Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики

факультету інформатики

Курсова робота
за спеціальністю 113 Прикладна математика

освітня програма «Прикладна математика»

МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ ГРАФІВ З ДВОМА ЦИКЛАМИ

Керівник курсової роботи:
доктор фіз.-мат наук, професор
Олійник Б. В.
(прізвище та ініціали)

____
(підпис)
“____” __________ 2022 р.

Виконав студент 3 курсу напряму підготовки 113 «Прикладна математика»
Магдич Н.Ю.
(прізвище та ініціали)
“____” __________ 2022 р.

Київ 2022

Індивідуальне завдання до курсової роботи

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., д.ф.-м.н.
____________Б. В. Олійник
(підпис)
„____” _______________2022 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу

студенту 3 курсу факультету інформатики Магдичу Назару Юрійовичу

ТЕМА: Метрична розмірність графів з двома циклами.

Зміст курсової роботи:

Дата видачі „___” _________ 2022 р. Керівник ________________
(підпис)
Завдання отримав __________
(підпис)

ЗМІСТ

Анотація

Робота присвячена дослідженню метричної розмірності графів, які містять в собі рівно два цикли. Задля структуризації проекту такі графи були розділені на сімейства за принципом наявності, або відсутності спільної вершини двох циклів.

Дослідження опираються на властивість метричної розмірності простого циклу. Цій властивості присвячено підрозділ в розділі 2.

Також в роботі наведені необхідні теоретичні відомості та означення.

Ключові слова: теорія графів, метрична розмірність, метричний базис.

ВСТУП

Поняття метричного базису та метричної розмірності графа були запропоновані в праці [1] за авторством Сатлера, а також у роботі Харарі та Метлера [2]. Надалі цій темі було присвячено багато статей, оскільки метрична розмірність графів це потужний інструмент для дослідження явищ в сфері біотехнології, хімії, робототехніки та навігації.

Метричний базис дає змогу унікальним чином ідентифікувати вершини графа за їх відстанями до елементів базису, що надає широкий спектр застосувань цієї ідеї в різних галузях науки і технологій. Найбільш ілюстративний приклад застосування метричної розмірності графа на практиці є пошук зловмисника в мережі, тобто пошук джерела сигналу в мережі, яку можливо представити у вигляді графа.

Гері та Джонсон у праці [3] довели, що визначення метричної розмірності графа є NP-складною задачею. Тим не менш, для деяких типів графів вже визначено ефективніші алгоритми знаходження, або точні значення метричної розмірності. Подальші дослідження спрямовані на те, щоб виявити закономірності значень метричної розмірності родин графів (дерев, циклів, тощо)

Задача цієї роботи – визначити точні значення, або деякі закономірності метричної розмірності графів що містять рівно два цикли, розділяючи їх на родини за специфічними ознаками, наприклад, за наявністю вершин, що належать обом циклам, чи їх відсутністю.

Розділ 1 Основні положення

1.1 Загальні теоретичні відомості

Розглянемо метричний простір (V, d), де V– множина вершин деякого зв'язного, простого, неорієнтованого графа G, а $d(x, y)$, $x, y \in V$ – метрика, задана на V.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x = y; \\ \min(|\mu_i(x,y)|), \text{якщо } x \neq y; \end{cases}$$

де $\{\mu_i(x, y)\}$ – множина можливих шляхів від x до y. Тобто $d(x, y)$– довжина найкоротшого шляху від вершини x до y.

Розглянемо простий граф $G = (V, E)$:

Будемо казати, що вершина r розділяє (resolve) вершини x та y, якщо

$$d(r, x) \neq d(r, y).$$

Підмножину $M \subset V$ називають метричним генератором G, якщо:

$$\forall\, x, y \in V \;\; \exists\, r \in M : \; d(r, x) \neq d(r, y).$$

Тобто метричний генератор – така підмножина V, що для будь-якої пари $x, y \in V$ знайдеться така вершина $r \in M$ така, що r розділяє x та y

Представленням вершини x графа G відносно підмножини вершин $M = \{v_1, v_2, \dots, v_i\} \subset V$ будемо вважати впорядкований набір натуральних чисел:

$$r(x|M) = \big(\mathrm{d}(\mathrm{x}, v_1), \mathrm{d}(\mathrm{x}, v_2), \dots, d(x, v_i)\big)$$

З означення метричного генератора випливає, що $M -$ метричний генератор тоді і тільки тоді, коли: $\forall\, x, y \in G\;\, r(x|M) \neq r(y|M)$. Тобто кожна вершина графа G має унікальне представлення відносно M.

M_b є метричним базисом графа G, якщо:

$$|M_b| = \min(|M_i| : \; M_i - \text{метричний генератор}),$$

де $\{M_i\}$ − множина метричних генераторів G. Тобто метричний базис – метричний генератор з мінімальною потужністю.

$\dim(G)$– метрична розмірність графа.

$$\dim(G) = \min(|M_i| : M_i - \text{метричний генератор}),$$

або:

$$\dim(G) = |M_b|, M_b - \text{метричний базис}.$$

Метрична розмірність графа – потужність метричного базису цього графа.

Граф G називається склеюванням простих графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ по вершинам $x \in V_1$, $y \in V_2$, якщо $G = (V_1 \cup V_2 \backslash y, E_1 \cup E_2)$. (Рисунок 1)

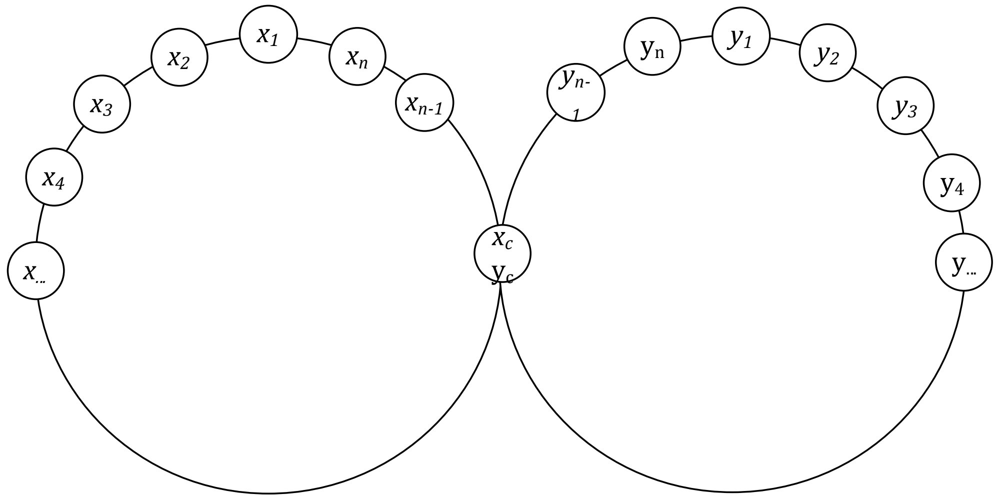

Рисунок 1 Склеювання двох простих циклів по вершинам x_c, y_c

Розглянемо простий зв'язний граф $G = (V, E)$, що містить в собі підграф $C_s = (V_c, E_c)$ – простий цикл. Будемо вважати, що вершина $x \in V \backslash V_c$ проектується в вершину $v_c \in V_c$, якщо:

$$\forall\, v_i \in V_c\ d(x, v_c) < d(x, v_i)$$

Простий цикл $C_s = (V, E)$ називатимемо парним, якщо: $|V| = 2k, k \in \mathbb{N}$;

