alpha$  називають нижньою ціною гри, або максимінним вигрaшем (максиміном), якщо [8]

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

**Означення 1.23** Величину  $\beta$  називають верхньою ціною гри, або мінімаксімним вигрaшем (мінімаксом), якщо [8]

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

**Означення 1.24** Гру називають грою з сідловою точкою, якщо її нижня і верхня ціни збігаються, тобто виконується рівність [8]

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

**Означення 1.25** Якщо матрична гра не має сідлової точки, то виникає необхідність гри в змішаних стратегіях. [7]

**Означення 1.26** Змішаною стратегією  $S_A$  гравця А називається повний набір чистих стратегій  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , з ймовірностями їх застосування  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , причому сума ймовірностей дорівнює одиниці. Змішану стратегію  $S_A$ , гравця А записують у вигляді матриці [7] :

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

**Означення 1.27** Якщо чиста стратегія входить в оптимальну з певною ймовірністю, яка відрізняється від нуля, то вона називається активною стратегією. [7]

**Означення 1.28** Теорема про активні стратегії: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишиться незмінним і буде дорівнювати ціні гри, якщо другий гравець не вийде за границі своїх активних стратегій. [7]

**Означення 1.29** Для гри розміру  $2 \times 2$  будь-яка чиста стратегія є активною, якщо сідлова точка відсутня. Виграш гравця А (програш гравця В) представляє собою випадкову величину, математичне очікування якої дорівнює ціні гри. Тому середній виграш гравця А (оптимальна стратегія) буде дорівнювати ціні гри для першої і другої стратегій гравця В. [7]

## **2 Парадокс Монті Голла**

### **2.1 Історія парадоксу**

У грудні 1963 року на американському телеканалі NBC вперше вийшла програма «Let's Make a Deal». В кінці передачі учасники могли зіграти в «угоду дня». Перед ними було троє дверей, про які було відомо, що за однією з них - головний приз (наприклад, автомобіль), а за двома іншими - менш цінні подарунки (наприклад, живі кози). Після того як гравець робив свій вибір, ведучий програми Монті Холл відкривав одну з двох, що залишилися, дверей, показуючи, що за нею призу немає, і даючи учаснику поради тому, що він зберігає шанси на виграш.

У 1975 році вчений з Каліфорнійського університету Стів Селвін задався питанням про те, що буде, якщо в цей момент, після відкриття дверей без призу, запропонувати учаснику поміняти свій вибір. Чи зміняться в цьому випадку шанси гравця отримати приз, а якщо так, то в який бік?

### **2.2 Формулювання парадоксу**

Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно обрати одні з трьох дверей: за одними з них автомобіль, за двома іншими по козі. Ви обираєте одні двері, наприклад, перші, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад, треті, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на другі двері?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір? [1]

### **2.3 Пояснення парадоксу**

Зазвичай, перші думки людей стосовно цієї задачі такі: після відкриття дверей з козою залишаються 2 двері і за однією з них автомобіль, отже ймовірність виграти  $\frac{1}{2}$ , тож змінювати свій вибір немає сенсу. Проте насправді цей висновок є хибним. Ймовірність виграти вдвічі більша, якщо змінити двері.

Припустимо, Монті був справді щедрий, і замість того, щоб розкрити двері з козою, він натомість запропонував вам обидві його двері. Очевидно, 2 рази з 3 вам краще змінити вибір. Але, пропонуючи вам обидві двері - це те саме, що показувати вам двері, в яких є козел і пропонувати інші. Те, що Монті відкриває двері, просто створює ілюзію, що ці дві варіації відрізняються один від одного. [2]

