

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Києво-Могилянська академія»  
Факультет інформатики  
Кафедра прикладної математики

## Курсова робота

на тему: «ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ РЯДІВ»

Виконав: студент 3-го року навчання,

Освітньої програми «Прикладна  
математика», 113

Яценко Павло Олександрович

Керівник Митник Ю.В.  
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена  
з оцінкою \_\_\_\_\_

Секретар ЕК \_\_\_\_\_

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ р.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 .....	5
1.1 Базові поняття.....	5
1.2. Важливі теореми та критерії .....	7
РОЗДІЛ 2 .....	9
2.1. Аксиоми Харді.....	9
2.2. Підсумовування за Чезаро.....	10
2.3 Підсумовування за Гельдером .....	14
2.4. Підсумовування за Пуассоном-Абелем .....	17
РОЗДІЛ 3 .....	21
3.1. Теорема Таубера.....	21
4.2. Зв'язок між методами Чезаро та Пуассона-Абеля.....	25
ВИСНОВКИ.....	28
ДОДАТКИ.....	30
Додаток 1 .....	30

## ВСТУП

Знаходження сум розбіжних рядів вже довгий час є вкрай цікавим і також не менш важливим завданням математичного аналізу. Проте були часи, коли математики вважали розбіжні ряди чимось непотрібним, ба навіть, як виразився Нільс Генрік Абель, «винаходом диявола» [1, с. 33]. Таке ставлення до них є цілком зрозумілим: їх можна підсумовувати різними методами і отримувати неоднозначні результати.

А ще раніше, навіть саме поняття нескінченності як таке зрідка ставало предметом досліджень. Один з перших кроків у цій царині зробив Архімед. Він не використовував поняття «нескінченність» напряду, проте застосував суму нескінченної геометричної прогресії для обрахунку площі, обмеженої параболою та прямою.

Наступна віха у історії рядів — XVII - XVIII століття. Саме тоді жили і працювали, зокрема, такі видатні математики як Брук Тейлор, Леонард Ейлер, Готфрід Лейбніц та Ісак Ньютон. Зокрема, пан Ейлер, запропонував перший метод підсумовування розбіжних рядів.[2]

Саме з того часу теорія рядів розпочала свій активний розвиток. Окрім вищезгаданих особистостей, упродовж наступних століть до неї доклались також Луї Коші, Карл Гаус, Колін Маклорен, Джеймс Грегорі та багато інших відомих нам зі сторінок підручників з математичного аналізу (і не тільки) людей.

Нарешті, у кінці XIX ст. з'являється метод середніх арифметичних, який також називають методом Ернесто Чезаро, який є першим *сучасним* методом підсумовування. У подальшому будуть запропоновані, зокрема, такі методи: Гельдера, Пуассона-Абеля, Вороного, Рамануджі та інші.

Важливим нововведенням стала постановка базових властивостей, які може мати метод підсумовування, що дозволило отримувати більш узгоджені між собою та передбачувані результати.

На сьогоднішній день, розбіжні ряди мають велике значення не лише для багатьох розділів математики, але й для інших наук: фізики, зокрема, квантової механіки(наприклад, вони часто зустрічаються у теорії збурень), хімії(при вібраційної спектроскопії для дослідження молекулярної структури речовин часто зустрічаються розбіжні ряди), тощо.

Мета роботи: з'ясувати взаємозв'язок між різними методами підсумовування розбіжних рядів.

Завдання:

- Пригадати основні поняття теорії рядів;
- На основі попереднього завдання, розібрати методи присвоєння значень розбіжним рядам;
- Простежити, як різні методи узгоджуються між собою;
- Навести приклади;

Об'єкт дослідження: розбіжні ряди.

Методи дослідження: описові методи пошуку, аналізу та узагальнення.

Робота складається зі вступу, трьох розділів основної частини, висновків та списку джерел, а також Додатку 1(трохи коду на Python)

У першому розділі наведено базові поняття теорії рядів, а також теореми, необхідні для подальшого розгляду теми.

Другий розділ присвячений методам підсумовування за Чезаро, Гельдером та Пуассоном-Абелем. Розглянуті їх властивості.

У третьому розділі розглянуті теорема Таубера та зв'язок методів Чезаро та Пуассона-Абеля.

Графіки, які присутні у роботі, створені за допомогою бібліотеки PyPlot мови Python.

## РОЗДІЛ 1

Сходинка за сходинкою людство будувало сучасний математичний апарат. Тема даної роботи, зокрема, впливає з числових послідовностей, їх сум та властивостей цих сум. Отже, доцільно почати з короткого повторення основ.

### 1.1 Базові поняття

Почнемо з означення ряду.

**Означення 1.1.** Позначимо нескінченну послідовність чисел як

$$\{a_i\}, a \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}.$$

Тоді *нескінченний ряд*  $A$  над цією послідовністю визначається як:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots$$

Числа  $a_i$  — називають *членами* ряду.

**Означення 1.2.** Для  $\forall n \in \mathbb{N}$ , суму  $n$  перших членів ряду позначають

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

і називають *частковою сумою* ряду.

**Означення 1.3.** Нехай  $s_n$  —  $n$ -та часткова сума ряду  $A$ .

Ряд  $A$  називається *збіжним*, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  (границя послідовності його часткових сум) збігається до деякого числа  $s \in \mathbb{R}$ . Це число називають *сумою ряду*.

Якщо ця границя дорівнює  $\pm\infty$  або ж взагалі не існує, то такий ряд є *розбіжним*.