Та непарним, якщо: $|V| = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$;

В парному простому циклі $G = (V, E)$ казатимемо, що вершина $x \in V$лежить напроти y $\in V$, якщо $d(x, y) = k$;

Теорема 1.1. Для підтвердження факту, що $\dim(G) \geq n, n \in \mathbb{N}$ необхідно і достатньо, щоб $\dim(\hat{G}) = n$, де $\hat{G}$ – підграф G. Тобто для доведення факту, що метрична розмірність деякого графа не менша за n, потрібно знайти такий підграф, метрична розмірність якого n.

Найбільш очевидним способом оцінити метричну розмірність графа G є знаходження його метричного базису. Доведення, що $M \subset V$ підмножина вершин графа G є метричним базисом полягає в перевірці двох умов:

1) M – метричний генератор G.
2) Не існує метричного генератора M' такого, що: $|M'| < |M|$.

Такий підхід базується на алгоритмі грубої сили (Brute force algorithm). Його ідея полягає в знаходженні принаймні одного метричного генератора M потужності $|M| = n$. та перевірці кожної підмножини M'потужності $|M'| = n - 1$ вершин графа, щоб встановити, що жодна з них не є метричним генератором. Перевірка, чи є підмножина вершин M' метричним генератором полягає в порівнянні відстаней до елементів підмножини для кожної пари $x, y \in V$ вершин графа. Таким чином маємо алгоритм, складність якого в найгіршому випадку виражається:

$$O\left(|V|^3 \cdot 2^{|v|}\right);$$

Цей алгоритм вважається найбільш примітивним та повільним способом оцінки метричної розмірності графа. Проте, при дослідженні конкретного сімейства графів, що дозволяє виражати підмножини вершин, і відстані до елементів підмножин в загальному вигляді, такий підхід дозволяє ефективно оцінити нижню межу метричної розмірності одразу для всього сімейства графів.

Розділ 2. Дослідження метричної розмірності графів з двома циклами

2.1 Метрична розмірність простого циклу

Розглянемо скінченний простий цикл $C_s = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \ v_3 \dots, v_n\}$,
$E = \{e_{1,2}, e_{2,3} \dots e_{n,1}\}, n \geq 3, n \ \in \mathbb{N}$, ребро $e_{i,j}$ з'єднує вершини v_i та v_j (Рисунок 2)

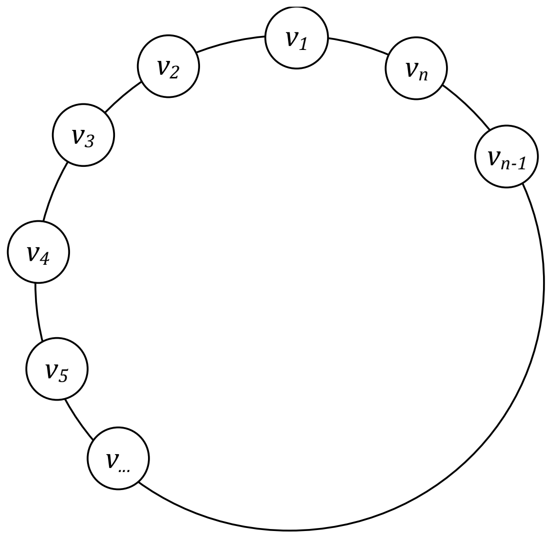

Рисунок 2 Простий цикл

Довжину найкоротшого шляху між двома довільними вершинами v_i, v_j, $i, j \leq n$, такого циклу будемо знаходити за формулою:

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} |j-i|, & |j-i| \leq \left[\frac{n}{2}\right] \\ n-|j-i|, & |j-i| > \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases},$$

Теорема 2.1: Якщо граф G – простий цикл, то $\dim(G) = 2$;

Доведення 2.1: Нехай $M -$ метричний генератор простого циклу C_s
Розглянемо метричний генератор $M = \{v_i\}, \ v_i -$ довільна вершина циклу C_s

$i \leq n$. Розглянемо пару верши v_{i+1}, v_{i-1}. (Рисунок 3)

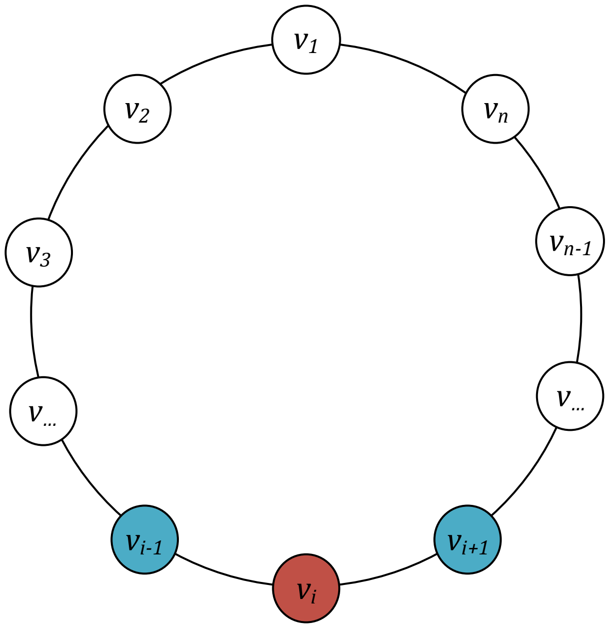

Рисунок 3

В цьому випадку:

$$r(v_{i-1}|M) = \left(d(v_{i-1}, v_i)\right) = \begin{cases} (|i - i - 1|), & i > 1; \\ (n - |n - 1|), & i = 1; \end{cases} = \begin{cases} (1), & 1 < i \leq n; \\ (1), & i = 1; \end{cases}$$

$$r(v_{i+1}|M) = \left(d(v_{i+1}, v_i)\right) = \begin{cases} (|i + 1 - i|), & i < n; \\ (|n - 1 - n|), & i = n; \end{cases} = \begin{cases} (1), & 1 \leq i < n; \\ (1), & i = n; \end{cases}$$

Бачимо, що різні вершини мають однакове представлення. Для довільної одноелементної підмножини M вершин циклу C_s знайдеться принаймні одна пара вершин з однаковим представленням. Тому можна зробити висновок, що M в такому випадку не є метричним генератором, а отже, не є метричним базисом графа C_s. Тому $\dim(C_s) = |M_b| > 1$;

Нехай, $|M| = 2$, $M = \{v_1, v_n\}$. Розглянемо довільну вершину $v_j \in V \backslash M$ (Рисунок 4)