Доведемо це математично, використовуючи формули Баєса та повної ймовірності. Нехай  $A_i$  – така подія, що автомобіль знаходиться за дверима під номером  $i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ .  $B_i$  – така подія, що Монті показує козу за дверима під номером  $i$ . Припустимо, що ми вибрали двері №1 і Монті показує нам двері №3, за якими коза. З формули (1.2) маємо:

$$P(B_3) = P(B_3|A_1)P(A_1) + P(B_3|A_2)P(A_2) + P(B_3|A_3)P(A_3)$$

З формули (1.3) маємо:

$$P(A_1|B_3) = \frac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3)} = \frac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3|A_1)P(A_1) + P(B_3|A_2)P(A_2) + P(B_3|A_3)P(A_3)},$$

$P(B_3|A_1)$  – це ймовірність того, що Монті відкриє двері №3, за умови, що машина знаходиться за 1 дверима. За 2 та 3 дверима кози, отже Монті вибирає будь-яку з них з ймовірністю  $\frac{1}{2}$ .

$P(A_i) = \frac{1}{3}$ , оскільки машина знаходиться з рівною ймовірністю за 1 з 3 дверей.

$P(B_3|A_2)$  – ймовірність показати козу за дверима №3, якщо машина за дверима №2. Оскільки ми вибрали перші двері, то Монті може показати нам лише 3 двері з ймовірністю 1.

$P(B_3|A_3)$  – ймовірність показати козу за дверима №3, якщо машина за дверима №3. Оскільки за дверима №3 машина, то Монті не може показати за ними козу, отже ймовірність 0.

Підставимо в формулу і отримаємо:

$$P(A_1|B_3) = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Ми бачимо, що ймовірність знаходження машини за дверима, які ми вибрали з початку  $\frac{1}{3}$ , з чого випливає, що ймовірність машини бути за іншими дверима  $\frac{2}{3}$ .

## 2.4 Статистичне дослідження

В додатку А наведено програму, що симулює гру з Монті Голлом двох гравців. Перший гравець притримується стратегії зміни дверей, другий в свою чергу не змінює рішення і залишається на першопочатково обраних дверях. Кожен гравець проводить 100000 ігор. На кожній ітерації гри за допомогою генератора псевдовипадкових чисел генеруються двері, за якими знаходиться машина з ймовірністю  $\frac{1}{3}$ , за іншими двома автоматично кози. Обидва гравці на першому кроці з ймовірністю  $\frac{1}{3}$  вибирають двері, а на другому діють в залежності від стратегії. Перший гравець з 1000000 ігор виграв 666654 з відсотком перемог 66,6 з точністю до 1 знаку після коми. Другий гравець з 1000000 ігор виграв 333157 з відсотком перемог 33,3 з точністю до 1 знаку після коми. Отже, ми показали, що з точністю до 1 знаку після коми статистичний дослід підтверджує теорію, з чого слідує, що насправді людина, яка дотримується стратегії зміни дверей у грі з Монті Голлом, буде перемагати приблизно вдвічі більше за людину, яка не змінює двері.

## 3 Парадокс гладіатора

### 3.1 Історія парадоксу

Хоча азартні ігри в різних формах існують з часів палеоліту і математичні дослідження різних ігор сходять до епохи Відродження, загальна теорія ігор виникла лише в ХХ столітті і лише тоді було встановлено її зв'язок з іншими науками, наприклад, такими, як економіка. В 1921 р Еміль Борель спробував створити математичну теорію ігрових стратегій, однак принцип мінімакса, фундаментальну теорему в теорії ігор, в 1928 р довів основоположник теорії ігор Джон фон Нейман. [9]

### 3.2 Формулювання парадоксу

Двоє дітей R і Q грають в відому гру, яка полягає в наступному. обидва одночасно піднімають один або два пальці, якщо загальне число піднятих пальців парне, то Q платить R, а якщо воно непарне, то R платить Q суму, рівну загальної кількості піднятих пальців. Нижче в таблиці (матриці виплат) вказані грошові суми, які Q повинен заплатити R (таблиця 1.1). Хоча багато хто вважає цю гру справедливою через те, що числа в таблиці при складанні дають 0, вона такою зовсім не є: ця гра вигідна для Q. [9]