**Означення 1.4.** Ряд, отриманий шляхом відкидання від даного  $n$  перших членів, називається  *$n$ -тим залишком ряду*. Сума  $n$ -того залишку позначається:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Для залишку ряду справедливе наступне:

- Якщо ряд збігається, то і будь-який його залишок теж. І навпаки.
- Якщо ряд збігається, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$

У якості прикладу, поглянемо, як поведуть себе деякі ряди.

**Приклад 1.1.** Нехай  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , відповідний ряд  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ .

Оскільки

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Даний ряд збіжний і його сума дорівнює 1. У наступному прикладі поглянемо на розбіжний ряд:

**Приклад 1.2.** Розглянемо ряд  $G = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ , де  $g_n = (-1)^n$  — ряд Гранді. Його часткові суми набувають двох значень: 0, або 1, і відповідно, границя послідовності часткових сум дає нам зрозуміти, що ряд розбіжний. Проте, якби ми все ж спробували прийти до якогось значення, ми могли б отримати наступне:

$$G = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

І в той же час

$$G = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

Продовжуючи такі міркування, можна сказати, що

$$1 - G = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = G$$

І, відповідно,  $G = \frac{1}{2}$ . Свого часу цей ряд викликав багато суперечок, щодо того, яке значення для нього вважати правильним і чи варто це взагалі робити. Корінь проблеми в тому, що схожі міркування, зазвичай, беззмістовні для розбіжних рядів, адже, за розглянутими означеннями, вони не мають суми. Ми ще повернемося до цього прикладу у наступних розділах, коли вже матимемо необхідний для роботи з ними інструментарій.

## 1.2. Важливі теореми та критерії

Неможливо працювати з рядами, не згадавши про принцип Коші, критерій Коші та теореми Абеля (оскільки далі ми працюватимемо в тому числі зі степеневими рядами).

Проте, оскільки основна тема даної роботи все ж стосується саме методів підсумовування розбіжних рядів, доречно буде привести ці теореми та критерії без доведення. За детальним розглядом доведень, а також теми послідовностей та рядів у цілому, можна звернутись, наприклад, до джерела [3]

### Принцип Коші.

Якщо

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

деяка числова послідовність, то для того щоб вона збігалась до деякої скінченної границі  $s$  необхідно і достатньо, щоб при  $\forall \epsilon > 0$  знайшлося  $n$  : для  $\forall m \geq 0$  виконується

$$|S_{n+m} - S_n| < \epsilon \quad [3, \text{с. 35} - 36]$$

## Критерій Коші збіжності рядів.

Щоб ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

був збіжним, необхідно і достатньо, аби для послідовності його часткових сум  $S_n$

виконувалось:  $\forall \epsilon > 0 \exists n : \forall m \geq 0$

$$|s_{n+m} - s_n| < \epsilon. [3, с. 38]$$

## Теорема Абеля.

Якщо степеневий ряд

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1.2.1)$$

є збіжним для деякого  $x = x_0$ , то він також збігається для  $\forall x$ , таких, що

$$|x| < |x_0|$$

І навпаки, якщо ряд є розбіжним для  $z = z_0$ , то він розбіжний і для  $\forall x$ , таких, що

$$|x| > |x_0|. [3, с. 111 – 112]$$

## Друга теорема Абеля

Якщо ряд (1.2.1) має радіус збіжності  $R$ , причому збігається і при  $x = R$ , то його збіжність є рівномірною на сегменті  $[0, R]$ , а сума ряду – неперервною зліва у точці  $x = R$  функцією:

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Аналогічне твердження має місце, якщо ряд збіжний при  $x = -R$ . [3, с. 268]

## РОЗДІЛ 2

У цьому розділі ми почнемо розгляд методів знаходження сум розбіжних рядів. Хотілося б зазначити, що, хоч ми і називаємо знайдені значення для розбіжних рядів їх «сумами», вони, звісно, відрізняються від таких у звичайному сенсі, адже вони не є границею їх часткових сум. Шляхом тих чи інших маніпуляцій над рядом, ці методи переходять до пошуку іншої границі і, якщо така існує, співставляють це значення ряду.

### 2.1. Аксиоми Харді

Почнемо з властивостей, які мають бути притаманні деякому методу підсумовування, аби з його допомогою можна було отримувати передбачувані результати, а також аби узгодити різні методи між собою.

Задамо такі властивості. Для деякої послідовності  $\{a_i\}$ :

- Множення на скаляр:  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k \cdot a_i = k \cdot s; \forall k \in \mathbb{R}$ ;
- Адитивність:  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a \wedge \sum_{i=1}^{\infty} b_i = b \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = a + b$ ;
- Стабільність:  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = s \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = s - a_0$  і навпаки;

Такі ж властивості притаманні і звичайним збіжним рядам, а тепер ми поширюємо їх і на ряди, збіжні за деяким методом підсумовування.

На додачу, нам хотілося б, аби метод підсумовування не надавав нових значень рядам, збіжним у звичному розумінні. Виділимо це в означення:

**Означення 2.1.1** Метод підсумовування називають *регулярним*, якщо він підсумовує будь-який збіжний ряд до його звичайної суми.

**Означення 2.1.2.** Метод називається *абсолютно регулярним*, якщо, на додачу до регулярності, він має ще таку властивість:

$$\forall \{a_i\} : s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty (S)$$

Де (S) — позначення для застосованого методу підсумовування. [4, с.6-10]

Тобто, якщо часткові суми підпослідовностей прямують до  $+\infty$  або до  $-\infty$ , то і сума, яку ми знаходимо деяким методом підсумовування S також прямують до  $+\infty$  або  $-\infty$ .