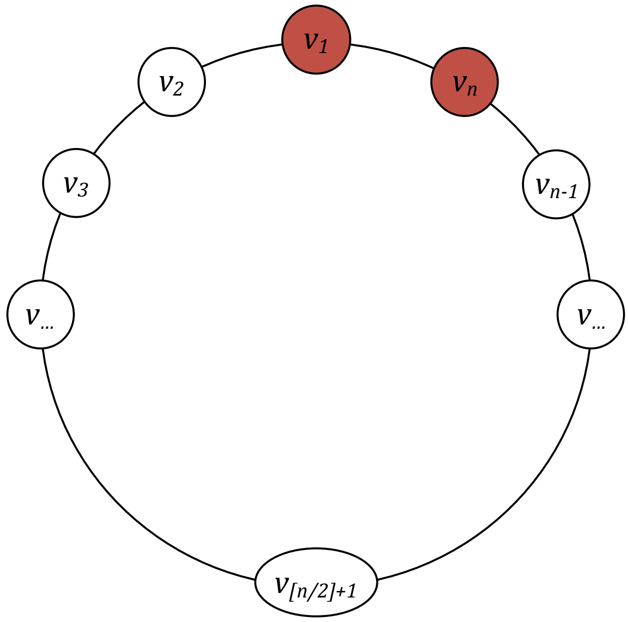

Рисунок 4

В цьому випадку, її представлення буде мати вигляд:

$$r(v_j|M) = \begin{pmatrix} d(v_j, v_1), \\ d(v_j, v_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |j-1| \\ n-|n-j| \end{pmatrix}, & j < \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} |j-1| \\ |n-j| \end{pmatrix}, & j = \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} n-|j-1| \\ |n-j| \end{pmatrix}, & j > \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} j-1, \\ j+1 \end{pmatrix}, & j < \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} j-1, \\ n-j \end{pmatrix}, & j = \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} n-j+1, \\ n-j \end{pmatrix}, & j > \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \end{cases}$$

Для довільної вершини $v_j \in V$ маємо унікальне представлення, тому $M -$ метричний генератор графа C_s. Для метричного генератора циклу з двох вершин, будь яка довільна пара вершин, яка не розділяється однією з вершин генератора, розділяється іншою.

Можна зробити висновок, що $M = M_b$ – метричний базис графа C_s. Отже, $\dim(C_s) = |M_b| = 2$.

Варто зазначити, що для парного простого циклу $C_s = (V, E), |V| = 2k$. $M = \{x, y\} \subset V$ не є метричним генератором, якщо x лежить напроти y, або $d(x, y) = k$.

Наслідок 2.1: Якщо граф G містить простий цикл, то $\dim(G) \geq 2$;

2.2 Метрична розмірність графів з двома циклами

Розглянемо простий зв'язний граф $G = (V, E)$, який містить в собі рівно два прості цикли: $C_1 = (V_{c1}, E_1)$, $C_2 = (V_{c2}, E_2), V_{c1} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V_{c2} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $n > 3, k > 3$ та ланцюг $L = (V_l, E_l), V_l = (l_1, \dots, l_{p+1}), p -$ довжина ланцюга, $p \geq 1$. При чому $V_{c1} \cap V_{c2} = \emptyset$. Граф G є послідовним склеюванням простого циклу C_1 та ланцюга L по вершинам v_1, l_1 та склеюванням отриманого графа з простим циклом C_2 по вершинам u_1, l_{p+1}. (Рисунок 5)

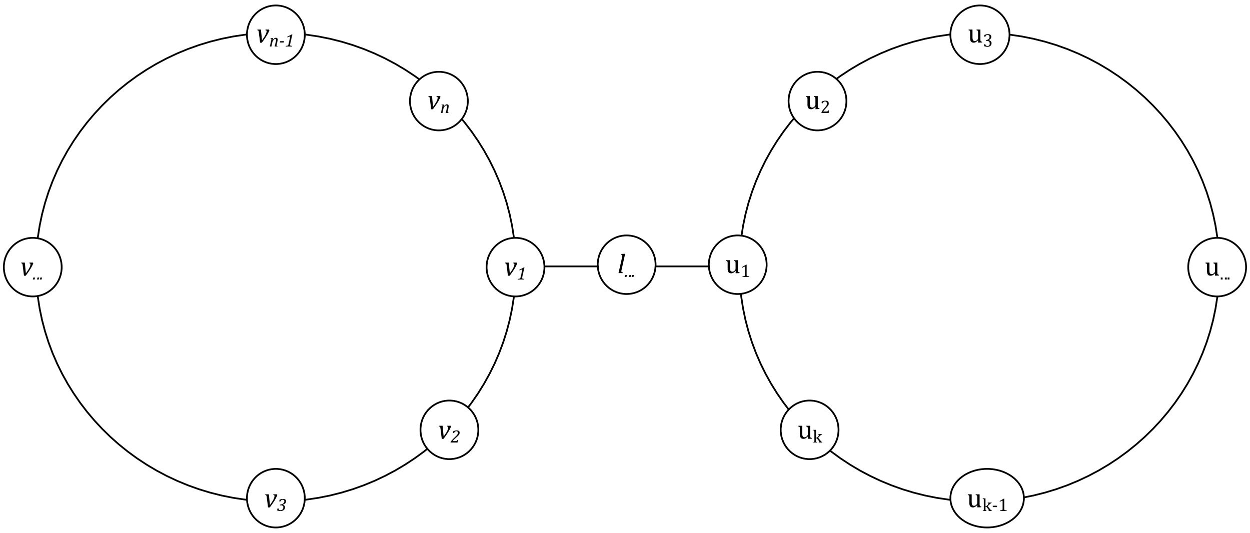

Рисунок 5 склеювання двох простих циклів через ланцюг

В загальному випадку ланцюг L - шлях між двома циклами C_1 та C_2. Розглянемо випадок, коли такий шлях тільки один, оскільки, якщо існує більше одного шляху між двома циклами, то Граф містить більше ніж два цикли.