R	Q	1 палець	2 пальця
1 палець		2	-3
2 пальця		-3	4

Таблиця 1.1 - Гра

### 3.3 Пояснення парадоксу

Очевидно, якщо один з гравців весь час піднімає один палець, або завжди піднімає два, то другий гравець, помітивши це, буде вести себе так, щоб весь час вигравати. Це демонструє принцип мінімаксу. Нехай  $\alpha$  – нижня ціна гри,  $\beta$  – верхня ціна гри. Тоді з означення (1.22) та (1.23)  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -3$ . Оскільки  $\alpha \neq \beta$ , то математична гра не має сідлової точки, а отже з означення (1.25) виникає необхідність гри в змішаних стратегіях. Припустимо, що для обох гравців ми вже знайшли оптимальні стратегії, тобто ми знаємо, що найкращою стратегією для гравця R є те, що потрібно підняти один палець з ймовірністю  $p_1$  і підняти два пальці з ймовірністю  $p_2$ , де  $p_1 + p_2 = 1$ , і аналогічно для Q найбільш вигідно підняти один палець з ймовірністю  $q_1$  і два пальці з ймовірністю  $q_2$ , де  $q_1 + q_2 = 1$ . Якщо обидва гравці застосовують оптимальні стратегії, з означення (1.28) середня сума грошей, яку Q в середньому виплатить R дорівнює ціні гри, яку позначимо, як  $v$ . Гра була б справедливою, якби  $v = 0$ . Однак ми покажемо, що  $p_1 = q_1 = \frac{7}{12}$ ,  $p_2 = q_2 = \frac{5}{12}$ , і тоді  $v = -\frac{1}{12}$ , що означає, що Q виграє в середньому  $\frac{1}{12}$  долара після кожної гри, навіть в тому випадку, коли R застосовує свою оптимальну стратегію. З означення (1.29) середній виграш гравця Q буде дорівнювати  $v$  для першої і другої стратегій гравця R. Отже маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} v = 2p_1 - 3p_2 \\ v = -3p_1 + 4p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{7}{12} \\ p_2 = \frac{5}{12} \\ v = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

Аналогічно,  $v = 2q_1 - 3q_2 = -3q_1 + 4q_2$ , отже,  $q_1 = \frac{7}{12}$ ,  $q_2 = \frac{5}{12}$ . Таким чином доведено, що гра не є справедливою, і знайдені оптимальні стратегії. Для обох гравців вигідно піднімати один палець з ймовірністю  $\frac{7}{12}$ , а два з ймовірністю  $\frac{5}{12}$ .

### 3.3 Статистичне дослідження

В додатку Б наведено програму, що симулює математичну гру двох гравців Q та R, описану вище. Гра проводиться 100000 разів. Обидва гравці піднімають один палець з ймовірністю  $\frac{7}{12}$ , а два з ймовірністю  $\frac{5}{12}$ . Гравець Q з 100000 ігор виграв 83044 доларів, що є 0,083044 в середньому за гру. Ми довели теоретично, що в середньому Q виграє  $\frac{1}{12}$  долара за гру, що є 0,083(3). Отже ми бачимо, що з точністю до 3 знаків після коми гравець практично виграв стільки, скільки мав би виграти теоретично, тож ця гра дійсно є цікавішою для гравця Q.