## 2.2. Підсумовування за Чезаро

Ідея даного методу належить Георгу Фробеніусу, проте названий він на честь італійського математика Ернесто Чезаро, який працював над його подальшим розвитком [5, с. 401]. Далі ми дамо його означення, а також покажемо, що він відповідає згаданим вище властивостям.

**Означення 2.2.1.** Нехай  $\{a_n\}$  — деяка послідовність, а  $s_k$  — її  $k$ -та часткова сума. Тоді послідовність  $\{c_n\}$  визначається як:

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i$$

Якщо  $c_n$  має границю  $s \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то кажемо, що  $\{a_n\}$  є *підсумовною за Чезаро* і має суму Чезаро  $s$ , яку позначатимемо  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s (C)$ . [3, 435]

Покажемо, що підсумовування за Чезаро відповідає аксіомам Харді та є регулярним.

1) *Множення на скаляр.* Нехай  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j \right) = a (C)$ ,

розглянемо ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i, c \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k c \cdot a_i \right) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i \right) = c \cdot a(C);$$

2) *Адитивність*. Маємо  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a(C)$  та  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = b(C)$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k b_i \right) = a + b(C); \end{aligned}$$

3) *Стабільність*. Позначимо часткові суми  $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  та

$t_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ . Маємо, що  $t_n = s_{n+1} - a_0$ . Тоді, якщо  $s_n = s(C)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t_0 + t_1 + \dots + t_n}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \left( \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n+1}}{n+1} - a_0 \right) \right) = \\ &= s - a_0 [1, \text{с. 8} - 9] \end{aligned}$$

4) *Регулярність*. Нехай ряд  $A$  збігається до деякого числа  $s$  у звичайному розумінні. Треба показати, що він також збігається до  $s$  за Чезаро.

Маємо:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Тоді  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ , таке що для  $\forall n > N$  виконується

$|s_n - s| < \epsilon$ . Тоді:

$$\begin{aligned} |c_n - s| &= \left| \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} - s \right| = \left| \frac{s_1 - s + s_2 - s + \dots + s_n - s}{n} \right| \\ &\leq \frac{|s_1 - s| + \dots + |s_{N-1} - s|}{n} + \frac{|s_N - s| + \dots + |s_n - s|}{n} \\ &< \frac{|s_1 - s| + \dots + |s_{N-1} - s|}{n} + \left| \frac{n - N + 1}{n} \right| \cdot \epsilon \end{aligned}$$

При  $n \rightarrow \infty$   $\left| \frac{n - N + 1}{n} \right| \cdot \epsilon$  прямує до  $\epsilon$ , а  $\frac{|s_1 - s| + \dots + |s_{N-1} - s|}{n}$  — до 0.

Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = s$ , тому метод Чезаро є регулярним.

*Абсолютна регулярність* методу також не викликає сумнівів, адже часткові суми розбіжного знакопостійного ряду також утворюють такий ряд.[4, с.10]

Саме тому метод Чезаро здатен підсумувати лише знакозмінні розбіжні ряди(проте, як ми побачимо на далі, не всі).

Розглянемо кілька прикладів використання методу Чезаро.

**Приклад 2.2.1.** Повернемося до згаданого в першому розділі ряду Гранді.

$$s_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i = \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

Застосовуючи метод Чезаро, маємо:

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n s_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i + 1}{2} = \frac{1}{2 \cdot n} \left( n + \sum_{i=0}^n (-1)^i \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} s_n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} s_n \right) = \frac{1}{2} (C)$$

Також, оскільки ряд Гранді це частковий випадок геометричного ряду з  $r = -1$ , ми можемо сказати, що використання методу Чезаро розширює діапазон збіжності останнього з  $r \in (-1,1)$  до  $r \in [-1,1)$ .

**Приклад 2.2.2.** Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n$$

Він зображений на рис. 2.2.1:

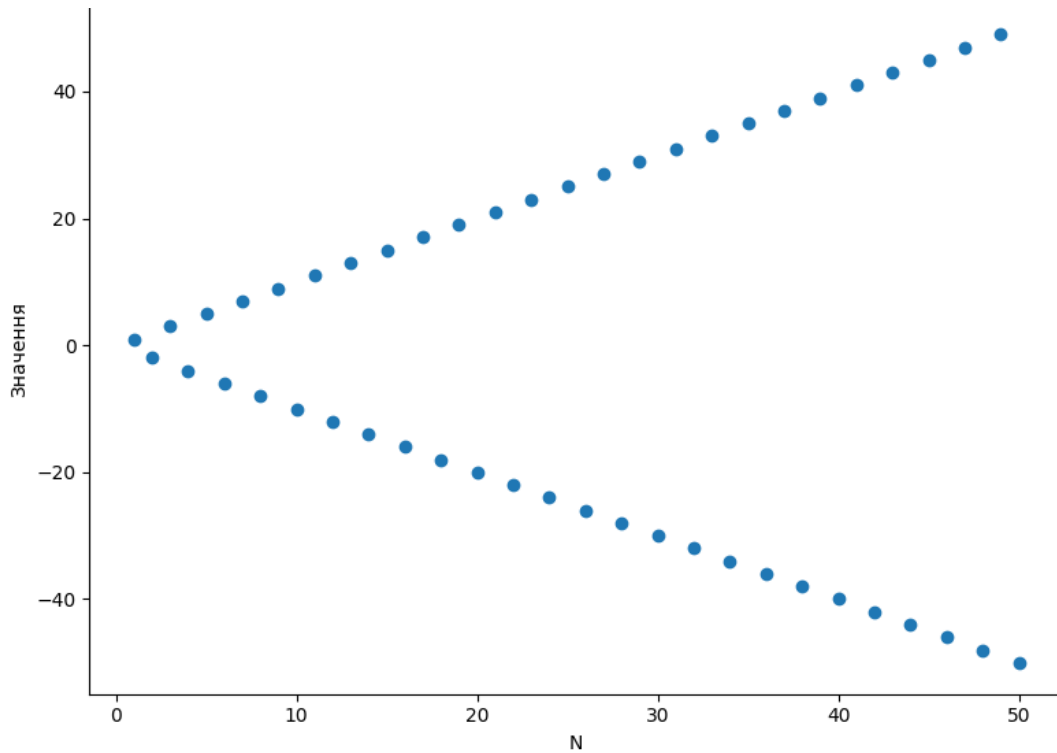


Рисунок 2.2.1

Його часткові суми утворюють послідовність  $s_n = 1, -1, 2, -2, 3, \dots$

Тоді

$$s_n = (-1)^{n+1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

За Чезаро

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Обрахуємо перші значення послідовності  $\{c_n\} = 1, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{5}, \dots$ ; Тоді:

$$c_n = \frac{n+1}{2n}, \text{ для непарного } n$$

$$c_n = 0, \text{ для парного } n$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$ ,  $\{c_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$  є послідовністю з 0 та  $\frac{1}{2}$  (Рис. 2.2.2), то вона розбіжна також і в сенсі Чезаро.

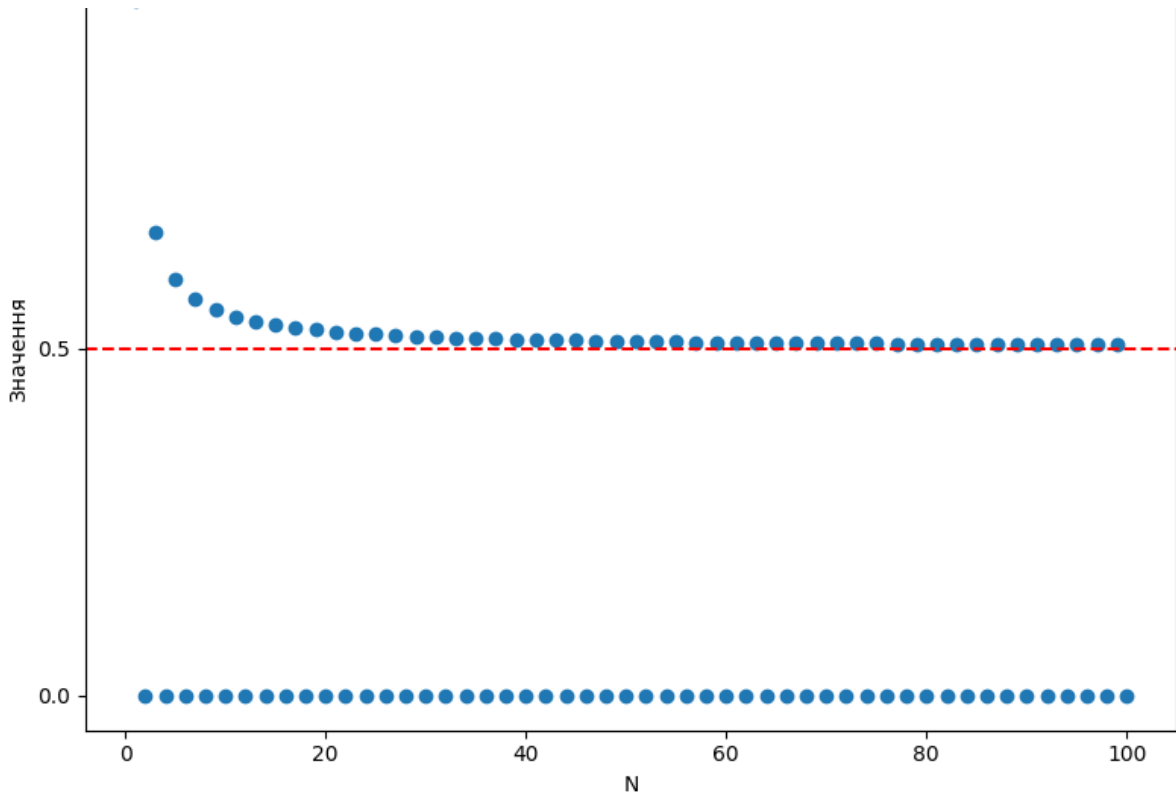


Рисунок 2.2.2

### 2.3 Підсумовування за Гельдером

Розглянемо тепер одне з узагальнень методу Чезаро, а саме метод німецького математика Отто Гельдера. Метод полягає в ітеративному застосуванні методу Чезаро до ряду  $k \geq 0$  разів. При  $k = 1$  він ідентичний вже розглянутому нами способу Чезаро першого порядку. На наступних кроках ми застосовуємо його до послідовності, отриманої на попередньому і так далі.

**Означення 2.3.1.** Нехай маємо ряд над послідовністю  $\{a_n\}$ , а його  $n$ -ту часткову суму позначимо як  $H_n^0$ .

$H_n^k$  задамо як:

$$H_n^{k+1} = \frac{H_1^k + H_2^k + \dots + H_n^k}{n}$$

Де  $k \in \mathbb{N}$  — скінченне.

Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^k$  існує, і дорівнює  $s \in \mathbb{R}$ , тоді ця границя називається сумою ряду за

Гельдером і позначається  $(H, k)$ :  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s(H, k)$ . [6]

Як вже було зазначено, метод Гельдера при  $k = 1$  ідентичний вже розглянутому методу Чезаро. Але чи буде він підсумовувати ті ж ряди коректно при більших значеннях  $k$ ?