Нехай, $M_b -$ метричний базис G. Оскільки граф G містить цикл, то $\dim(G) = |M_b| \geq 2$ (див. наслідок 2.1). Розглянемо підмножину

$M = \{v_i, v_j\} \subset V_{c1},\ j < i \leq\ n$

M складається з довільних двох вершин, які належать одному з циклів. Розглянемо пару вершин: $u_2, u_k\ \in\ V_{c2}$, що належать іншому циклу. (Рисунок 6)

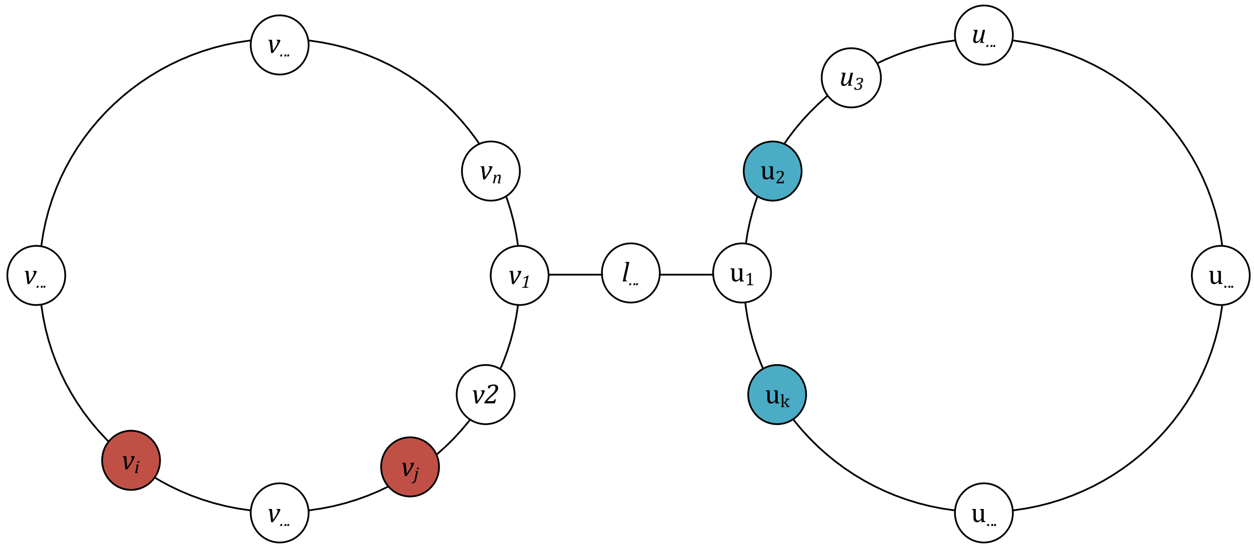

Рисунок 6

Їх представлення матиме вигляд:

$$\mathrm{r}(u_2|M) = \begin{pmatrix} d(u_2, v_i) \\ d(u_2, v_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d(u_2, u_1) + d(u_1, v_1) + d(v_i, v_1) \\ d(u_2, u_1) + d(u_1, v_1) + d(v_j, v_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |2-1| + p + |i-1|, \\ |2-1| + p + |j-1| \end{pmatrix}, & i < \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} |2-1| + p + n - |i-1|, \\ |2-1| + p + |j-1| \end{pmatrix}, & j < \left[\frac{n}{2}\right] + 1 < i; \\ \begin{pmatrix} |2-1| + p + n - |i-1|, \\ |2-1| + p + n - |j-1| \end{pmatrix}, & j > \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} p+i, \\ p+j \end{pmatrix}, & i < \left[\frac{n}{2}\right] + 1\,; \\ \begin{pmatrix} p+n-i+2, \\ p+j \end{pmatrix}, & j < \left[\frac{n}{2}\right] + 1 < i\,; \\ \begin{pmatrix} p+n-i+2, \\ p+n-j+2 \end{pmatrix}, & j > \left[\frac{n}{2}\right] + 1\,; \end{cases}$$

$$\mathrm{r}(u_n|M) = \begin{pmatrix} d(u_k, v_i) \\ d\big(u_k, v_j\big) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d(u_k, u_1) + d(u_1, v_1) + d(v_i, v_1) \\ d(u_k, u_1) + d(u_1, v_1) + d\big(v_j, v_1\big) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} k - |k-1| + p + |i-1|, \\ k - |k-1| + p + |j-1| \end{pmatrix}, & i < \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} k - |k-1| + p + n - |i-1|, \\ k - |k-1| + p + |j-1| \end{pmatrix}, & j < \left[\frac{n}{2}\right] + 1 < i; \\ \begin{pmatrix} k - |k-1| + p + n - |i-1|, \\ k - |k-1| + p + n - |j-1| \end{pmatrix}, & j > \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} p + i, \\ p + j \end{pmatrix}, & i < \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \\ \begin{pmatrix} p + n - i + 2, \\ p + j \end{pmatrix}, & j < \left[\frac{n}{2}\right] + 1 < i\,; \\ \begin{pmatrix} p + n - i + 2, \\ p + n - j + 2 \end{pmatrix}, & j > \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \end{cases}$$

$$\mathrm{r}(u_2|M) = \mathrm{r}(u_n|M), \qquad \forall i, j < n;$$

Для довільної підмножини M, $|M| = 2$ вершин графа G за умови, що обидва елемента M належать одному циклу маємо принаймні одну пару вершин, що не розділяється жодним елементом M. Тому, M не є метричним генератором G, а також M не є метричним базисом G .

Оскільки будь-яка вершина $v \in V_{c1}$ проектується в єдину вершину $u_c \in V_{c2}$ і навпаки, будь-яка вершина $u \in V_{c2}$ проектується в єдину вершину $v_c \in V_{c1}$, то шлях від v – вершини циклу C_1 до будь-якої вершини u з C_2 буде проходити через вершину u_c, а шлях від u – вершини циклу C_2 до довільної вершини v з циклу C_1 проходитиме через v_c. Враховуючи властивість метричної розмірності простого циклу $\dim(C_s) = 2$, всі елементи метричного базису графа не можуть проектуватись в єдину вершину циклу. Як наслідок, вершини метричного базису не можуть належати лише одному з двох циклів, а також, вершини метричного базису не можуть бути елементами ланцюга, що з'єднує ці два цикли.

Розглянемо випадок, коли вершини метричного генератора належать різним циклам:

Нехай $M = \{v_2, u_2\},\ v_2 \in V_{c1}, u_2 \in V_{c2}$ (Рисунок 7)

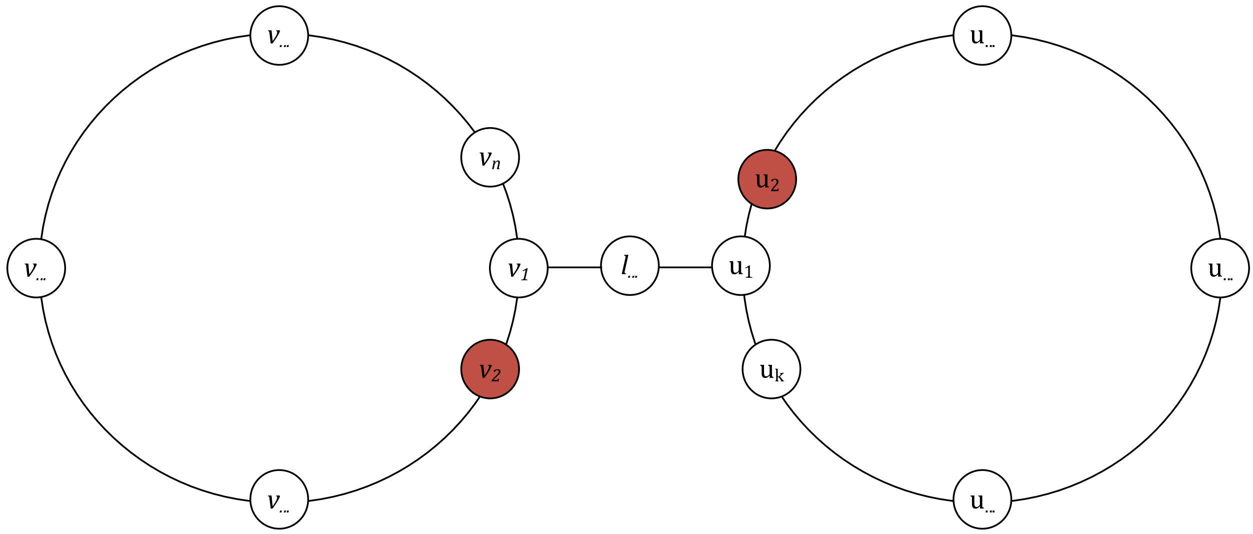

Рисунок 7

Для довільної вершини $x \ \in V$ її представлення матиме вигляд:

$$r(x|M) = \begin{pmatrix} d(x, v_2) \\ d(x, u_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} d(v_i, v_2) \\ d(v_i, v_1) + d(v_1, u_1) + d(u_1, u_2) \end{pmatrix}, x = \ v_i \in V_{c1}; \\ \begin{pmatrix} d(l_i, v_1) + d(v_1, v_2) \\ d(l_i, u_1) + d(u_1, u_2) \end{pmatrix}, x = \ l_i \in L; \\ \begin{pmatrix} d(u_i, u_1) + d(u_1, v_1) + d(v_1, v_2) \\ d(u_i, u_2) \end{pmatrix}, x = \ v_i \in V_{c1}; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |i-2| \\ |i-1|+p+|2-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1; \\ \begin{pmatrix} n-|i-2| \\ n-|i-1|+p+|2-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1; \\ \begin{pmatrix} i \\ |p-i| \end{pmatrix}, & x = l_i \in L; \\ \begin{pmatrix} |i-1|+p+|2-1| \\ |i-2| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1; \\ \begin{pmatrix} n-|i-1|+p+|2-1| \\ n-|i-2| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i > \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |i-2| \\ i+p \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1; \\ \begin{pmatrix} n-i+2 \\ n-i+p+2 \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1; \\ \begin{pmatrix} i \\ |p-i| \end{pmatrix}, & x = l_i \in L; \\ \begin{pmatrix} i+p \\ |i-2| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1; \\ \begin{pmatrix} n-i+p+2 \\ n-i+2 \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1; \end{cases}$$

При $d(v_c, u_c) = p \neq 0$ Кожна вершина графа матиме унікальне представлення. Тому М – дійсно метричний генератор графа G. Очевидно, що М - метричний базис G (див. наслідок 2.1).

Для метричного базису $M_b = \{v_b, u_b\}$, $v_b \neq v_c$, $u_b \neq u_c$, де v_c, u_c – початок і кінець ланцюга, який з'єднує два цикли. Більш того, елемент метричного базису v_b не лежить напроти вершини v_c. Так само, як елемент u_b того ж метричного базису не лежить напроти u_c.

Враховуючи (теорему 1.1), метрична розмірність зв'язного простого графа, який містить в собі два цикли, що з'єднані ланцюгом довжини не менше 1, та не мають спільних вершин, не менша ніж 2

Розглянемо простий зв'язний граф $G = (V, E)$, який містить в собі два прості цикли:

$C_1 = (V_{c1}, E_1)$, $C_2 = (V_{c2}, E_2)$, $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $n > 3$, $k > 3$. При чому $V_{c1} \cap V_{c2} = \{v_c\}$. Такий граф є склеюванням двох простих циклів C_1, та C_2 по точкам v_c, u_c. (Рисунок 8)

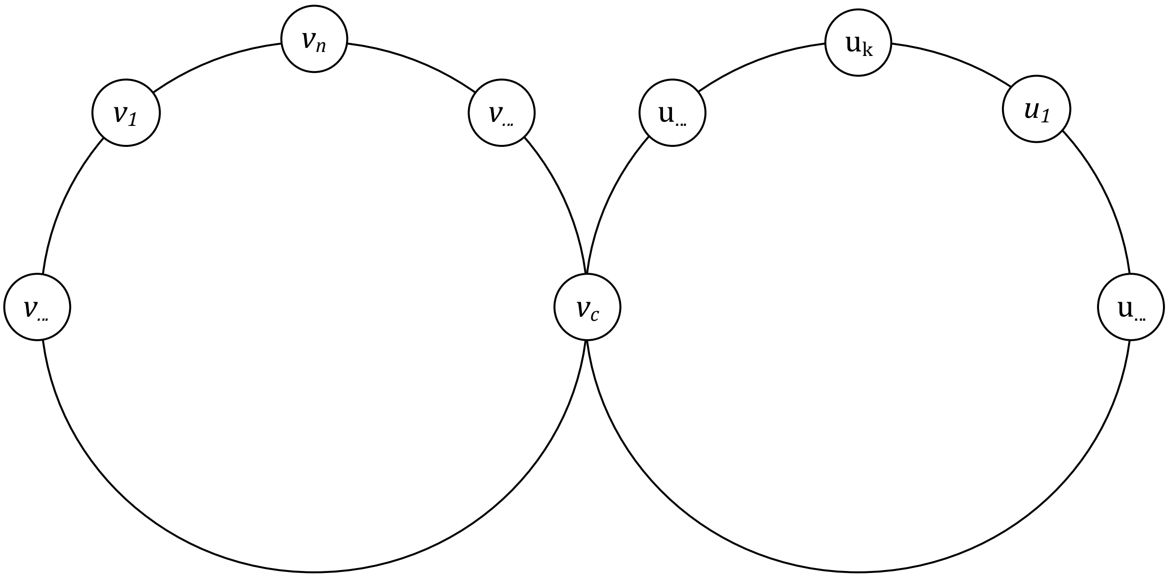

Рисунок 8

Такий граф можна розглядати, як окремий випадок склеювання двох циклів через ланцюг довжини $p = 0$. Тому для нього справедливе твердження, що елементи метричного базису не можуть належати лише одному з циклів. Також, елементи метричного базису не лежать напроти вершини v_c. Сама ж вершина v_c в метричний базис теж не входить.

Нехай, G – склеювання циклів C_1, та C_2 по точкам v_1, u_1. При чому C_2 – непарний, тобто $k = 2p - 1$. $M_b -$ метричний базис графа G.