## 4 Парадокс підкидання монет

### 4.1 Формулювання парадоксу

Припустимо, що ми кидаємо правильну монету до тих пір, поки не випадуть послідовно 2 орли (ОО), або орел решка (ОР). Очевидно, ймовірність того, що (ОО) з'явиться швидше ніж (ОР), рівна ймовірності того, що (ОР) з'явиться швидше за (ОО), оскільки після падіння орла нам випаде орел або решка з рівною ймовірністю. Не зважаючи на це, для появи (ОО) потрібно в середньому більше підкидань, ніж для появи (ОР). Серія (ОО) з'явиться в середньому через 6 підкидань, а серія (ОР) через 4. [9]

### 4.2 Пояснення парадоксу

Спочатку розглянемо 2 орлів. Нехай  $M$  – математичне очікування кількості підкидань до появи (ОО),  $M_o$  і  $M_p$  - математичне очікування кількості підкидань до появи (ОО), якщо вже випав орел, або решка відповідно. Зауважимо, що оскільки орел і решка на першому ході мають рівні шанси, то  $M = \frac{M_o + M_p}{2}$ . Якщо на першому ході випав орел, то на другому ході з ймовірністю  $\frac{1}{2}$  гра закінчується і має довжину 2, а з ймовірністю  $\frac{1}{2}$  випадає решка, і гра триває, причому має довжину на 1 більше ніж довжина гри, розпочата решкою, тому що решка випала на другому ході. Це означає, що  $M_o = \frac{2 + (1 + M_p)}{2}$ . Якщо ж гра почалася з решки, то вона точно не закінчиться після другого ходу, тобто після решки можна вважати, що гра почалася заново і триває на один хід більше, ніж якщо б цієї решки спочатку не було. Інакше кажучи,  $M_p = 1 + M$ . Таким чином ми отримали три лінійних рівняння:

$$\begin{cases} M = \frac{M_o + M_p}{2} \\ M_o = \frac{2 + 1 + M_p}{2} \\ M_p = 1 + M \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = 6 \\ M_o = 5 \\ M_p = 7 \end{cases}$$

Отже, в середньому випадання двох орлів можна очікувати на 6 ходу.

Тепер дослідимо гру, в якій виграш настає після комбінації (ОР). Нехай  $R$  - математичне очікування кількості підкидань до появи (ОР), а  $R_o$  і  $R_p$  - математичне очікування кількості підкидань до появи (ОР), якщо вже випав орел, або решка відповідно. Як і в першій грі, рівність  $R = \frac{R_o + R_p}{2}$  впливає з рівності шансів випадання орла і решки на першому ходу. Далі, якщо гра почалася з орла і не закінчилася на другому ходу, то це означає, що другим ходом теж випав орел і довжина такої гри в середньому дорівнює  $1 + R_o$ , оскільки ми можемо забути про першого орла і вважати, що гра почалася з другого ходу. Таким чином отримуємо рівняння  $R_o = \frac{2 + (1 + R_o)}{2}$ , звідки одразу знаходимо  $R_o = 3$ . З іншого боку, якщо гра почалася з решки, то вона фактично почалася заново, тобто  $R_p = 1 + R$ . Маємо систему:

$$\begin{cases} R = \frac{R_o + R_p}{2} \\ R_p = 1 + R \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 4 \\ R_p = 5 \end{cases}$$

Отже, в цьому випадку гра в середньому закінчиться на четвертому ходу - на два ходи швидше.

Навіть якщо ймовірність того, що (ОРОР) з'явиться швидше ніж (ОРОО) буде  $\frac{9}{14}$ , то середня кількість підкидань, що потрібна для отримання (ОРОР) буде більшою за середню кількість підкидань до появи (ОРОО). Можна зробити висновок, що навіть, якщо ймовірність того, що подія А з'явиться швидше за подію В, більша за ймовірність того, що В з'явиться швидше, можливий варіант, коли чекати появи події А прийдеться довше. [9]