**Теорема 2.3.1.** Якщо ряд підсумовний за  $(H, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то він також підсумовний за  $(H, l)$ ,  $l > k$ ,  $l \in \mathbb{N}$ .

*Доведення.* Нехай  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = A(H, k)$ . Тоді існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^k = A$ . Далі, для

$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N$

$$|H_n^k - A| < \epsilon$$

$$H_n^{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^k$$

Поглянемо на різницю  $H_n^{k+1}$  та  $A$

$$|H_n^{k+1} - A| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^k - A \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (H_i^k - A) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |H_i^k - A| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N |H_i^k - A| + \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n |H_i^k - A|$$

Тут  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N |H_i^k - A|$  прямує до 0, бо  $\sum_{i=1}^N |H_i^k - A|$  — скінченна.

А для  $\frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n |H_i^k - A|$ , оскільки  $i > N$ , виконується нерівність  $|H_i^k - A| < \epsilon$ ,  $\forall i$ .

Тому

$$|H_n^{k+1} - A| < \frac{n - N - 2}{n} \epsilon.$$

Оскільки ми можемо взяти нескінченно малий  $\epsilon$ , робимо висновок, що

$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^{k+1} = A$ . Ми показали, що якщо ряд має суму за  $(H, k)$ , то він підсумовний і за  $(H, k + 1)$ . Методом математичної індукції легко показати, що ряд також підсумовний і для  $(H, l), l > k$  ■

**Регулярність** методу Гельдера впливає з того, що при  $k=0$  він ідентичний звичному підсумовуванню, при  $k = 1$  – методу Чезаро (регулярність якого ми показали), а також зі щойно доведеної теореми (2.3.1).

Відповідність  $(H, k)$  аксіомам Харді впливає з властивостей (С).

**Приклад 2.3.** Повернемося до прикладу (2.2), який виявився розбіжним за Чезаро (тобто і для  $(H, 1)$ ). Маємо:

$$H_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{j} \sum_{j=1}^i H_j^0 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{j} \sum_{j=1}^i s_j \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$$

Бачимо, що  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{12} \dots$  і при подальшому розгляді ми знайдемо, що

$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^2 = \frac{1}{4}$ . Отже,  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot i = \frac{1}{4} (H, 2)$  (Рис. 2.3.1)

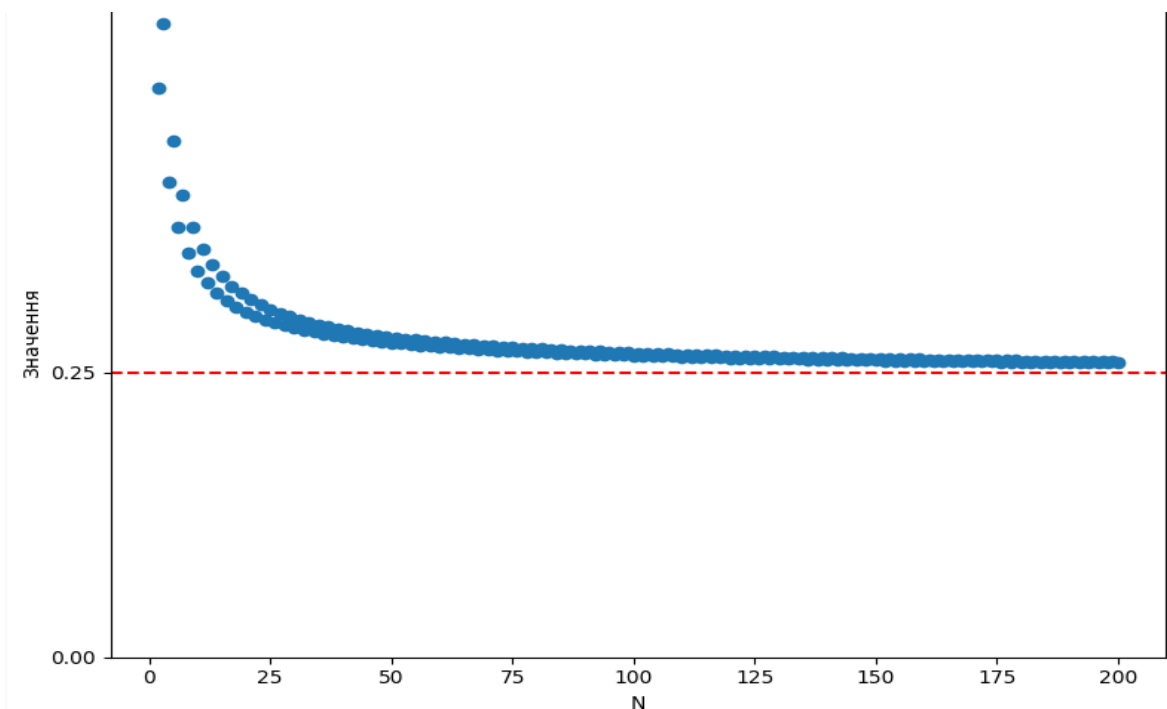


Рисунок 2.3.1

## 2.4. Підсумовування за Пуассоном-Абелем

У цьому розділі ми поглянемо на ще один метод підсумовування, а саме метод Пуассона-Абеля. Його суть полягає у розкладі даного ряду у степеневий.

**Означення 2.4.1.** За даним числовим рядом будується степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^{n-1} = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} + \dots$$

Якщо цей ряд є збіжним для  $0 < x < 1$  та його сума  $f(x)$  при  $x \rightarrow 1 - 0$  має границю  $s$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = s(A)$$

То цей ряд можна підсумувати за Пуассоном-Абелем, а  $s$  є його сумою в сенсі Пуассона-Абеля. [5, с. 429]. Позначення:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) = s(A)$$

Покажемо, що метод Пуассона-Абеля відповідає аксіомам Харді.