Нехай, $\dim(G) = |M_b| = 2$. Розглянемо підмножину $M \subset V, M = \{v_2, u_p\}$, та довільну вершину x. (Рисунок 9)

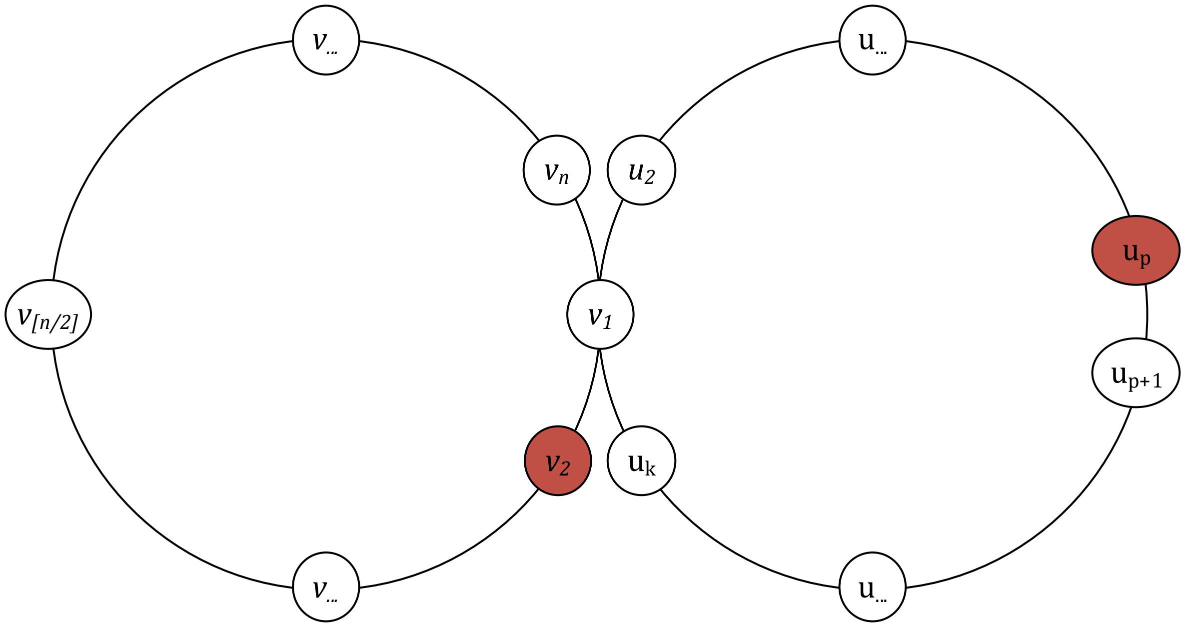

Рисунок 9

Представлення довільної верши x буде мати вигляд:

$$r(x|M) = \begin{pmatrix} d(x, v_2) \\ d(x, u_p) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} d(v_i, v_2) \\ d(v_i, v_1) + d(v_1, u_p) \end{pmatrix}, x = v_i \in V_{c1}; \\ \begin{pmatrix} d(u_i, v_1) + d(v_1, v_2) \\ d(u_i, u_p) \end{pmatrix}, x = u_i \in V_{c1}; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |i-2|, \\ |i-1| + |p-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i < \left[\frac{n}{2}\right] + 2; \\ \begin{pmatrix} |i-2|, \\ n - |i-1| + |p-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i = \left[\frac{n}{2}\right] + 2; \\ \begin{pmatrix} n - |i-2|, \\ n - |i-1| + |p-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i > \left[\frac{n}{2}\right] + 2; = \\ \begin{pmatrix} |i-1| + 1, \\ |p-i| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \le p; \\ \begin{pmatrix} k - |i-1| + 1, \\ |p-i| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i > p; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |i-2|, \\ i+p-2 \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i < \left[\frac{n}{2}\right] + 2; \\ \begin{pmatrix} i-2, \\ n-i+p \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i = \left[\frac{n}{2}\right] + 2; \\ \begin{pmatrix} n-i+2, \\ n-i+p \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i > \left[\frac{n}{2}\right] + 2; \\ \begin{pmatrix} i, \\ p-i \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \leq p; \\ \begin{pmatrix} k-i, \\ i-p \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i > p; \end{cases}$$

Кожна вершина має унікальне представлення. Тому M є метричним генератором графа G. А отже, $M = M_b$ є метричним базисом G. Отже, $\dim(G) = |M_b| = 2$.

Враховуючи теорему (1.1), Для графа, що містить два цикли з однією спільною вершиною, за умови, що хоча б один з циклів непарний, метрична розмірність не менша, ніж 2

Окремо варто розглянути граф G - склеювання двох парних циклів $C_1 = (V_{c1}, E_1)$ та $C_2 = (V_{c2}, E_2), V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}, n = 2q,$ $k = 2p, q \geq 2, p \geq 2, q, p \in \mathbb{N};$
Нехай, $\dim(G) = |M_b| = 2$. Розглянемо підмножину $M \subset V,$
$M = \{v_i, u_j\}, i > q + 1, j > p + 1$. Розглянемо пару вершин v_2, u_2.
(Рисунок 10).

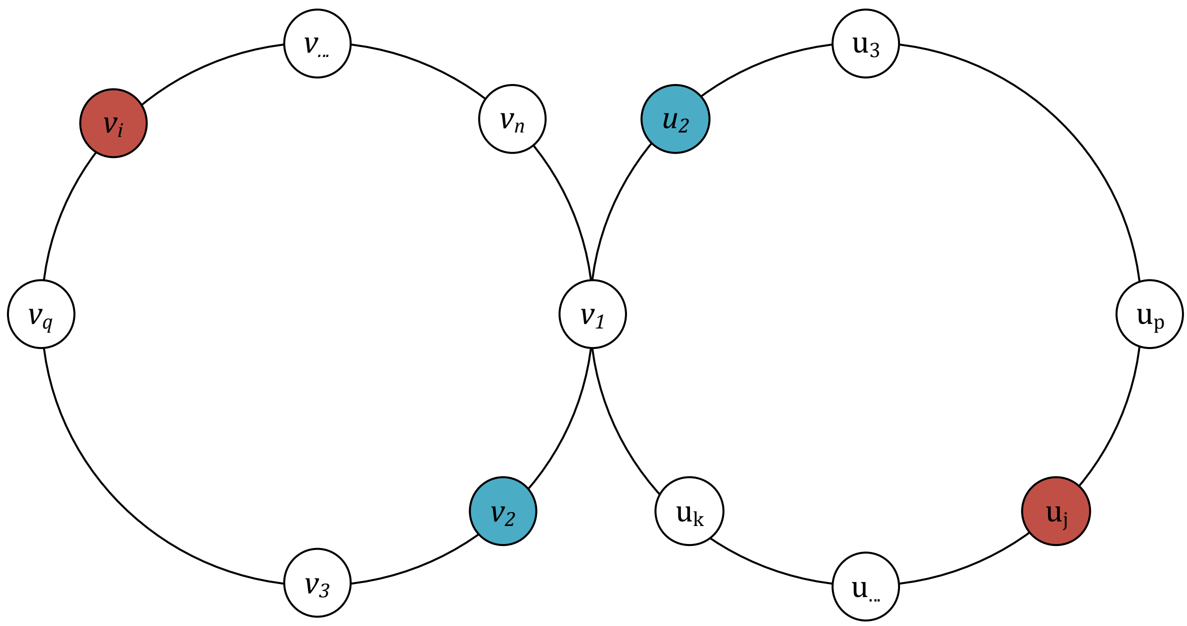

Рисунок 10

Їх представлення матиме вигляд:

$$r(v_2|M) = \begin{pmatrix} d(v_2, v_i) \\ d(v_2, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(v_2,\ v_i), \\ d(v_2, v_1) + d(v_1, u_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n - |i-2| \\ |2-1| + k - |j-1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - i + 2 \\ 1 + k - j + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - i + 2 \\ k - j + 2 \end{pmatrix};$$

$$r(u_2|M) = \begin{pmatrix} d(u_2, v_i) \\ d(u_2, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(u_2, v_1) + d(v_1, v_i), \\ d(u_2, u_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |2-1| + n - |i-1| \\ k - |j-2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + n - i + 1 \\ k - j + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - i + 2 \\ k - j + 2 \end{pmatrix};$$

$$r(v_2|M) = r(u_2|M);$$

Вершини v_2, u_2 мають однакове представлення.