### 4.3 Статистичне дослідження

В додатку В наведено програму, що симулює 4 різні ситуації. У першій ситуації 1000000 разів відбувається наступна гра: генератор псевдовипадкових чисел симулює підкидання монети до тих пір, поки не випаде підряд серія з 2 орлів. Програма записує кількість підкидань монет до першої появи заданої серії. У другій ситуації відбувається така сама гра, як у першій, тільки гра вважається завершеною, коли випала серія орел, потім решка. Третя ситуація аналогічна до першої, проте ймовірність випадіння орла збільшена до 56%, гра йде до випадіння 2 орлів. Четверта ситуація аналогічна до третьої, за єдиною відмінністю, що гра відбувається до випадіння орла, потім решки. В результаті отримали такі дані: з першої ситуації середня кількість підкидань монет до появи серії з 2 орлів становить 6,006708, що з точністю до 1 знака після коми відповідає математичному очікуванню числа кількості підкидань. З другої ситуації бачимо схожі результати, середня кількість підкидань монет до появи серії з орла та решки становить 4,001534, що так само з точністю до 1 знака після коми відповідає математичному очікуванню числа кількості підкидань. Отже, ми бачимо, що хоча ймовірність випадіння 2 орлів така сама, як і орла, а потім решки, проте чекати випадіння 2 орлів треба в 1,5 рази довше. Результат 3 та 4 ситуацій ще цікавіший: середня кількість підкидань монет до появи серії з 2 орлів, за умови, що ймовірність випадіння орла 56%, становить 4,971213, а випадіння орла, потім решки становить 4,061425. Це означає, що, хоча

ймовірність появи орла більша за ймовірність появи решки, серію з 2 орлів ми отримаємо в середньому через 5 підкидань, а серію орел решка через 4. Такі висновки на перший погляд можуть здатись неймовірними.

## 5 Парадокс транзитивності

### 5.1 Формулювання парадоксу

Два гравці D і R грають у наступну гру. На першому кроці гравець D розставляє числа від 1 до 18 на 3 гральних кістках, записуючи по одному числу з набору на кожній грані костей за умовою, що кожне число має бути використано лише один раз. На другому кроці гравець R, уважно роздивившись всі 3 кістки, вибирає одну з них. На третьому кроці гравець D вибирає одну з останніх двох кісток. На останньому кроці D і R кидають свої гральні кістки і виграє той, в кого випало більше число. Можна подумати, що ця гра є вигіднішою для гравця R, оскільки незалежно від того, як D занумерує кістки, R завжди може вибрати кращу з 3. Відповідно шанс виграти у R становить щонайменше 50%. Проте справджується зовсім навпаки: D може так занумерувати кістки, що він буде вигравати з ймовірністю  $\frac{21}{36}$ , незалежно від того, яку кістку вибере R. [9]

### 5.2 Пояснення парадоксу

Цей парадокс виникає через систему нумерації “поразка по колу”, за якою кожна кістка перемагає рівно одну з двох інших, що означає, що серед кісток нема найкращої. Нехай A, B та C позначають кістки і припустимо, що граєць A занумерував кістки наступним чином:

18,10,9,8,7,5 на гранях кістки A

17,16,15,4,3,2 на гранях кістки B

14,13,12,11,6,1 на гранях кістки C

За формулою (1.1) нескладно розрахувати, що на A з’явиться число, більше за число на B, з ймовірністю  $\frac{21}{36}$ . Аналогічно на B випадє число більше, за число на C, з ймовірністю  $\frac{21}{36}$ . І ймовірність більшого числа при підкиданні C, ніж при

підкиданні А, теж рівна  $\frac{21}{36}$ . Відповідно, якщо А занумерував кістки таким чином, то його позиція переважає. [9]

### 5.3 Статистичне дослідження

В додатку Г наведено програму, що симулює 3 випадки гри, описаної вище. У першому випадку гравець R бере кістку А, на що гравець D відповідає підбраною кісткою С. У другому випадку гравець R бере кістку В, потім гравець D вибирає кістку А. У третьому випадку гравець R бере кістку С, на що гравець D обирає кістку В. У кожному з випадків програма імітує 1000000 ігор з підкиданням костей, які вибрали гравці. Ймовірність перемоги гравця D становила 0,583 з точністю до 3 знаків після коми у всіх 3 випадках. Оскільки  $\frac{21}{36} = 0,58(3)$ , то практичний дослід підтвердив, що ця гра є насправді не вигідною для гравця R, який обирає кістки перший.