1) *Множення на скаляр.* Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a(A)$ . Тоді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n x^{n-1} = c \cdot \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) = c \cdot a(A)$$

2) *Адитивність.* Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a(A)$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b(A)$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^{n-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) + \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} \right) = a + b(A) \end{aligned}$$

### 3) Стабільність.

Позначимо часткові суми  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ ; та  $f_1(x) = a_1 + a_2x + \dots$ , так, що

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x) - a_0$$

Тоді, якщо  $f(x) = s(A)$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{1}{x} \cdot f(x) - a_0 \right) = s - a_0(A) \quad [4, \text{с. 8 - 9}]$$

4) *Регулярність*. Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – збігається до  $s$ . Тоді радіус збіжності відповідного йому степеневому ряду не менше за 1, а також ряд збігається при  $x = 1$ . Тому, за другою теоремою Абеля,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s(A) \quad [3, \text{с. 289}]$$

Тепер, коли ми дослідили властивості даного способу підсумовування, за традицією, перейдемо до прикладів.

**Приклад 2.4.1.** Знову поглянемо на ряд з Прикладу 2.2.2. Відповідний йому степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n \quad (2.4.1)$$

Оскільки даний ряд є збіжним при  $x \rightarrow 1 - 0$ , то, користуючись лінійністю збіжних рядів, маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n-1) x^n$$

Тут, лівий ряд у правій частині є геометричною прогресією, а так як правий ряд у правій частині є обмеженим зверху виразом  $\frac{1}{(1-x)^2}$ . Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1-x)^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (A) [4, \text{с. 286}]$$

Візуально, послідовність часткових сум степеневого ряду(2.4.1), при  $x$  близькому до 1, мають такий вигляд(Рис.2.4.1)

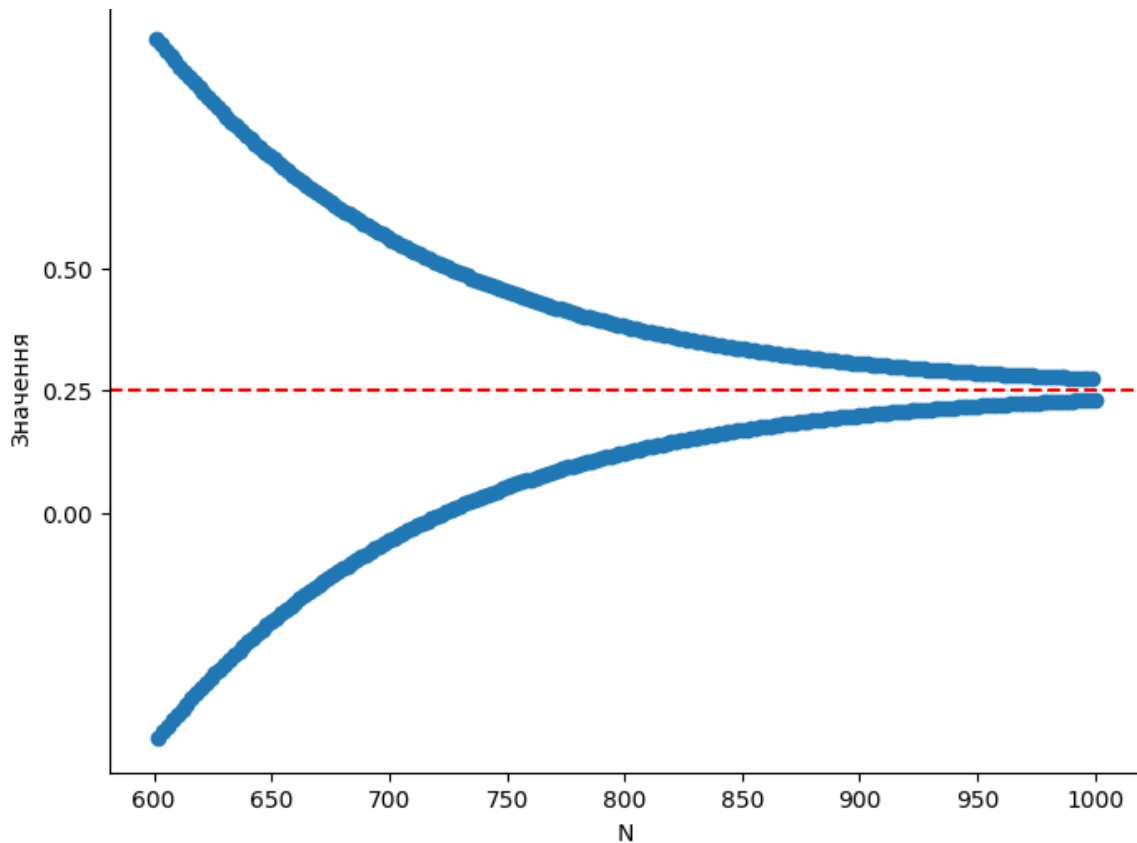


Рисунок 2.4.1

**Приклад 2.4.2.** Поглянемо на ряд Гранді. Відповідний степеневий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Його сума, відповідно,  $\frac{1}{1+x}$ , отже

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2} (A)$$

У цьому розділі ми розглянули декілька основних методів підсумовування. Усі вони виявилися лінійними, регулярними і навіть абсолютно регулярними.

Проте, метод не обов'язково має мати усі ці властивості, аби бути корисним. Більше того, як ми побачили, абсолютна регулярність розглянутих методів чітко дає зрозуміти, що їм під силу підрахувати лише знакозмінні ряди.