Припустимо, що $i < q+1, j > p+1$. Розглянемо пару вершин v_n, u_k. (Рисунок 11)

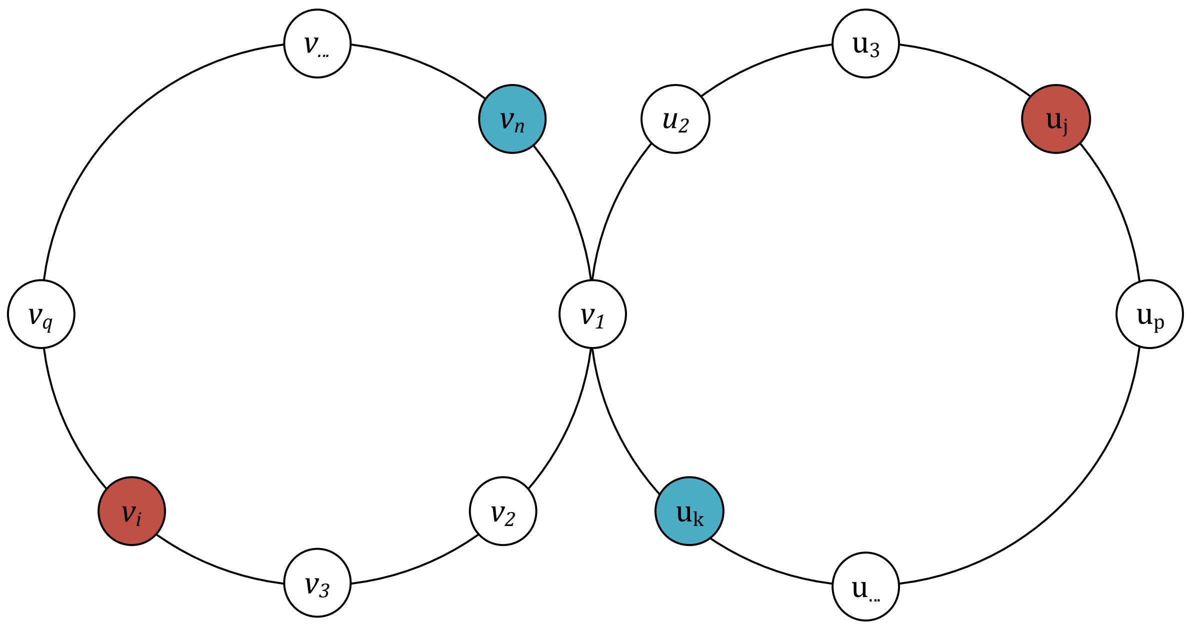

Рисунок 11

Їх представлення матиме вигляд:

$$r(v_n|M) = \begin{pmatrix} d(v_n, v_i) \\ d(v_n, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(v_n,\ v_i), \\ d(v_n, v_1) + d(v_1, u_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n - |n - i| \\ n - |n - 1| + |j - 1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 + j - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix};$$

$$r(u_k|M) = \begin{pmatrix} d(u_k, v_i) \\ d(u_k, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(u_k, v_1) + d(v_1, v_i), \\ d(u_k, u_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k - |k - 1| + |i - 1| \\ k - |k - j| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i - 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix};$$

$$r(v_n|M) = \ r(u_k|M);$$

Вершини v_n, u_k мають однакове представлення.

Допускаючи, що $i > q, j < p$ розглянемо пару вершин v_2, u_k (Рисунок 12)

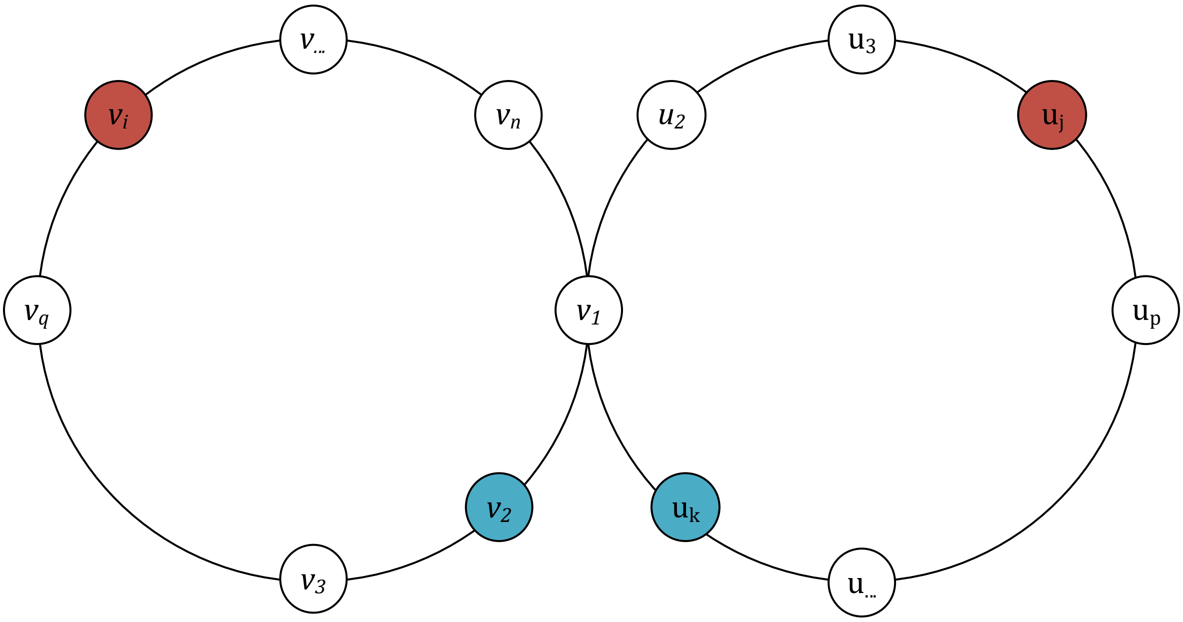

Рисунок 12

Їх представлення матиме вигляд:

$$r(v_2|M) = \begin{pmatrix} d(v_2, v_i) \\ d(v_2, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(v_2,\ v_i), \\ d(v_2, v_1) + d(v_2, u_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n - |i-2| \\ |2-1| + |j-1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-i+2 \\ 1+j-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-i+2 \\ j \end{pmatrix};$$

$$r(u_k|M) = \begin{pmatrix} d(u_k, v_i) \\ d(u_k, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(u_k, v_1) + d(v_1, v_i), \\ d(u_k, u_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k - |k-1| + n - |2-1| \\ k - |k-j| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n-i+1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-i+2 \\ j \end{pmatrix};$$

$$r(v_2|M) = r(u_k|M);$$

Вершини v_2, u_k мають однакове представлення.