## ВИСНОВКИ

У курсовій роботі ми ознайомились з основними поняттями теорії ігор та теорії ймовірності. Разом з цим ми розглянули 4 дуже цікаві парадокси, кожен з яких показує, наскільки математика глибинна наука, яка містить таємниці, здібні ввести в оману навіть найвеличніші розуми у світі. Прогрес в математиці, як і в інших науках, в більшості визначається такими питаннями та результатами, що змушують змінити наше попереднє представлення і побачити, що нові рішення є водночас природними та прекрасними. Парадокси, тобто твердження, що суперечать інтуїції, проте є істинними результатами, можливо, є найкращим прикладом проблем такого типу. Вивчення і розуміння деякої області науки за допомогою парадоксів є одним з найкращих способів розвинути у себе справжню інтуїцію. Теорія ймовірностей, наука про випадкові події, була завжди багата на парадокси. [9]

Для того, щоб довести, що наша інтуїція дійсно може нас підводити, ми провели 4 статистичних експерименти. Кожен з них підтвердив правдивість теоретичних результатів парадоксів. Експерименти проводились за допомогою 4 програм, написаних на базі мови програмування JavaScript.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Whitaker, Craig F. (1990). [Letter]. «Ask Marilyn» column, Parade Magazine p. 16 (9 September 1990).
2. Williams, Richard (2004). Appendix D: The Monty Hall Controversy. Course notes for Sociology Graduate Statistics I.
3. Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій (для студентів 2 курсу заочної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”) / А. І. Колосов, Ю. Є. Печеніжський, С. О. Станішевський, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 128 с.
4. Теорія ймовірностей : методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7: у 2 ч. / уклад. : В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Т. А. Агошкова ; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2013. -Ч. 2. Випадкові величини. - 49с.
5. Швець Валерій Тимофійович Теорія ймовірностей і математична статистика Одеса. Видавництво ВМВ, 2018 - 218 с.
6. Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 1. Випадкові події: Лекції і практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 143 «Атомна енергетика», спеціалізації «Атомні електричні станції» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. В. Веригіна, О. В. Островська. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,99 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 57 с.
7. Донець Л.І., Шепеленко О.В., Баранцева С.М., Сергєєва О.В., Веремейчик О.Ф.: Обґрунтування господарських рішень та оцінювання ризиків. Київ. Видавництво: Центр учбової літератури, 2012. – 472 с.
8. Electronics and information technologies. 2015. Issue 5. P. 137–150

9. Габор Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240.