З прикладів, наведених вище, можна побачити, що розглянуті методи можуть давати однакові результати. Зв'язок методів Чезаро та Гельдера доволі очевидний і був доведений у Теоремі 2.3.1. Проте, чи не було отримання тих самих результатів і методом Пуассона-Абеля просто збігом? На це та інші питання покликаний відповісти наступний розділ.

## РОЗДІЛ 3

### 3.1. Теорема Таубера

У 1897 р. Альфред Таубер довів теорему про умови, за яких підсумовний за Пуассоном-Абелем ряд буде також збіжним у звичайному сенсі. Розглянемо її.

**Теорема Таубера.** Нехай ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A). \quad (3.1.1)$$

Тоді, щоб він збігався до тієї ж суми  $s$  й у звичайному розумінні, необхідно і достатньо, аби виконувалось наступне співвідношення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} \right) = 0 \quad (3.1.2)$$

*Доведення*

Почнемо з випадку, коли члени ряду (3.1.1) спадають настільки швидко, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0 \quad (3.1.3)$$

Покладемо

$$\delta_n = \max_{k \geq n} |ka_k|$$

З (3.1.3) слідує, що при збільшенні  $n$   $\delta_n \rightarrow 0$ . Візьмемо деяке  $N$  і запишемо

$$\sum_{n=0}^N a_n - s = \sum_{n=0}^N a_n(1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s \quad (3.1.4)$$

При  $0 < x < 1$

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) < n(1 - x)$$

А також

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}. \quad (3.1.5)$$

Оцінимо два перші доданки у (3.1.4):

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n (1-x^n) \right| \leq \sum_{n=0}^N |a_n| (1-x^n) \leq \sum_{n=0}^N |na_n| (1-x) \leq \delta_0 N (1-x)$$

Та

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leq (1-x)\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s \right|$$

Тому, з (3.1.4):

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - s \right| \leq (1-x)\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s \right|. \quad (3.1.6)$$

Тепер, для деякого  $\epsilon > 0$  та  $x = 1 - \frac{\epsilon}{N}$ , оберемо таке  $N$ , щоб виконувалась нерівність

$$\delta_{N+1} < \epsilon^2$$

А  $x$ , який залежить від  $N$ , оберемо настільки близьким до 1, щоб виконувалось

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n - s) \right| < \epsilon$$

Тоді, можна оцінити ліву частину (3.1.6):

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - s \right| \leq \epsilon \delta_0 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon} + \epsilon = (2 + \delta_0)\epsilon,$$

Оскільки  $\epsilon > 0$  – довільний, то ряд (3.1.4) є збіжним. Що і треба було показати для випадку (3.1.3).

Тепер перейдемо до загального випадку. Покладемо

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = v_n \text{ та } v_0 := 0$$

Тоді при  $n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}).$$

З огляду на це,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n - v_{n-1}}{n} x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n.$$

Посунемо нумерацію останньої суми у правій частині на одиницю вліво:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n+1} x^{n+1},$$

Звідси

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} \quad (3.1.7)$$

Представимо  $(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$  як

$$(1-x) \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} x^n + (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$$

та візьмемо довільний  $\epsilon > 0$  та оберемо, відповідно до (3.1.2), таке  $N$ , щоб при

$n \geq N + 1$  виконувалось  $\left| \frac{v_n}{n} \right| < \epsilon$ . Тоді, враховуючи (3.1.5), для  $\forall x \in (0,1)$ :

$$\left| (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n \right| < \epsilon \quad (3.1.8)$$

Наближаючи  $x$  до 1, можемо отримати, що

$$\left| (1-x) \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} x^n \right| < \epsilon \quad (3.1.9)$$

Об'єднавши (3.1.13) та (3.1.14), бачимо, що при  $x$ , близьких до 1:

$$\left| (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n \right| < 2\epsilon$$

Ліва частина нерівності не залежить від  $\epsilon$ , тому  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n \right) = 0$ .

Тому, а також через те, що ряд з умови теореми підсумовний за (A), рівність (3.1.7) дає нам, що

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} \right) = s - a_0 \quad (3.1.10)$$

Тепер можемо перейти до вже розглянутого на початку доведення випадку (3.1.3), оскільки  $n \frac{v_n}{n(n+1)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = s - a_0 \quad (3.1.14)$$

Для  $\forall N$  маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{(n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{v_{n-1}}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{v_n - v_{n-1}}{n} - \frac{v_N}{N+1} = \sum_{n=1}^N a_n - \frac{v_N}{N+1}, \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{v_N}{N+1}$$

Границя у правій частині = 0 за умовою, а за (3.1.14):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$$

Отже, ряд (3.1.1) є збігається до суми  $s$  і у звичайному розумінні. ■ [3, с. 295-300]

Ця теорема поклала початок багатьом іншим, які називають теоремами «тауберівського» типу. Аналогічно до щойно розглянутої, вони надають умови для збіжності ряду за одним методом підсумовування, якщо ряд є підсумовним за іншим.

#### 4.2. Зв'язок між методами Чезаро та Пуассона-Абеля

Ми вже побачили з прикладу 2.2.2 та прикладу 2.4.1, що ряди розбіжні за Чезаро можуть мати суму за Пуассоном-Абелем. І, у той же час, приклад 2.2.1 та приклад 2.4.2 показують, що сума ряду за (C) та (A) також може бути однаковою. Закрити питання щодо взаємин цих методів нам допоможе теорема, яка належить пану Фробеніусу.