Для будь-якої $M -$ підмножини вершин такої, що $|M| = 2$ знайдеться пара вершин, яка не розділяється жодним з елементів M. Отже, M не є метричним генератором графа G. А отже, не є метричним базисом, тому $\dim(G) > 2$.

Нехай, $\dim(G) = |M_b| = 3$. Розглянемо підмножину $M \subset V$, $M = \{v_2, v_n, u_2\}$.

(Рисунок 13)

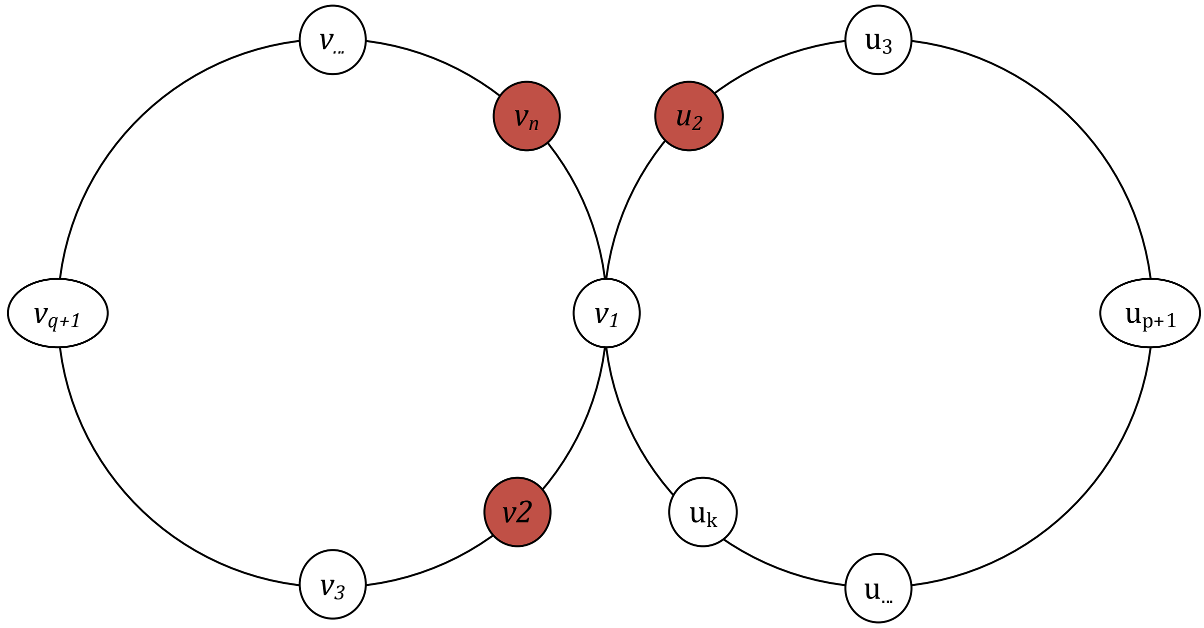

Рисунок 13

Представлення довільної верши x буде мати вигляд:

$$r(x|M) = \begin{pmatrix} d(x, v_2) \\ d(x, v_n) \\ d(x, u_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} d(v_i, v_2), \\ d(v_i, v_n), \\ d(v_i, v_1) + d(v_1, u_2) \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}; \\ \begin{pmatrix} d(u_i, v_1) + d(v_1, v_2) \\ d(u_i, v_1) + d(v_1, v_n) \\ d(u_i, u_2) \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |i-2|, \\ n-|n-i|, \\ |i-1|+|2-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i < q+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} |i-2|, \\ |n-i|, \\ n-|i-1|+|2-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i = q+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} n-|i-2|, \\ |n-i|, \\ n-|i-1|+|2-1| \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i > q+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} |i-1|+|2-1|, \\ |i-1|+n-|n-1|, \\ |i-2| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \le p+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} k-|i-1|+|2-1|, \\ k-|i-1|+n-|n-1|, \\ k-|i-2| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i > p+1, i \in \mathbb{N} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} |i-2| \\ i \\ i \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i < q+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} i-2, \\ n-i, \\ n-i+2 \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i = q+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} n-i+2, \\ n-i, \\ n-i+2 \end{pmatrix}, & x = v_i \in V_{c1}, i > q+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} i, \\ i, \\ |i-2| \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i \le p+1, i \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} k-i+2, \\ k-i+2, \\ k-i+2 \end{pmatrix}, & x = u_i \in V_{c2}, i > p+1, i \in \mathbb{N} \end{cases};$$

Будь-яка вершина графа має унікальне представлення. Тому M є метричним генератором графа G. А отже, $M = M_b$ є метричним базисом G. Тому $\dim(G) = |M_b| = 3$.

Враховуючи теорему (1.1), для графа, що містить два парні цикли, метрична розмірність не менша ніж 3.

За умови зв'язності графа, а також, що граф містить рівно два циклі, інші варіанти з'єднання цих двох циклів всередині графа неможливі.

ВИСНОВОК

В роботі описано метричну розмірність графів, що містять рівно два цикли. Викладено основні теоретичні відомості, необхідні для дослідження метричної розмірності графів. В результаті виявилось, що найменша метрична розмірність графа з двома циклами дорівнює 2. За винятком графа, що містить два парні цикли, які мають одну спільну вершину. Найменша можлива метрична розмірність такого графа дорівнює 3.

Список використаної літератури

1. P. J. Slater, Leaves of trees, Congr. Numerantium 14 (1975), 549-559.
2. F. Harary and R. A. Melter, On the metric dimension of a graph, Ars Comb. 2 (1976), no. 2, 191-195.
3. M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness, Freeman, New York, 1979.
4. Murtaza Ali, Gohar Ali, Usman Ali, M. T. Rahim1, On Cycle Related Graphs with Constant Metric Dimension, Open Journal of Discrete Mathematics, 2012, 2, 21-23.
5. M. Dudenko and B. Oliynyk, On unicyclic graphs of metric dimension 2, Algebra Discrete Math. 23 (2017), no. 2 , 216-222.
6. M. Dudenko, Metric dimension of unicyclic graphs with at most one main vertex, Visnyk of Lviv University, V. 83, 2017, pp. 189–195.
7. M. Dudenko and B. Oliynyk, On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4. V. 26 (2018). Number 2, pp. 256–269
8. http://www.scholarpedia.org/article/Metric_Dimension#