## Додаток А (обов'язковий) Текст програми “Гра з Монті Голлом”

```
let noSwapDoorStrategyGameResults = noSwapDoorStrategyGame();
console.log("Стратегія не змінювати двері \n" + "Кількість перемог: " +
noSwapDoorStrategyGameResults.victories + "\n" + "Кількість ігор:" +
noSwapDoorStrategyGameResults.amountOfGames + "\n" + "Процент перемог: " +
noSwapDoorStrategyGameResults.winPercent.toFixed(2));
let swapDoorStrategyGameResults = swapDoorStrategyGame();
console.log("Стратегія зміни дверей \n" + "Кількість перемог: " +
swapDoorStrategyGameResults.victories + "\n" + "Кількість ігор:" +
swapDoorStrategyGameResults.amountOfGames + "\n" + "Процент перемог: " +
swapDoorStrategyGameResults.winPercent.toFixed(2));

// stay on chosen door till the end strategy
function noSwapDoorStrategyGame() {
    let victoryAmount = 0;
    let gamesToPlay = 1000000;
    for(let i = 0; i < gamesToPlay; i++) {
        let choosenDoor = chooseDoor();
        let doorWithCar = generateNumberOfCarDoor();
        if(choosenDoor === doorWithCar) {
            victoryAmount++;
        }
    }
    return {
        victories: victoryAmount,
        amountOfGames: gamesToPlay,
        winPercent: victoryAmount*100/gamesToPlay
    }
}

// choose door strategy
function swapDoorStrategyGame() {
    let victoryAmount = 0;
    let gamesToPlay = 1000000;
    for(let i = 0; i < gamesToPlay; i++) {
        let choosenDoor = chooseDoor();
        let doorWithCar = generateNumberOfCarDoor();
        if(choosenDoor !== doorWithCar) {
            victoryAmount++;
        }
    }
    return {
        victories: victoryAmount,
        amountOfGames: gamesToPlay,
        winPercent: victoryAmount*100/gamesToPlay
    }
}

function generateNumberOfCarDoor() {
    let carProbability = Math.random();
    if(carProbability < 0.33333) {
        return 1;
    }
}
```

```
    else if(carProbability < 0.6666667) {
      return 2;
    }
    else {
      return 3;
    }
  }
}

function chooseDoor(){
  let doorProbability = Math.random();
  if(doorProbability < 0.33333) {
    return 1;
  }
  else if(doorProbability < 0.6666667) {
    return 2;
  }
  else {
    return 3;
  }
}
```

## Додаток Б (обов'язковий) Текст програми “Гра з підніманням пальців”

```
let game = gladiatorGame();
console.log("-----Гра----- \n" + "Кількість ігор: " +
game.amountOfGames + "\n" + "Кількість доларів виграних гравцем Q: " +
game.QProfit + "\n" + "Середній виграш гравця Q за одну гру: " +
game.averageProfitPerRound);

function gladiatorGame(){
    let gamesToPlay = 1000000;
    let sum = 0;
    for(let i = 0; i < gamesToPlay; i++) {
        let QPlayerFinger = chooseFinger();
        let RPlayerFinger = chooseFinger();
        if(QPlayerFinger === RPlayerFinger) {
            if(QPlayerFinger === 1) {
                sum -= 2;
            }
            else {
                sum -= 4;
            }
        }
        else {
            sum += 3;
        }
    }
    return {
        QProfit: sum,
        amountOfGames: gamesToPlay,
        averageProfitPerRound: sum/gamesToPlay
    }
}

function chooseFinger(){
    let probability = Math.random();
    if(probability < 0.583333333333) {
        return 1;
    }
    else {
        return 2;
    }
}
```