Перш ніж навести її доведення, зазначимо, що ряд  $a_0 + a_1 + a_3 + \dots$  має суму за Чезаро тоді, коли він зростає повільніше за  $n$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0. \quad [3, \text{с. 302}] \quad (4.2.1)$$

**Теорема.** *Якщо ряд збігається у сенсі Чезаро до суми  $s$ , то він також збігається і за Пуассоном-Абелем до тієї ж суми.*

*Доведення.* Нехай ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C)$ . За (4.2.1) маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

А це означає, що при  $\forall \epsilon > 0$ , починаючи з деякого  $n$  матиме місце  $|a_n| < n\epsilon$ .

Тоді, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon x^n$$

Збігається при  $\forall x : |x| < 1$ . Для того ж  $x$  сходиться і

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Покладемо  $s_{-1} := 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Повторивши ці перетворення ще раз, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n s_k \right) x^n. \quad (4.2.2)$$

Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Та піднесемо його до квадрату

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \Rightarrow 1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Разом з (4.2.2) це дає нам

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s(C) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n s_k - s(C) \right) (n+1)x^n \quad (4.2.2)$$

Для  $\forall N \in \mathbb{N}$ :

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^n s_k - s(C) \right) (n+1)x^n + (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n s_k - s(C) \right) (n+1)x^n.$$

Оберемо таке  $N$ , щоб для  $\forall n > N$  виконувалось:

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (s_k - s(C)) \right| < \epsilon$$

Тоді для  $\forall x : 0 < x < 1$

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^n (s_k - (n+1)s(C))x^n &\leq (1-x)^2 \epsilon \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)x^n = \\ &= (1-x)^2 \epsilon \frac{1}{(1-x)^2} = \epsilon x^N < \epsilon \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Зафіксуємо  $N$  та візьмемо  $x$ , близький до 1. Тоді:

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^n s_k - (n+1)s(C) \right) x^n < \epsilon. \quad (4.2.4)$$

З (4.2.2), (4.2.3) та (4.2.4) випливає, що

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s(C) \right) = 0$$

Тобто  $s(C) = s(A)$ . ■ [3, с.303-305]

А от підсумовність за Пуассоном-Абелем не дає підстав стверджувати, що метод також підсумовний за Чезаро. Таким чином, метод Пуассона-Абеля є «сильнішим» за метод середніх арифметичних.

## ВИСНОВКИ

У першому розділі даної курсової роботи було розглянуто основні поняття, які стосуються теорії рядів, аби плавно перейти до розгляду основної теми. Також було розглянуто приклади.

Другий розділ був присвячений вже безпосередньо методам підсумовування. У ньому були дані означення, а також доведені їхні основні властивості.

Оскільки метод Гельдера вкрай очевидно пов'язаний з методом Чезаро, тема їх взаємодії також була розглянута. Було доведено, що метод Гельдера є «сильнішим» за метод середніх арифметичних.

Також був розглянутий метод Пуассона-Абеля. У цьому розділі ми на практиці побачили, що, здавалося б, різні методи підсумовування можуть приводити до однакових результатів.

У третьому розділі вже було наведено теоретичне підґрунтя взаємодії між методами підсумовування у вигляді теорем «тауберівського» типу.

У підсумку, почавши розгляд теми з основних властивостей та практичного застосування методів, ми отримали певні емпіричні дані (наприклад, що методи Гельдера та Пуассона-Абеля здатні підсумувати ряди, які не може порахувати метод Чезаро). І, крок за кроком, ці дані обґрунтували.

### Список використаних джерел

1. Maor E. To infinity and beyond: a cultural history of the infinite. Boston : Springer Science & Business Media, 2013. 284 p.
2. Barbeau E. J., Leah P. J. Euler's 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica*. 1976. Vol. 3, no. 2. P. 141–160.  
URL: [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(76\)90030-6](https://doi.org/10.1016/0315-0860(76)90030-6) (date of access 14.05.2023)
3. Воробьев Н. Н. Теория рядов. 4-е изд., перераб. и доп. Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 408 с.
4. Hardy G. H. Divergent series. Oxford : Clarendon Press, 1949. 396 p.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003, Т. 2. 864 с.
6. Volkov I. Hölder summation methods. *Encyclopedia of Mathematics*.  
URL: [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hölder\\_summation\\_methods&oldid=18982](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hölder_summation_methods&oldid=18982) (date of access 28.04.2023)
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: у двох частинах. Частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.

## ДОДАТКИ

### Додаток 1

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
"""Приклад 2.2"""
def series(n):
    return ((-1)**(n+1))*n
def cesaro(n):
    if n % 2 == 0:
        return 0
    return (n+1)/(2*n)
"""Приклад 2.3"""
# при k=2
def holder(n):
    s = 0
    for i in range(1, n+1):
        s += cesaro(i)
    return (1/n)*s
"""Приклад 2.4.1"""
def power_series_sum(n, x):
    series_sum = 0
    for n in range(1, n+1):
        term = ((-1)**(n+1)) * n * (x**(n-1))
        series_sum += term
    return series_sum
def get_points_to_plot(n):
    # підставте у return функцію з одного з прикладів, щоб вивести її
    return power_series_sum(n, 0.99)
# підставте кількість значень, які треба порахувати
N = 1000
# обраховуємо N значень та зберігаємо їх
sums = [get_points_to_plot(n) for n in range(1, N+1)]
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(range(1, N+1)[-400:], sums[-400:], 'o')
#додаткова пряма з заданими координатами, інколи використовується у прикладах
limit = 1/4
plt.axhline(y=limit, color='r', linestyle='--')
plt.yticks([i/4 for i in range(3)])
plt.xlabel("N")
plt.ylabel("Значення")
```

```
plt.title("Ряд")  
plt.show()
```