## Додаток В (обов'язковий) Текст програми “Гра з підкиданням монет”

```
let flip = eagleEagleSeries();
console.log("-----Орел Орел серія----- \n" + "Кількість
підкидань: " + flip.flipAmount + "\n" + "Середня кількість підкидань до появи 2х
орлів: " + flip.mean);
flip = eagleTailSeries();
console.log("-----Орел Решка серія----- \n" + "Кількість
підкидань: " + flip.flipAmount + "\n" + "Середня кількість підкидань до появи
серії Орел Решка: " + flip.mean);
flip = eagleEagleMoreProbabilitySeries();
console.log("-----Орел Орел серія з шансом випадіння орла 56%-----
--- \n" + "Кількість підкидань: " + flip.flipAmount + "\n" + "Середня кількість
підкидань до появи серії Орел Орел: " + flip.mean);
flip= eagleTailMoreProbabilitySeries();
console.log("-----Орел Решка серія з шансом випадіння орла 56%-----
---- \n" + "Кількість підкидань: " + flip.flipAmount + "\n" + "Середня кількість
підкидань до появи серії Орел Решка: " + flip.mean);

function eagleEagleSeries() {
  let flipAmount = 1000000;
  let globalHistory = [];
  for(let i = 0; i<flipAmount; i++) {
    let history = [];
    while(!(history[history.length-1]==="eagle" && history[history.length-
2]==="eagle")) {
      let coin = (Math.random() < 0.5) ? "eagle" : "tail";
      history.push(coin);
    }
    globalHistory.push(history.length);
  }
  return {
    flipAmount: flipAmount,
    mean: arrayAverage(globalHistory)
  }
}

function eagleTailSeries() {
  let flipAmount = 1000000;
  let globalHistory = [];
  for(let i = 0; i<flipAmount; i++) {
    let history = [];
    while(!(history[history.length-1]==="eagle" && history[history.length-
2]==="tail")) {
      let coin = (Math.random() < 0.5) ? "eagle" : "tail";
      history.push(coin);
    }
    globalHistory.push(history.length);
  }
  return {
    flipAmount: flipAmount,
    mean: arrayAverage(globalHistory)
  }
}
```

```

}

function eagleEagleMoreProbabilitySeries() {
  let flipAmount = 1000000;
  let globalHistory = [];
  for(let i = 0; i<flipAmount; i++) {
    let history = [];
    while(!(history[history.length-1]==="eagle" && history[history.length-
2]==="eagle")) {
      let coin = (Math.random() < 0.56) ? "eagle" : "tail";
      history.push(coin);
    }
    globalHistory.push(history.length);
  }
  return {
    flipAmount: flipAmount,
    mean: arrayAverage(globalHistory)
  }
}

function eagleTailMoreProbabilitySeries() {
  let flipAmount = 1000000;
  let globalHistory = [];
  for(let i = 0; i<flipAmount; i++) {
    let history = [];
    while(!(history[history.length-1]==="eagle" && history[history.length-
2]==="tail")) {
      let coin = (Math.random() < 0.56) ? "eagle" : "tail";
      history.push(coin);
    }
    globalHistory.push(history.length);
  }
  return {
    flipAmount: flipAmount,
    mean: arrayAverage(globalHistory)
  }
}

function arrayAverage(arr) {
  let sum = 0;
  for(let i in arr) {
    sum += arr[i];
  }
  let arrLength = arr.length;
  return (sum / arrLength);
}

```

## Додаток Г (обов'язковий) Текст програми “Гра з гральними кістками”

```
let A = [18, 10, 9, 8, 7, 5];
let B = [17, 16, 15, 4, 3, 2];
let C = [14, 13, 12, 11, 6, 1];
let game = transitivityGame(A, C);
console.log("-----Гра----- \n" + "Кількість ігор: " +
game.games + "\n" + "Кількість ігор виграних 2м гравцем: " + game.victories +
"\n" + "Процент перемог 2го гравця: " + game.percent);
game = transitivityGame(B, A);
console.log("-----Гра----- \n" + "Кількість ігор: " +
game.games + "\n" + "Кількість ігор виграних 2м гравцем: " + game.victories +
"\n" + "Процент перемог 2го гравця: " + game.percent);
game = transitivityGame(C, B);
console.log("-----Гра----- \n" + "Кількість ігор: " +
game.games + "\n" + "Кількість ігор виграних 2м гравцем: " + game.victories +
"\n" + "Процент перемог 2го гравця: " + game.percent);

function transitivityGame(firstPick, secondPick) {
  let victories = 0;
  let gamesToPlay = 1000000;
  for(let i = 0; i < gamesToPlay; i++) {
    if(firstPick[generateCubeNumber()] < secondPick[generateCubeNumber()]) {
      victories++;
    }
  }
  return {
    games: gamesToPlay,
    victories: victories,
    percent: victories/gamesToPlay
  }
}

function generateCubeNumber() {
  let probability = Math.random();
  if(probability < 0.1666666) {
    return 0;
  }
  else if(probability < 0.33333333) {
    return 1;
  }
  else if(probability < 0.5) {
    return 2;
  }
  else if(probability < 0.6666666666) {
    return 3;
  }
  else if(probability < 0.83333333333) {
    return 4;
  }
  else {
    return 5;
  }
}
```